

УДК 532.546.013.3:536.423

© 1996 г. О. Ю. ДИНАРИЕВ

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ГАЗОКОНДЕНСАТНОЙ СМЕСИ

Рассмотрена плоская задача о стационарном двухфазном фильтрационном течении многокомпонентной смеси с фазовыми переходами. Показано, что система уравнений двухфазной многокомпонентной фильтрации вместе с уравнениями фазового равновесия может быть решена в квадратурах, если известно решение двух вспомогательных задач: задачи конформного отображения окрестности скважины на прямоугольник и чисто физико-химической задачи описания механических и термодинамических свойств смеси. При некоторых предположениях относительно свойств смеси указаны решения для вертикальной скважины с экраном и для горизонтальной скважины в конечном продуктивном слое.

В начале разработки газоконденсатного месторождения пластовая смесь обычно находится в термодинамически устойчивой газовой фазе. При снижении пластового давления в результате отбора газа однофазное состояние становится термодинамически неустойчивым, и появляется жидкая фаза — конденсат. Это явление называется ретроградной конденсацией [1]. Вдали от эксплуатационных скважин выпавший конденсат занимает незначительный объем порового пространства коллекторов (ниже порога подвижности жидкой фазы). Только вблизи эксплуатационных скважин конденсат заполняет большую часть порового пространства и приобретает подвижность. Поскольку вязкость жидкой фазы значительно превышает вязкость газа, ретроградная конденсация может сильно уменьшить дебит скважины при неизменной депрессии. Этим обусловлена важность прогноза условий работы скважины на основе теории фильтрации.

В [2—4] был предложен метод получения точного решения цилиндрически-симметричной стационарной изотермической задачи фильтрации многокомпонентной двухфазной смеси с фазовыми переходами. В настоящей работе этот метод с помощью теории конформных отображений распространен на случай произвольной плоской задачи.

1. Пусть имеется стационарное плоское течение многокомпонентной смеси в однородной изотропной пористой среде с проницаемостью k . Будем считать процесс изотермическим, и пусть T — соответствующая температура. Свяжем с пористой средой декартову систему координат x^a . Будем использовать также криволинейные системы координат y^α . Положим, что греческие индексы α, β пробегают значения 1, 2, соответствуя координатам, а римские индексы i, j пробегают значения 1, ..., N , где N — число компонентов смеси. По повторяющимся греческим индексам α, β и производится суммирование.

В криволинейной системе координат нужно использовать метрическую форму

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta \quad (1.1)$$

и соответствующую ковариантную производную ∇_α [5]. Метрика (1.1) связана с декартовой метрикой преобразованием

$$g_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} = \delta_{ij} \quad (1.2)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

Система дифференциальных уравнений стационарной многокомпонентной двухфазной фильтрации [6] представляет собой набор законов сохранения потоков компонентов

$$\nabla_{\alpha} J_i^{\alpha} = 0, \quad J_{k\alpha} = -K_i \nabla_{\alpha} p \quad (1.3)$$

$$K_i = kA_g c_{ig} + kA_c c_{ic}, \quad A_g = \frac{f_g n_g}{\mu_g}, \quad A_c = \frac{f_c n_c}{\mu_c}$$

Здесь c_{ig} и c_{ic} — мольная концентрация i -го компонента в газе и жидкости (конденсате) соответственно, n_g, μ_g и n_c, μ_c — мольная плотность и сдвиговая вязкость газовой и жидкой фазы соответственно, f_g и f_c — фазовые проницаемости для газа и жидкости, которые являются функциями насыщенности s порового пространства жидкой фазой, p — давление. Капиллярными и гравитационными силами пренебрегаем. Напомним, что поскольку сумма концентраций в каждой фазе равна единице, то лишь $(N - 1)$ величин из каждого набора концентраций можно считать независимыми.

Будем считать известными выражения для f_g и f_c в зависимости от s , выражения для вязкостей $\mu_g = \mu_g(T, n_g, c_{ig}), \mu_c = \mu_c(T, n_c, c_{ic})$. Задача состоит в определении $(2N + 1)$ неизвестной функции $n_g, n_c, c_{ig}, c_{ic}, s$. Задача становится замкнутой, если к уравнениям (1.3) добавить уравнения состояния и уравнения фазового равновесия

$$p = p(T, n_g, c_{ig}) = p(T, n_c, c_{ic}) \quad (1.4)$$

$$\chi_i(T, n_g, c_{ig}) = \chi_i(T, n_c, c_{ic}) \quad (1.5)$$

где χ_i — химические потенциалы.

Введем криволинейную систему координат таким образом, что одна координата — давление p , а другая координата ψ изменяется от 0 до 2π и постоянна на линии тока. При этом все поля будут предполагаться периодичными по ψ с периодом 2π . Очевидно, что координата ψ аналогична угловой координате, отсчитываемой вокруг эксплуатационной скважины. Перечисленные условия на координату ψ определяют ее с точностью до произвольного диффеоморфизма единичной окружности на себя.

В новой системе координат p, ψ метрика имеет вид

$$ds^2 = P^2 dp^2 + \Psi^2 d\psi^2 \quad (1.6)$$

где P, Ψ — некоторые положительные функции. Тензор кривизны Римана, соответствующий метрике (1.6), имеет только одну независимую компоненту

$$R_{p\psi p\psi} = PP_{,\psi\psi} + \Psi\Psi_{,pp} - P^{-1}\Psi P_{,p}\Psi_{,p} - P\Psi^{-1}\Psi_{,\psi}P_{,\psi} \quad (1.7)$$

Здесь и далее символ вида $f_{,\sigma}$ обозначает производную от функции f по соответствующей переменной.

Необходимое и достаточное условие существования преобразования (1.2) от метрики (1.6) к декартовой метрике есть обращение в нуль тензора Римана [7]: $R_{p\psi p\psi} = 0$.

В тензорном анализе для произвольного векторного поля A^{α} справедливо тождество [5]

$$\nabla_{\alpha} A^{\alpha} = g^{-1/2} (g^{1/2} A^{\alpha})_{,\alpha}, \quad g = \det(g_{\alpha\beta}) \quad (1.8)$$

Применяя (1.8) к уравнениям (1.3), получаем систему уравнений $(\Psi P^{-1} K_i)_{,p} = 0$, которая легко интегрируется

$$\Psi P^{-1} K_i = C_i(\psi) \quad (1.9)$$

Чтобы определить вид функций $C_i(\psi)$, рассмотрим граничные условия. Поскольку представляет интерес описание фильтрации в окрестности эксплуатационной скважины, имеет смысл решать задачу внутри некоторого контура питания C_D . На контуре C_D давление равно пластовому давлению p_0 , и жидкая фаза, если она есть, находится в состоянии ниже порога подвижности, поэтому из (1.9) получаем

$$C_i(\psi) = B(\psi) c_{i0} \quad (1.10)$$

$$B(\psi) = kf_s(s_0) \frac{n_{s0}}{\mu_{s0}} \left(\frac{\Psi}{P} \right) \Big|_{C_D}$$

Здесь c_{i0} — состав подвижной (газовой) фазы в пласте, n_{s0} и μ_{s0} — мольная плотность и сдвиговая вязкость этой фазы при давлении p_0 , s_0 — доля порового пространства в пласте, занятого конденсатом. Далее будем обозначать p_d — давление начала конденсации для смеси с составом c_{i0} . Если $s_0 > 0$, то $p_d = p_0$.

Введем обозначения:

$$Q = \int_0^{2\pi} B(\psi) d\psi, \quad b(\psi) = 2\pi \frac{B(\psi)}{Q}$$

Используя свободу в определении координаты ψ , положим $b(\psi) = 1$. Как легко видеть, величина Q не зависит от определения ψ и равна дебиту скважины на единицу длины продуктивной мощности, выраженному в молях. Теперь, объединяя (1.9) и (1.10), получаем

$$\frac{\Psi}{P} k (A_g c_{ig} + A_c c_{ic}) = \frac{Q}{2\pi} c_{i0} \quad (1.11)$$

Уравнения (1.11) можно интерпретировать как условия, связывающие состав c_{ig} газовой фазы и состав c_{ic} жидкой фазы со средним составом c_{i0} в системе, в которой газовая и жидкая фаза сосуществует в термодинамическом равновесии при давлении $p \leq p_0$. Пусть W — мольная доля жидкой фазы в этой системе

$$(1 - W) c_{ig} + W c_{ic} = c_{i0} \quad (1.12)$$

Так как правые части в уравнениях (1.12) — константы, то W является некоторой функцией давления p : $W = W(p)$. Эту функцию можно в принципе определить, если решить уравнения (1.12) совместно с (1.5) или если провести лабораторные исследования по контактной конденсации смеси состава c_{i0} . Точно так же можно определить как функции давления p величины c_{ig} , c_{ic} , n_g , μ_g , n_c , μ_c .

Сравнивая соотношения (1.11) и (1.12), выводим уравнение для определения насыщенности s

$$(1 - W) A_c - W A_g = 0 \quad (1.13)$$

Если $W = 0$, а жидкая фаза имеет ненулевой порог подвижности s_c , то решение (1.13) относительно насыщенности s не единственное. Легко видеть, что тогда в области давлений $p_d < p \leq p_0$ можно задать любое распределение $s \leq s_c$. С другой стороны, при $0 < W < 1$ уравнение (1.13) имеет единственное решение относительно s , которое выше порога подвижности s_c .

Если в последнем случае устремить отношение $\varepsilon = \mu_g/\mu_c$ к нулю, оставив все остальные характеристики газа и конденсата, входящие в уравнение (1.13), конечными, то насыщенность s будет стремиться к порогу подвижности для газовой фазы s_g . Это объясняет тот факт, что очень вязкий конденсат заполняет почти все пороговое пространство вблизи скважины.

Пусть теперь все величины n_s, n_c, c_w, c_k, s определены как функции давления на интервале $p_w \leq p \leq p_0$, где p_w — давление на забое скважины. Тогда из уравнений (1.11), (1.12) можно определить функции давления h, ζ, λ

$$h = 2\pi \frac{A_s}{1 - W} = \frac{QP}{k\Psi}$$

$$\zeta = \zeta(p, p_w) = \int_{p_w}^p h(p) dp, \quad \lambda = \frac{k\zeta}{Q}$$

На контуре C_D величины ζ, λ принимают значения

$$\zeta_0 = \zeta(p_0, p_w), \quad \lambda_0 = \frac{k\zeta_0}{Q}$$

В координатах λ, ψ метрика (1.6) приобретает конформно плоский вид

$$ds^2 = \Psi^2 (d\lambda^2 + d\psi^2) \quad (1.14)$$

При подстановке (1.14) в выражение (1.7) уравнение $R_{r\psi r\psi} = 0$ приобретает вид

$$\Psi\Psi_{,\lambda\lambda} + \Psi\Psi_{,\psi\psi} - \Psi_{,\lambda}^2 - \Psi_{,\psi}^2 = 0 \quad (1.15)$$

Теперь задача фильтрации свелась к поиску решения уравнения (1.15), а затем к поиску преобразования (1.2). Обе эти задачи оказываются решенными автоматически, если известно конформное преобразование, отображающее область фильтрации на прямоугольник $\Omega(\lambda_0)$: $0 \leq \lambda \leq \lambda_0, 0 \leq \psi \leq 2\pi$, в котором стороны $\psi = 0$ и $\psi = 2\pi$ отождествлены

$$\lambda + i\psi = F(z), \quad z = x^1 + ix^2 \quad (1.16)$$

Область фильтрации D имеет топологию кольца (часть плоскости вне границы пробуренного отверстия C_w и внутри C_D). Поэтому при неограниченных предположениях о гладкости кривых C_w и C_D отображение (1.16) существует [8]. При этом фактическое значение параметра λ_0 определяется строением области D , точнее, расположением контура C_D , поэтому получается функциональная связь между забойным давлением p_w , пластовым давлением p_0 , дебитом Q и проницаемостью k

$$\frac{k\zeta(p_0, p_w)}{Q} = \lambda_0 \quad (1.17)$$

Итак, показано, что если известен явный вид конформного преобразования F , а также выражения для механических и термодинамических характеристик смеси, то можно найти решение задачи фильтрации в форме интегральных формул.

2. Рассмотрим теперь приложения к частным задачам. Будем использовать обозначения: $\ln_-(z)$ — логарифмическая функция с разрезом вдоль луча $\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \leq 0$; $\ln_+(z)$ — логарифмическая функция с разрезом вдоль луча $\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \geq 0$.

Пусть вблизи вертикальной скважины имеется плоский экран. Выберем декартову систему координат таким образом, что расположение экрана описывается уравнением $x^2 = 0$, а эксплуатационная скважина имеет координаты $x^1 = 0, x^2 = L_1 > 0$. Пусть r_w — радиус скважины по долоту. Будем рассматривать только такие случаи, когда $r_w \ll L_1$.

Для действительного параметра a ($a \neq -r_w$) определим аналитические функции переменной z

$$G(z; a) = \ln_- \xi, \quad H(z; a) = \ln_+ \xi$$

$$\xi = \frac{z - (L_1 - a) i}{r_w + a}$$

Рассмотрим конформное отображение полуплоскости $D_1 = \{x^2 \geq 0\}$

$$F(z) = G(z; 0) + G(z; -2L_1) \quad (2.1)$$

В полуплоскости D_1 кривая, задаваемая уравнением $\operatorname{Re} F(z) = 0$, с точностью до отклонений порядка $(r_w L_1^{-1})$ совпадает с окружностью $|z - L_1 i| = r_w$. Так как форма реальных скважин не совпадает с идеальной окружностью, при выполнении условия $r_w \ll L_1$, можно считать, что уравнение $\operatorname{Re} F(z) = 0$ представляет собой контур отверстия скважины C_w . Как легко проверить, берега разреза вдоль отрезка $x^1 = 0$, $0 \leq x^2 \leq L_1$, а также линия экрана $x^2 = 0$ отображаются на прямые $\operatorname{Im} F = 0$ и $\operatorname{Im} F = 2\pi$. Таким образом, область D , получаемая исключением из области D_1 внутренности контура C_w , отображается на прямоугольник $\Omega (+\infty)$.

Будем далее использовать в качестве единицы длины величину r_w . На фиг. 1 представлена картина линий тока и изобар, которая, согласно результатам разд. 1, не зависит от свойств смеси, для $L_1 = 200$.

Представляет интерес исследовать индикаторные кривые (т. е. связь депрессия — дебит) в зависимости от расстояния до экрана L_1 . Для этого нужно фиксировать изобару C_D , на которой задано пластовое давление p_0 , или, что эквивалентно, задать значение λ_0 в формуле (1.17).

Определим функцию $R_D = R_D(\lambda)$ как минимальное расстояние от соответствующей изобары до скважины и будем определять изобары по значению R_D .

Для проведения расчетов примем следующие допущения [2—4]:

$$W = a_1 p + \frac{a_2}{p - a_3} \quad (2.2)$$

$$p = ZRTn_g, \quad n_c = n_0 = \text{const}, \quad \mu_g = \text{const}, \quad \mu_c = \text{const}$$

где a_1, a_2, a_3 — положительные величины, зависящие от T и c_{00} , Z — константа, называемая коэффициентом сверхсжимаемости, R — газовая постоянная. Величины a_1, a_2, a_3 можно найти, если известно давление p_* , при котором W принимает максимальное значение W_* . Три уравнения для определения величин a_1, a_2, a_3

$$W(p_d) = 0, \quad W(p_*) = W_*, \quad \frac{dW}{dp}(p_*) = 0$$

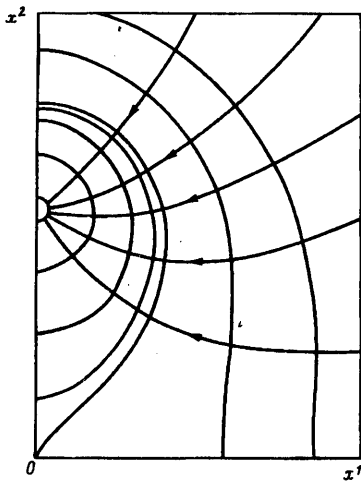
имеют два набора решений при $p_*/p_d > 0,75$. Наилучшая аппроксимация достигается для решения с меньшим параметром a_3 . Условие $p_*/p_d > 0,75$ хорошо выполняется для природных смесей.

Для фазовых проницаемостей примем выражения, используемые в практике расчетов по газоконденсатным месторождениям

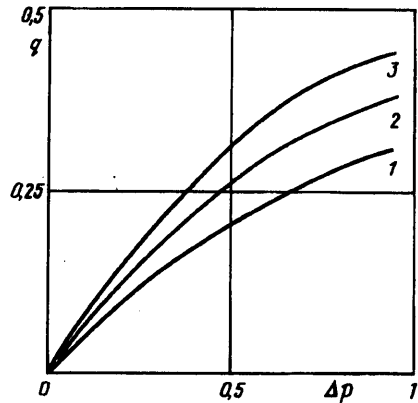
$$f_g(s) = \exp(-8s^3) \quad (2.3)$$

$$f_c(s) = \begin{cases} \min [1, ((s - 0,15)^3 0,85^{-3} (1 + 0,24s))], & s > 0,15 \\ 0, & s \leq 0,15 \end{cases} \quad (2.4)$$

Ограничим систему единиц измерения условиями: $p_d = 1$, $\mu_g = 1$. Чтобы избежать неоднозначности решения, примем, что при $W = 0$ имеет место равенство



Фиг. 1. Картина линий тока и изобар при фильтрации газоконденсатной смеси в случае $L_1/r_w = 200$



Фиг. 2. Зависимость дебита от депрессии для разных значений расстояния от скважины до экрана: кривая 1 — $L_1 = 10r_w$, 2 — $L_1 = 100r_w$, 3 — $L_1 = 300r_w$

$s = 0$. При выполнении условий (2.2) — (2.4) и заданном параметре λ_0 уравнение (1.17) задает функциональную зависимость величины $q = RTQk^{-1}$ от величин

$$p_0, p_w, p_*, \beta = RTn_0, \varepsilon = \mu_l^{-1}, Z$$

Несложно реализовать соответствующий алгоритм расчета. На фиг. 2 представлены кривые, характеризующие зависимость q от депрессии $\Delta p = p_0 - p_w$ для разных расстояний до экрана. Свободные параметры были фиксированы следующим образом:

$$p_0 = 1,05; p_* = 0,8; \beta = 0,3; \varepsilon = 0,02; R_D = 500$$

$$Z = 1,1; W_* = 0,06$$

Кривым на фиг. 2 соответствуют следующие значения расстояния от скважины до экрана: $L_1 = 10, 100, 300$.

Рассмотрим теперь горизонтальную скважину в продуктивном слое толщины L_2 . Выберем декартову систему координат таким образом, что расположение кровли и подошвы уравнениями $x^2 = L_2$ и $x^2 = 0$ соответственно, а эксплуатационная скважина имеет координаты $x^1 = 0, x^2 = L_1 > 0$. Будем рассматривать случаи, когда выполнены соотношения

$$(L_2 - L_1) \gg r_w, r_w \ll L_1 \quad (2.5)$$

Рассмотрим конформное отображение слоя $D_1 = \{0 \leq x^2 \leq L_2\}$:

$$F(z) = G(z; 0) + G(z; -2L_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (G(z; -2nL_2) + G(z; -2L_1 - 2nL_2) + H(z; 2nL_2) + H(z; -2L_1 + 2nL_2)) \quad (2.6)$$

Выражения (2.1), (2.6) получаются обычным методом отражений относительно границ из комплексного потенциала источника.

Так же, как и раньше, кривая, задаваемая уравнением $\text{Re } F(z) = 0$, в силу условий (2.5) мало отличается от окружности $|z - L_1| = r_w$ и может представлять контур отверстия скважины C_w . Область D , получаемая исключением из области

D_1 внутренности контура C_w , посредством F отображается на прямоугольник $\Omega (+\infty)$.

Аналогично случаю скважины с экраном можно, используя ряд (2.6) и соотношения (2.2)—(2.4), реализовать численный алгоритм, позволяющий прогнозировать показатели горизонтальной эксплуатационной скважины. В силу того что члены ряда (2.6) имеют порядок n^{-2} , при практических вычислениях достаточно ограничиться суммой нескольких первых членов.

Заключение. Плоская задача о стационарной фильтрации газоконденсатной смеси расщепляется на чисто геометрическую задачу конформного отображения окрестности скважины на прямоугольник и чисто физико-химическую задачу описания механических и термодинамических свойств смеси.

Первая задача решается в рамках комплексного анализа. В частности, имеются отображения, соответствующие фильтрации вблизи экрана и внутри слоя. Вторая задача не связана с фильтрацией и может решаться на основе полуэмпирических уравнений или путем проведения соответствующих лабораторных экспериментов.

Хотя в настоящей работе рассматривалась фильтрация вблизи одной скважины, очевидно, что описанный метод может применяться для нахождения стационарных решений в окрестности группы скважин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баталин О. Ю., Брусиловский А. И., Захаров М. Ю. Фазовые равновесия в системах природных углеводородов. М.: Недра, 1992. 272 с.
2. Динариев О. Ю. Ретроградная конденсация при стационарной радиальной фильтрации//Инж.-физ. журн. 1994. Т. 67. № 1—2. С. 98—102.
3. Бабейко А. Ю., Динариев О. Ю. Моделирование ретроградной конденсации при стационарной радикальной фильтрации//Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 6. С. 92—97.
4. Динариев О. Ю. Многокомпонентные стационарные фильтрационные течения с фазовыми переходами//ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 78—85.
5. Сокольников И. С. Тензорный анализ. М.: Наука, 1971. 374 с.
6. Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И. и др. Движение углеводородных смесей в пористой среде. М.: Недра, 1968. 190 с.
7. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970. 412 с.
8. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1966. 648 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.11.1995