

УДК 532.59:551.466.2

© 1996 г. С. Ф. ДОЦЕНКО

ГЕНЕРАЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ПРИ ФИНИТНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ ДНА БАССЕЙНА

В рамках линейной теории волн в бассейне постоянной глубины рассмотрен процесс генерации трехмерных безвихревых движений жидкости при малых локальных смещениях конечной длительности участка дна бассейна. Решение задачи и выражение для полной энергии волнового поля найдены с использованием интегральных преобразований. Дан анализ общих свойств процесса генерации неустановившихся волн для кратковременных и медленных деформаций дна. В рамках поршневой модели генерации выполнено сопоставление энергетических характеристик осесимметричных волн для двух временных законов деформаций дна одинаковой продолжительности. В общем случае показано, что при определенных условиях характер и интенсивность волнового процесса зависят как от временного закона, так и от длительности деформационного процесса.

Исследования генерации гравитационных волн на поверхности жидкости при деформациях дна бассейна вызваны необходимостью изучения механизмов возбуждения цунами подводными землетрясениями [1]. Простейшая модель таких процессов, позволяющая эффективно применять аналитические методы, предполагает волны линейными, глубину бассейна постоянной, а вертикальные смещения дна малыми по сравнению с глубиной бассейна. Она применялась для определения асимптотических законов затухания трехмерных волн в дальней волновой зоне, возбуждаемых при импульсных вертикальных смещениях кругового участка дна [2, 3], и в случае асимметричных пространственных распределений нестационарных деформаций донной поверхности [4, 5]. Численный анализ формирования волны и начальной стадии ее распространения (ближнее волновое поле), использующий различные методы расчета интегральных решений, проводился в работах [6—9]. В рамках модели длинных волн анализировалось влияние на динамику и энергетику волн геометрической формы деформируемого участка дна [10].

В указанных работах изучалась генерация волн для различных пространственно-временных возмущений дна бассейна. Зависимость волнового процесса от временного закона смещений дна исследована явно недостаточно. Связь остаточных деформаций дна, возникающих после завершения процесса генерации, с характеристиками волнового поля рассматривалась для модельных законов движений дна в рамках модели длинных волн [11]. В частности показано, что при определенных условиях структура и энергия волнового поля зависят как от временного закона, так и от длительности деформационного процесса. Конечно-разностные модели генерации линейных и нелинейных волн для различных движений дна предложены в [12, 13], включая воспроизведение реальных сейсмотектонических движений дна океана [12].

Ниже изучаются общие свойства процесса генерации неустановившихся волн, связанный с влиянием на него временного закона и длительности локальных смещений дна бассейна. В рамках поршневой модели генерации волн [1—3] проведено сопоставление энергетических характеристик осесимметричных волн для двух временных законов деформаций дна одинаковой продолжительности.

1. **Постановка задачи.** Введем декартову систему координат x_*, y_*, z_* с горизонтальными осями x_*, y_* и вертикальной осью z_* . Рассмотрим безграничный по координатам x_*, y_* слой идеальной несжимаемой однородной тяжелой жидкости постоянной глубины H . В моменты времени $t_* < 0$ жидкость находится в состоянии гидростатического равновесия (ускорение свободного падения g направлено вертикально вниз). При $t_* \geq 0$ дно бассейна деформируется по закону $z_* = -H + h_*(R_*, t_*)$, где $R_* = (x_*, y_*)$, $h_* \equiv 0$ при $t \leq 0$. Вертикальные смещения дна локализованы в круге $R_* < L_*$, малы и имеют конечную продолжительность T_* (финитные деформации дна), а поэтому

$$h_*(R_*, t_*) = 0 \quad (R_* > L_*), \quad a = \max_{R, t_*} |h_*| \ll H, \quad \frac{\partial h_*}{\partial t_*} = 0 \quad (t_* > T_*)$$

В рамках общей линейной теории безвихревых движений жидкости исследуем генерируемые такими смещениями дна бассейна неустановившиеся трехмерные волны на поверхности жидкости.

Процесс образования и распространения волн в безразмерных переменных описывается начально-краевой задачей [1, 14]

$$\Delta \varphi = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \zeta = 0 \quad (z = 0); \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (z = -1) \tag{1.2}$$

$$\varphi, \quad \nabla \varphi \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \tag{1.3}$$

$$\varphi = \zeta = 0 \quad (t = 0) \tag{1.4}$$

Здесь $\varphi(R, z, t)$ — потенциал скорости, $\zeta(R, t)$ — смещение свободной поверхности жидкости. Безразмерные переменные и параметры введены по формулам

$$\{R_*; L_*\} = H \{R; L\}, \quad t_* = Hc^{-1}t, \quad c = \sqrt{gH}$$

$$\{h_*; \zeta_*\} = a \{h; \zeta\}, \quad \varphi_* = ac\varphi, \quad T = H^{-1}cT_*$$

В новых переменных $h = 0$ при $R > L$ и $\partial h / \partial t = 0$ при $t > T$ для любых R .

2. **Решение задачи и полная энергия волнового поля.** Применим к задаче (1.1)–(1.4) преобразование Фурье по R и преобразование Лапласа по t . Трансформанта Фурье — Лапласа находится из возникающей неоднородной краевой задачи по координате z . Обратное преобразование Лапласа вычисляется с использованием теоремы Коши о вычетах и свертки оригиналов. Найденное таким способом преобразование Фурье $\Phi(r, z, t)$ потенциала скорости $\varphi(R, z, t)$ записывается в форме

$$\Phi = \frac{\text{sh}(rz)}{r \text{ch } r} \frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} - \frac{\text{ch}[r(z+1)]}{\omega \text{ch}^2 r} \int_0^t \frac{\partial Q(r, \tau)}{\partial \tau} \sin[\omega(t-\tau)] d\tau \tag{2.1}$$

$$Q(r, \xi) = \int_{R < L} h(R, \xi) e^{-Rr} dR \tag{2.2}$$

где волновой вектор $r = (m, n)$, $\omega = \sqrt{r \text{th } r}$ — дисперсионная зависимость для поверхностных гравитационных волн в бассейне постоянной глубины.

Волновое поле ζ находится из (1.2) с использованием (2.1) и обратного преобразования Фурье. Окончательно получаем

$$\zeta = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{M(r, t)}{\text{ch } r} e^{Rr} dr \tag{2.3}$$

$$M = \int_0^t \frac{\partial Q(r, \tau)}{\partial \tau} \cos[\omega(t-\tau)] d\tau \tag{2.4}$$

В интеграле (2.3) и приводимых ниже многократных интегралах по переменным R и r опущены, если не указаны, бесконечные пределы интегрирования.

Полная энергия движущейся жидкости, определяемая в безразмерных переменных по формуле

$$W(t) = \frac{1}{2} \int \left[\int_{-1}^0 |\nabla\varphi|^2 dz + \zeta^2 \right] dR \quad (2.5)$$

удовлетворяет соотношению [14]

$$W'(t) = - \int \left[\frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right] \Big|_{z=-1} dR = - \int \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \Big|_{z=-1} dR$$

Применим к последнему интегралу равенство Парсевала с последующей подстановкой в него выражения (2.1), а затем проинтегрируем полученное выражение по отрезку $[0, t]$ при начальном условии $W(0) = 0$. Тогда окончательное выражение для полной энергии волнового поля в момент времени t запишется в виде

$$W(t) = \frac{1}{4\pi^2} \int dr \int_0^t \frac{\partial Q(r, \xi)}{\partial \xi} \overline{\Psi(r, \xi)} d\xi \quad (2.6)$$

$$\Psi = \frac{\text{th } r}{r} \frac{\partial^2 Q(r, \xi)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\text{ch}^2 r} M(r, \xi)$$

Из (2.6) следует постоянство полной энергии движущейся жидкости при $t > T$, что обусловлено прекращением при $t = T$ деформаций дна бассейна. Она определяется по формуле

$$W(T) = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{dr}{\text{ch}^2 r} \int_0^T \frac{\partial Q(r, \xi)}{\partial \xi} \overline{M(r, \xi)} d\xi \quad (2.7)$$

Непосредственным следствием соотношений (2.5), (2.6) является единственность решения (2.3), (2.4) задачи (1.1)–(1.4). Этот вывод — частный случай более общего утверждения работы [14].

3. Кратковременные деформации дна бассейна. Пусть $T \rightarrow 0$, $t > T$. Интегрирование по частям (2.4) позволяет представить решение (2.3) в виде суммы двух полей

$$\zeta = \zeta_0(R, t - T) + S(R, t) \quad (3.1)$$

$$\zeta_0 = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{Q(r, T)}{\text{ch } r} \cos[\omega(t - T)] e^{Rr} dr$$

$$S = - \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{\omega}{\text{ch } r} e^{Rr} dr \int_0^t Q(r, \tau) \sin[\omega(t - \tau)] d\tau$$

Оценка сверху поля S имеет вид

$$|S| \leq TF(r)$$

$$F = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{\omega \max_{r,t} |Q(r, t)|}{\text{ch } r} dr \leq A \max_{r,t} |Q(r, t)|$$

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{r\omega}{\text{ch } r} dr \approx 0,38152$$

Поэтому для кратковременных деформаций участка дна справедлива равномерная по R и t асимптотическая оценка

$$\zeta = \zeta_0(R, t - T) + O(T), \quad T \rightarrow 0, \quad t > T \quad (3.2)$$

Аналогичным способом оценивается полная энергия волнового поля $W(T)$ при малых T . Окончательно имеем

$$W(T) = W_0(T) + O(T^2), \quad T \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

$$W_0 = \frac{1}{8\pi^2} \int \frac{|Q^2(r, T)|}{\text{ch}^2 r} e^{Rr} dr = \frac{1}{2} \int \zeta_+^2(\mathbf{R}) d\mathbf{R} \quad (3.4)$$

$$\zeta_+ = \zeta_0(\mathbf{R}, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{Q(r, T)}{\text{ch} r} e^{Rr} dr \quad (3.5)$$

Из выражений (3.2), (3.1) и (3.3), (3.4) следует, что для кратковременных деформаций участка дна бассейна допустима приближенная замена задачи генерации волн (1.1)–(1.4) эволюционной задачей с однородными граничными условиями ($h \equiv 0$) и начальными условиями вида

$$\varphi = 0, \quad \zeta = \zeta_+(\mathbf{R}) \quad (t = T)$$

в которых начальное поле скорости отсутствует. Для осесимметричных волн это впервые показано в [3].

Таким образом, для кратковременных деформаций дна конкретный вид закона смещений дна со временем не является существенным. Определяющую роль играет характер распределения остаточных смещений дна бассейна в момент $t = T$ прекращения процесса генерации волн. В частности, генерация поверхностных волн малоэффективна, если после завершения движений дна $h(\mathbf{R}, T) = 0$. Для недиспергирующих длинных волн ($\omega \approx r$) $\text{ch} r \approx 1$, и поэтому $\zeta_+(\mathbf{R})$ совпадает, как следует из (3.5), с распределением остаточных смещений дна бассейна. Подобный прием традиционно используется при численном моделировании волн цунами в реальных условиях [12, 13].

4. Медленные деформации дна бассейна. Пусть $T \rightarrow \infty$. Будем считать функцию h достаточно гладкой по времени и заданной в виде $h = h(r, \eta)$, где $\eta = t/T$, причем $h(r, 1) = \text{const}$ при $t > T$. Предполагается, что равномерно по r и $\eta \in [0, 1]$

$$\frac{\partial Q(r, \eta)}{\partial \eta} = O(1), \quad \frac{\partial^2 Q(r, \eta)}{\partial \eta^2} = O(1) \quad (4.1)$$

Интегрирование по частям (2.4) и последующая оценка полученного выражения сверху позволяют доказать справедливость неравенства

$$|M| \leq \frac{N(r)}{T} \quad (4.2)$$

$$N = \frac{2}{\omega(r)} \left[\max_{\eta} \left| \frac{\partial Q(r, \eta)}{\partial \eta} \right| + \max_{\eta} \left| \frac{\partial^2 Q(r, \eta)}{\partial \eta^2} \right| \right]$$

Поэтому из (2.3), (4.2) следует, что

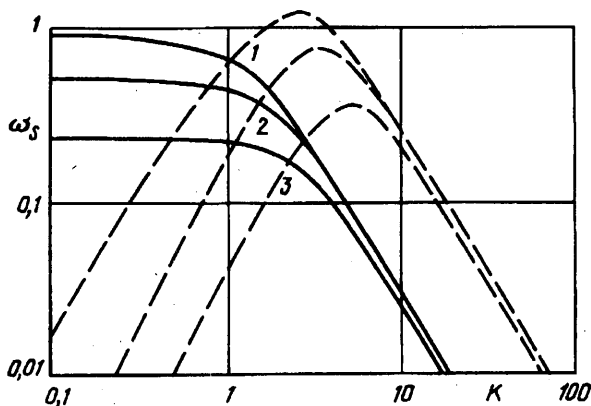
$$\zeta = O\left(\frac{1}{T}\right), \quad T \rightarrow \infty \quad (4.3)$$

равномерно по \mathbf{R} и t .

Аналогичным способом рассматривается поведение полной энергии волнового поля при больших T . Окончательная асимптотическая оценка, найденная с использованием (2.7) и (4.2), имеет вид

$$W(T) = O\left(\frac{1}{T}\right), \quad T \rightarrow \infty \quad (4.4)$$

Таким образом, (4.3) и (4.4) позволяют заключить, что медленные и достаточно продолжительные локальные деформации донной поверхности, удовлетворяющие условиям (4.1), не могут эффективно возбуждать гравитационные волны на



поверхности жидкости. Этот результат неоднократно отмечался при рассмотрении различных модельных движений дна [1, 6, 7, 9, 10, 13].

5. Поршневая модель генерации волн. Рассмотрим деформации дна специального вида $h = h_0(R)q(t)$, где $q(t) = 0 (t \leq 0)$, $q'(t) = 0 (t > T)$. Предположим, что пространственное распределение вертикальных смещений дна имеет форму вертикального кругового цилиндра (поршневая модель генерации [1—3]):

$$h_0 = 1 (R < L), \quad h_0 = 0 (R > L)$$

Зададим два временных закона вертикального смещения поршня $q = q_{1,2}(t)$ [11]: смещение с остаточными деформациями дна

$$q_1 = \frac{t}{T} (0 \leq t < T), \quad q_1 = 1 (t \geq T); \quad (5.1)$$

смещение без остаточных деформаций дна

$$q_2 = \frac{2t}{T} \left(0 \leq t < \frac{T}{2}\right), \quad q_2 = \frac{2(T-t)}{T} \left(\frac{T}{2} \leq t < T\right), \quad q_2 = 0 (t \geq T) \quad (5.2)$$

Пусть W_1 и W_2 — полные энергии волновых полей $W(T)$ для движений дна (5.1), (5.2) соответственно. Интеграл (2.7) для заданных h_0 и q_s ($s = 1, 2$) сводится к однократным

$$W_s = Pw_s(T, L), \quad w_s = \frac{16^s}{T^2} \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(Lr)}{r^2 \operatorname{sh}(2r)} \sin^{2s} \left(\frac{\omega T}{2s} \right) dr, \quad s = 1, 2 \quad (5.3)$$

Здесь $J_1(z)$ — функция Бесселя, $P = 0,5\pi L^2$ — потенциальная энергия цилиндрического поднятия жидкости, повторяющего форму деформированного участка дна бассейна.

Анализ интегралов (5.3) выполнен численно по квадратурной формуле Симпсона. Результаты расчетов представлены на фигуре, где для пересекающихся пар кривых 1—3 значения $L = 10, 2, 1$ соответственно. Введен новый безразмерный параметр $K = T/L = cT_*/L_*$, предложенный в [10] и возникающий, как правило, в задачах моделирования процессов генерации цунами внешними возмущениями конечной продолжительности.

Энергия, а поэтому и интенсивность волнового поля, в случае смещения участка дна с постоянной скоростью ($s = 1$, сплошные кривые на фигуре) монотонно убывает при увеличении как длительности T процесса генерации, так и радиуса деформируемого участка дна L [6, 7, 10, 11, 13]. При движениях дна, характеризующихся равномерным смещением участка дна на первом этапе и по-

следующим его возвратом в первоначальное положение на втором этапе генерации ($s = 2$ штриховые кривые на фигуре), существует оптимальный режим возбуждения волн. Он соответствует значению $K = K_0(L)$, при котором $w_2 = \max_T w_2(T, L)$. Важно, что $w_1 > w_2$ при $K < K_0$, но $w_1 < w_2$, если $K > K_0$. Для длинных волн ($L \gg 1$) и другого пространственного распределения смещений дна этот результат установлен в [11].

Заметим, что использование модели длинных волн приводит к завышению полной энергии волнового поля. Как следует из представленных на фигуре зависимостей, это отличие наиболее существенно для зон генерации малого диаметра.

Таким образом, при малых значениях параметра K , которые характерны для реальных условий возбуждения гравитационных волн на поверхности жидкости сейсмическими источниками [1], наиболее эффективными генераторами являются «неупругие» смещения участка дна бассейна. При относительно медленных движениях дна без остаточных деформаций эффективность подобного механизма генерации волновых движений жидкости мала. В этом случае большей эффективностью обладают «упругие» деформации дна конечной длительности, когда остаточные смещения донной поверхности отсутствуют. Любые достаточно медленные и продолжительные движения дна малоэффективны, с точки зрения генерации волн, если безразмерный параметр K достаточно велик.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мурти Т.С. Сейсмические морские волны-цунами. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 447 с.
2. Газарян Ю. Л. О поверхностных волнах в океане, возбуждаемых подводными землетрясениями//Акуст. ж. 1955. Т. 1. Вып. 3. С. 203—217.
3. Kajiura K. The leading wave of a tsunami//Bull. Earthq. Res. Inst., Tokyo Univ. 1963. V. 41. № 3. P. 535—571.
4. Driessche P. van den, Braddock R. D. On the elliptic generating region of a tsunami//J. Marine Res. 1972. V. 30. № 2. P. 217—226.
5. Войт С. С., Лебедев А. Н., Себекин Б. И. О формировании направленной волны цунами в очаге возбуждения//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1981. Т. 17. № 3. С. 296—304.
6. Доценко С. Ф., Сергеевский Б. Ю., Черкесов Л. В. Генерация пространственных волн цунами подвижками дна конечной продолжительности//Исследования цунами. М.: 1987. № 2. С. 27—34.
7. Селезов И. Т., Сидорчук В. Н., Яковлев В. В. Трансформация волн в прибрежной зоне шельфа. Киев: Наук. думка, 1983. 207 с.
8. Lee J. J., Chang J. J. Nearfield tsunamis generated by three dimensional bed motions//22nd Coastal Eng. Conf.: Proc. Int. Conf., Delft, 1990. V. 1. P. 1172—1185.
9. Hammack J. L. A note on tsunamis: their generation and propagation in an ocean of uniform depth// J. Fluid Mech. 1973. V. 60. Pt 4. P. 769—799.
10. Kajiura K. Tsunami source, energy and the directivity of wave radiation//Bull. Earthq. Res. Inst., Tokyo Univ. 1970. V. 48. № 5. P. 835—869.
11. Доценко С. Ф., Соловьёв С. Л. Сравнительный анализ возбуждения цунами «поршневыми» и «мембранными» подвижками дна//Исследования цунами. М.: 1990. № 4. С. 21—27.
12. Hwang L.-S., Divoky D. Tsunami generation//J. Geophys. Res. 1970. V. 75. № 33. P. 6802—6817.
13. Марчук А. Г., Чубаров Л. Б., Шокин Ю. И. Численное моделирование волн цунами. Новосибирск: Наука, 1983. 175 с.
14. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.