

УДК 532.59 + 539.3

© 1996 г. А. Е. БУКАТОВ, Д. Д. ЗАВЬЯЛОВ

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ НАЛИЧИИ РАЗЛОМА В ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ

Выполнен анализ влияния разлома ледяного поля на распространение поверхностных изгибно-гравитационных волн в бассейне конечной глубины. Ледяной покров моделируется двумя плавающими полубесконечными частями тонкой упругой изотропной пластинки. В качестве гранично-контактных условий на линии контакта между частями пластинки рассмотрены условия непрерывности смещений при произвольности наклонов, моделирующие налегание льдин одной на другую и условия свободного края (трещина). Исследована зависимость амплитудных характеристик возмущений от толщины льда, степени его сжатия, частоты набегающей волны, глубины бассейна, а также от вида гранично-контактных условий.

Решению задач о дифракции волн на неоднородностях упругой пластины посвящены работы [1, 2], а на трещине в ледяном покрове — работы [3, 4].

1. Пусть поверхность бассейна постоянной конечной глубины H покрыта льдом толщиной h . Моделируя ледяной покров двумя плавающими полубесконечными частями тонкой упругой изотропной пластинки, рассмотрим влияние разлома льда на поверхностные изгибно-гравитационные волны, распространяющиеся по нормали к линии контакта льдин. Движение жидкости будем считать потенциальным. Выберем начало координат на дне бассейна, направив ось z вертикально вверх. Потенциалы скорости движения жидкости в областях слева ($x < 0$) и справа ($x > 0$) от вертикальной оси обозначим через $\Phi_1(x, z, t) = \varphi_1(x, z)e^{i\omega t}$ и $\Phi_2(x, z, t) = \varphi_2(x, z)e^{i\omega t}$. Здесь ω — заданная частота падающей из области $x < 0$ волны. Рассмотрим зависимость амплитудных характеристик возмущений от толщины льда, степени его сжатия, частоты набегающей волны, глубины бассейна, а также от вида гранично-контактных условий.

В выбранной системе координат задача сводится к решению уравнений Лапласа

$$\Delta \varphi_j = 0 \quad (1.1)$$

с граничными условиями на поверхности бассейна ($z = H, x \neq 0$)

$$D \frac{\partial^5 \varphi_j}{\partial z \partial x^4} - Q \frac{\partial^3 \varphi_j}{\partial z \partial x^2} + (1 - \kappa \omega^2) \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \varphi_j = 0 \quad (1.2)$$

и на дне ($z = 0$)

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12\rho g(1-\nu^2)}, \quad \kappa = \frac{\rho_l h}{\rho g}, \quad Q = \frac{Q_1}{\rho g}, \quad j = \begin{cases} 1, & -\infty < x < 0 \\ 2, & 0 < x < +\infty \end{cases}$$

где E, h, ρ, ν — модуль нормальной упругости, толщина, плотность, коэффициент Пуассона льда, Q_1 — сжимающее усилие, ρ — плотность воды. Кроме того, на

границе контакта областей ($0 < z < H, x = 0$) удовлетворим условиям непрерывности потенциалов и скоростей горизонтальных волновых течений

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \quad (1.4)$$

а на стыке льдин ($z = H, x = 0$) — условиям непрерывности вертикальных смещений (ξ) и произвольности наклонов

$$\xi_1 = \xi_2, \quad \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z \partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial z \partial x^3} = \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial z \partial x^3} \quad (1.5)$$

Рассмотрение задачи при таких условиях может дать некоторое представление о прохождении изгибно-гравитационных волн через место налегания двух льдин одной на другую [3].

Применяя метод разделения переменных к (1.1) — (1.3), получим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \frac{(Dr^4 - Qr^2 + 1)rg \operatorname{th}(rH)}{1 + \kappa rg \operatorname{th}(rH)} \quad (1.6)$$

связывающее фазовые характеристики волновых возмущений. Решением уравнения (1.6) в каждой из областей $x < 0$ и $x > 0$ являются два действительных $\pm r$, две пары комплексно-сопряженных $\beta \pm i\alpha$, $-\beta \pm i\alpha$ и счетное множество мнимых $\pm ir_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ корней. Учитывая ограниченность потенциалов φ_1 при $x \rightarrow -\infty$, φ_2 при $x \rightarrow \infty$ и отсутствие набегающей на разлом незатухающей волны из области $x > 0$, запишем

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & Ie^{-bx} \operatorname{ch}(rz) + R^{\circ} e^{bx} \operatorname{ch}(rz) + R_1 e^{(\alpha+i\beta)x} \cos[(\alpha+i\beta)z] + \\ & + R_2 e^{(\alpha-i\beta)x} \cos[(\alpha-i\beta)z] + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-r_n x} \cos(r_n z) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & T^{\circ} e^{-bx} \operatorname{ch}(rz) + T_1 e^{-(\alpha+i\beta)x} \cos[(\alpha+i\beta)z] + \\ & + T_2 e^{-(\alpha-i\beta)x} \cos[(\alpha-i\beta)z] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-r_n x} \cos(r_n z) \end{aligned} \quad (1.8)$$

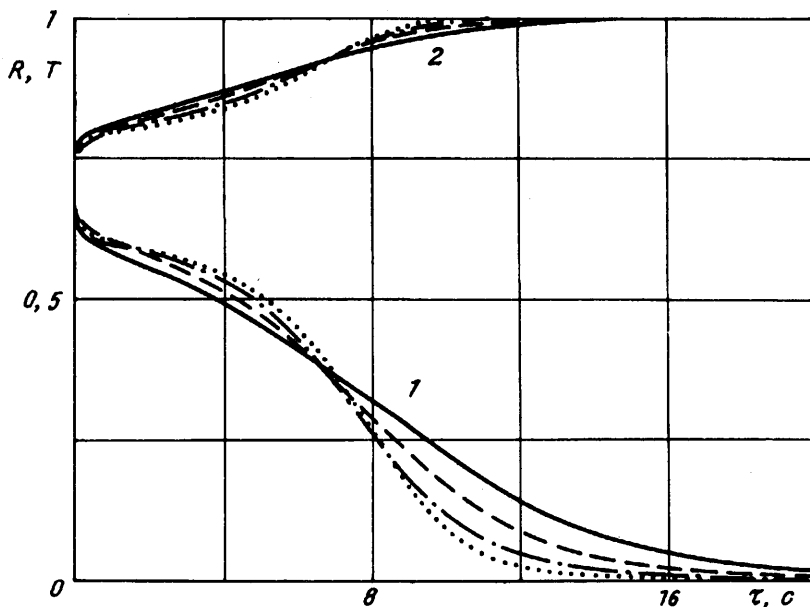
Все амплитудные коэффициенты потенциалов φ_1, φ_2 — комплексные. Из них I, R°, T° представляют падающую, отраженную и прошедшую незатухающие прогрессивные волны, характеризуемые корнями дисперсионного уравнения $-r, r$ и $-r$ соответственно. Коэффициенты $R_{1,2}$ и $T_{1,2}$ отвечают затухающим прогрессивным волнам, обусловленным изгибной жесткостью льда. Их определяют корни $\pm\beta - i\alpha$ и $\pm\beta + i\alpha$ уравнения (1.6). Краевые волны [5], существующие по обе стороны от разлома и экспоненциально затухающие с удалением от него, представлены корнями ir_n уравнения (1.6) и коэффициентами A_n, B_n в областях $x < 0$ и $x > 0$ соответственно.

Представив задачу удовлетворения условий (1.4), (1.5) как вариационную [6], произведем минимизацию функционала

$$c^* (\delta Q_p + \mu Q_d + \gamma Q_e + \eta K) c - 2\eta v^* c \quad (1.9)$$

осуществив тем самым сшивку потенциалов и скоростей горизонтальных волновых течений на границе контакта областей ($x = 0$) по всей глубине бассейна при налегании на место налегания льдин прогрессивной волны единичной амплитуды.

Здесь c — вектор-столбец реальных и мнимых частей искомых амплитудных коэффициентов потенциалов (1.7), (1.8), матрицы Q_p, Q_d и Q_e характеризуют соответственно невязки при склейке потенциалов, их производных и при выполнении условий налегания ледяных пластин, v — вектор, элементы которого



Фиг. 1

расставлены так, что амплитуде I соответствует единица, а остальным коэффициентам — нули, K — квадратичная матрица, для которой $Kc = v$; $\delta, \mu, \gamma, \eta$ — неизвестные множители Лагранжа. Символ * означает транспонирование. Определив вектор c , получим потенциалы скорости (1.7), (1.8) волновых возмущений в областях бассейна по обе стороны от разлома. Из кинематических условий $\partial \xi_j / \partial t = \partial \varphi_j / \partial z$ найдем возвышения изгиба льда ξ_j .

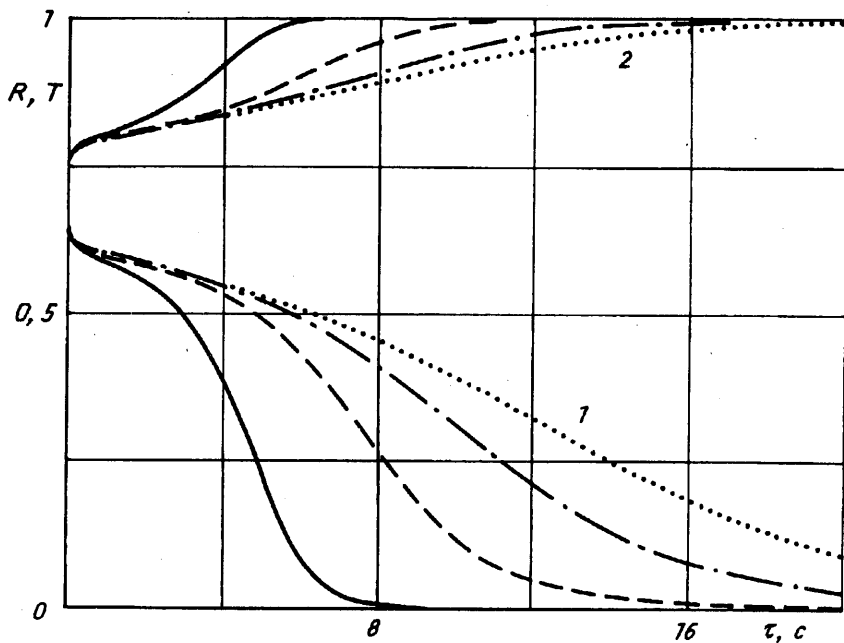
2. Численная реализация задачи осуществлялась методом сопряженных градиентов [7, 8]. Количество n суммируемых краевых затухающих мод в (1.7), (1.8) выбиралось из условия удовлетворения заданной точности соблюдения баланса плотности потоков энергии через замкнутую поверхность, ограничивающую выделенный объем жидкости. Объем ограничен частью поверхности бассейна, участком непроницаемого дна и вертикальными границами, равноудаленными от места налегания льдин ($x = 0$). Расчеты проводились для значений $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м²; $\nu = 0,33$; $\rho_l = 870$ кг/м³; плотность воды полагалась равной $\rho = 1025$ кг/м³.

Полученные распределения амплитудных коэффициентов отражения R и прохождения T , отнесенных к амплитуде падающей волны, по периоду колебаний τ , представлены соответственно кривыми 1 и 2 на фиг. 1—3, б.

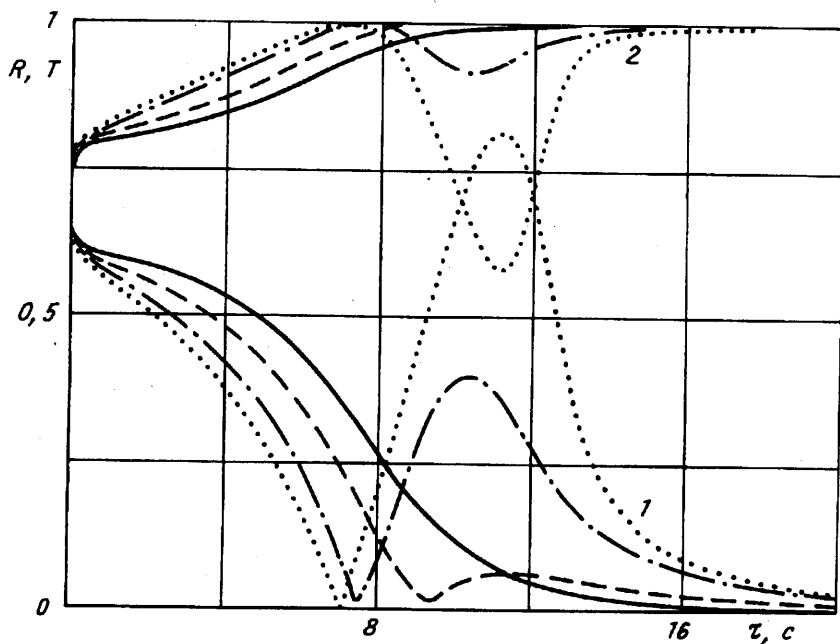
Влияние глубины бассейна, толщины льда и ледового сжатия на распределение R и T по τ характеризуют графики на фиг. 1—3. Сплошные, штриховые, штрихпунктирные и пунктирные кривые на этих фигурах отвечают значениям глубины бассейна 10; 15; 25; 50 м при $h = 1$ м; $Q = 0$ (фиг. 1), толщины льда 0,25; 1; 2; 3 м при $H = 25$ м; $Q = 0$ (фиг. 2) и сжимающего усилия 0; $0,5\sqrt{D}$; \sqrt{D} ; $1,3\sqrt{D}$ при $h = 1$ м; $H = 25$ м (фиг. 3).

Анализ представленных результатов свидетельствует о существовании диапазонов изменения τ с противоположным влиянием роста глубины бассейна на амплитудные коэффициенты (фиг. 1). В одном из них (меньшие периоды) R растет (T убывает), а в другом (большие периоды) R убывает (T растет) при увеличении H . Причем коэффициент прохождения менее чувствителен к изменению глубины бассейна, чем коэффициент отражения.

Прохождение волн через место налегания льдин уменьшается, а отражение увеличивается с ростом толщины льда (фиг. 2). Ледовое сжатие вносит не только

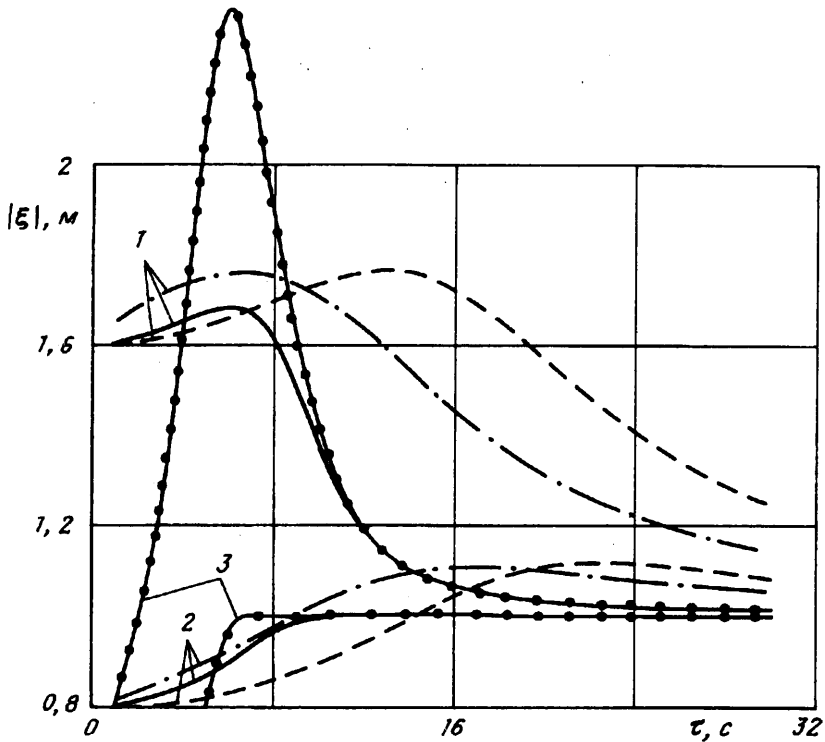


Фиг. 2



Фиг. 3

количественные, но и качественные изменения в распределения амплитудных коэффициентов по периоду набегающей волны (фиг. 3). В условиях сжатия нарушается монотонность функций $R(\tau)$, $T(\tau)$. На графиках в области средних периодов появляются точки локальных экстремумов. Один из них соответствует верхней границе интервала периодов, в котором сжатие усиливает эффект прохождения волн через место наползания льдин друг на друга. С увеличением



Фиг. 4

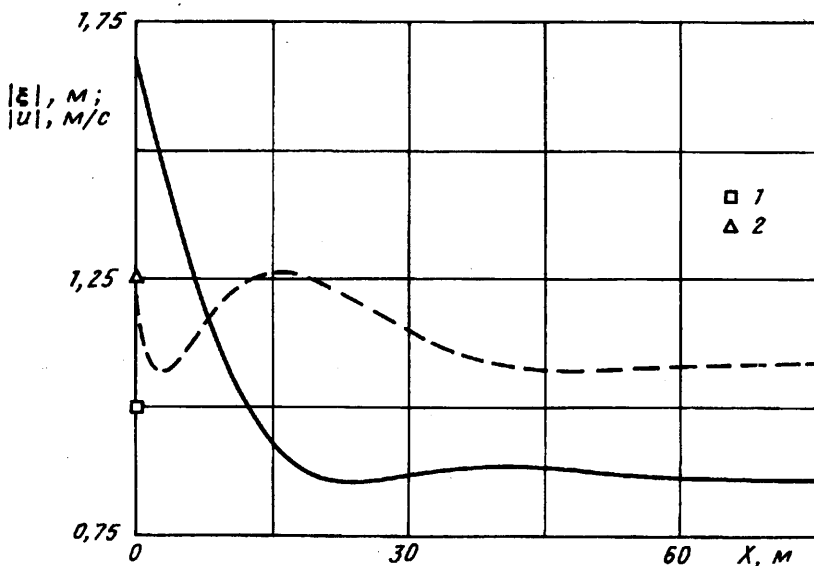
ледового сжатия период максимального (практически полного) прохождения смещается в сторону меньших значений. Другой экстремум характеризует обусловленное сжатием усиление отражательной способности в расширяющемся с увеличением Q интервале периодов.

Отметим, что оценка отражательной и пропускной способностей разлома без учета краевых быстрозатухающих с расстоянием волн может привести к значительным погрешностям, особенно ярко проявляющимся в занижении коэффициента отражения и завышении коэффициента прохождения для набегающих волн малых и средних периодов.

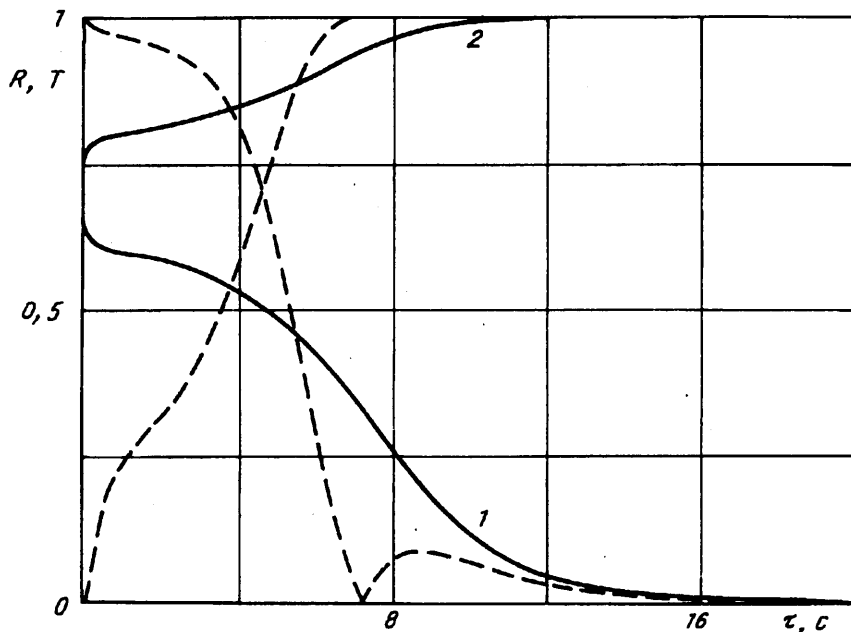
Распределения модуля амплитуды вертикального смещения льдин в месте их налегания друг на друга по периоду набегающей волны, приведены на фиг. 4 кривыми 1. Из них сплошная, штриховая и штрихпунктирная отвечают значениям глубины бассейна и толщины льда, равным $H = 75$ м, $h = 1$ м; $H = 75$ м, $h = 5$ м; $H = 10$ м, $h = 1$ м. Аналогичные распределения модуля амплитуды изгиба льда на удалении 400 м от линии контакта льдин даны там же кривыми 2. Видно, что набегающие волны одинаковой амплитуды в зависимости от их периода вызывают разные по величине вертикальные смещения как вдоль линии контакта льдин, так и на удалении от нее.

Величина периода τ_* максимального отклика льда слабо зависит от глубины бассейна и определяется главным образом характеристиками ледяной пластины. С ростом толщины льда значение τ_* увеличивается. Полоса периодов набегающих волн, вызывающих при одинаковой амплитуде падения близкое к максимуму вертикальное смещение льда, расширяется с уменьшением H (увеличением h). С удалением от места налегания льдин величина τ_* смещается в сторону больших периодов.

Характер распределений модулей амплитуд вертикального смещения $|\xi|$ льда и горизонтальной скорости волновых течений $|u|$ под ним по расстоянию от



Фиг. 5



Фиг. 6

линии контакта льдин, иллюстрируют графики на фиг. 5, изображенные сплошными и штриховыми кривыми соответственно при значениях $H = 75$ м; $h = 1$ м, $\tau = 5$ с. На вертикальной оси точкой 1 обозначена величина модуля амплитуды падения волны, а точкой 2 — величина модуля скорости обусловленных ею горизонтальных течений. Эти распределения указывают на существование примыкающей к линии контакта зоны наибольших изменений волновых характеристик генерируемых возмущений. Ширина зоны зависит от параметров набегающей волны, глубины бассейна и ледовых условий.

3. Проведем теперь сопоставление результатов, соответствующих выполнению условий налегания льдин (1.5), с полученными для условий свободного края

$$\frac{\partial^3 \varphi_l}{\partial z \partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 \varphi_l}{\partial z \partial x^3} = 0, \quad z = H, \quad x = 0 \quad (3.1)$$

моделирующих трещину в ледовом покрове.

Распределение амплитудных коэффициентов по τ при $H = 25$ м и $h = 1$ м даны для $Q = 0$ на фиг. 6. Сплошные и штриховые кривые соответствуют условиям (1.5) и (3.1). Сопоставление графиков показывает, что волны малых периодов эффективнее проходят через место налегания льдин, чем через трещину. Однако на интервале средних периодов имеет место обратное явление. Кроме того, при отсутствии сжатия выполнение условий налегания льдин исключает возможность полного прохождения волны среднего периода, существующей в условиях трещины. Полное прохождение таких волн возможно через место налегания льдин, но только в условиях ледового сжатия. Для трещины в этом случае практически полное прохождение волн наблюдается на двух различных периодах из области средних значений.

На периодах, превышающих период полного прохождения, выполнение условий налегания льдин приводит к усилению отражения и ослаблению прохождения волн по сравнению со случаем их распространения через трещину. Вблизи трещины и места налегания льдин ($x = +0$) при одинаковых значениях исходных параметров величины τ_* близки между собой. Однако для условий трещины максимум функции $|\xi(\tau)|$ выражен ярче, а величина модуля амплитуды вертикальных смещений льда справа от трещины ($x = +0$) существенно превышает модуль амплитуды смещения льдин на линии их налегания. Это видно из сопоставления графиков, изображенных на фиг. 4 кривыми 3 с центральными символами (для условий трещины) и сплошными кривыми 1, 2 (для условий налегания льдин) при $H = 75$ м, $h = 1$ м. Изменение величины τ_* с удалением от кромки льда ($x > 0$) в условиях трещины менее значительно, чем с удалением от линии контакта при налегании льдин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красильников В. Н. Рассеяние изгибных волн на неоднородностях упругой пластины // Акуст. журн. 1962. Т. 8. Вып. 2. С. 183—188.
2. Слепян Л. И., Фадеев В. М. Отражение, преломление и излучение волн в кусочно-однородной упругой системе, взаимодействующей с жидкостью // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 2. С. 325—329.
3. Красильников В. Н. О решении некоторых гранично-контактных задач линейной гидродинамики // ПММ. 1967. Т. 25. Вып. 4. С. 764—768.
4. Марченко А. В. Дифракция поверхностных волн на трещине в ледяном покрове // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 2. С. 93—102.
5. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
6. Fox C., Squire V. A. Reflection and transmission characteristics at the edge of shore fast sea ice // J. Geophys. Res. 1990. V. 95. № C7. P. 11629—11639.
7. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991. 365 с.
8. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. М.: Мир, 1986. 446 с.

Севастополь

Поступила в редакцию
17.11.1995