МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1996

УДК 532.529.5+532.517.4

© 1996 г. Л. И. ЗАЙЧИК

ОБ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ СКОРОСТИ ЧАСТИЦ В НЕОДНОРОДНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Рассматривается эйлерово континуальное описание газодисперсного (двухфазного) турбулентного потока на основе метода функции плотности вероятности (ФПВ) скорости частиц. Представлен уточненный вариант кинетического уравнения для ФПВ в неоднородном турбулентном течении, построена цепочка уравнений для моментов скоростей дисперсной фазы и определено обратное влияние частиц на характеристики несущего потока.

Сложность моделирования газодисперсных турбулентных потоков связана в первую очередь с необходимостью решения двух теоретических проблем, состоящих в описании вовлечения частиц в пульсационное движение среды и характера обратного влияния дисперсной фазы на характеристики несущего потока. Основой для решения этих проблем в рамках эйлерова континуального описания дисперсной фазы, т. е. в рамках так называемых двухжидкостных моделей, может служить кинетическое уравнение для ФПВ скорости частиц. Различные варианты уравнений для ФПВ скорости и температуры частиц предложены ранее в [1—8]. В настоящей работе предлагается уточненный вариант кинетического уравнения, более аккуратно учитывающий неравномерность поля скорости несущего газового потока по сравнению с [3, 4, 7]

1. Уравнение для ФПВ. Последовательный метод построения системы уравнений для описания движения дисперсной фазы есть использование кинетического уравнения для ФПВ скорости частиц. Введение ФПВ позволяет перейти от лагранжева способа описания движения отдельных частиц к эйлерову методу моделирования дисперсной фазы в целом.

Движение одиночной частицы в газовом потоке описывается уравнениями

$$\frac{d\mathbf{R}_p}{d\tau} = \mathbf{v}_p, \quad \frac{d\mathbf{v}_p}{d\tau} = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}_p}{\tau_u} + \mathbf{F} \tag{1.1}$$

где τ — время, $\mathbf{R}_p$ и $\mathbf{v}_p$ — координата и скорость частицы, $\mathbf{u}$ — скорость несущего потока, τ_u — время динамической релаксации частицы, $\mathbf{F}$ — ускорение внешней силы.

При записи уравнений (1.1) подразумевается, что время релаксации частицы τ_u является функцией осредненной скорости частицы относительно несущего газового потока, поэтому область справедливости уравнений (1.1) не ограничена случаем применимости закона Стокса для коэффициента сопротивления, т. е. эти уравнения действительны и при больших числах Рейнольдса. Естественно, такая форма представления (1.1) предполагает линеаризацию силы межфазного сопротивления относительно флуктуаций скорости.

Выражения (1.1) представляет собой уравнения типа уравнения Ланжевена, поскольку скорость газового потока $\mathbf{u}$ рассматривается как случайный процесс.

Для того чтобы перейти от динамических стохастических уравнений (1.1) к статистическому описанию распределения частиц по скоростям, вводится динамическая плотность вероятности в фазовом пространстве координат x и скоростей v частицы

$$p_p = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p(\tau))\, \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p(\tau)) \tag{1.2}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Дифференцируя (1.2) по времени с учетом (1.1), получаем уравнение Лиувилля для динамической плотности вероятности одиночной частицы в фазовом пространстве

$$\frac{\partial p_p}{\partial \tau} + \frac{\partial v_{pk} p_p}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial v_k}\left[\left(\frac{u_k - v_{pk}}{\tau_u} + F_k\right) p_p\right] = 0 \tag{1.3}$$

В данной работе ограничимся анализом случая разреженных дисперсных систем, когда взаимодействием частиц можно пренебречь, т. е. частицы можно рассматривать как независимые. Введем динамическую плотность вероятности для ансамбля частиц

$$p = \frac{\omega}{\Omega} \sum_p p_p$$

где ω — объем частицы, Ω — рассматриваемый пространственный объем.

Осредняя (1.3) по ансамблю случайных реализаций турбулентного поля скорости газа $\mathbf{u}$, перейдем к уравнению для статистической ФПВ распределения скоростей системы частиц $P = \langle p \rangle$. Представляя в (1.3) актуальную скорость газа в виде осредненной и пульсационной составляющих $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$, с учетом соотношения $\langle v_{pk} p \rangle = v_k P$ получаем

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} + v_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial v_k}\left[\left(\frac{U_k - v_k}{\tau_u} + F_k\right) P\right] = -\frac{1}{\tau_u} \frac{\partial \langle u_k' p \rangle}{\partial v_k} \tag{1.4}$$

С целью определения коррелятора $\langle u_i' p \rangle$, входящего в (1.4), турбулентное поле скорости несущего потока моделируется гауссовым процессом с известной автокорреляционной функцией. Тогда с учетом формулы Фурутцу — Новикова [9] следует

$$\langle u_i' p \rangle = \iint \langle u_i'(\mathbf{x}, \tau)\, u_k'(\mathbf{x}_1, \tau_1) \rangle \left\langle \frac{\delta p(\mathbf{x}, \tau)}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, \tau_1)} \right\rangle d\mathbf{x}_1 d\tau_1 \tag{1.5}$$

$$\left\langle \frac{\delta p(\mathbf{x}, \tau)}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, \tau_1)} \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left\langle p(\mathbf{x}, \tau) \frac{\delta R_{pj}(\tau)}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, \tau_1)} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial v_j}\left\langle p(\mathbf{x}, \tau) \frac{\delta v_{pj}(\tau)}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, \tau_1)} \right\rangle$$

Для определения функциональных производных в (1.5) используются решения уравнений движения одиночной частицы

$$R_{pi}(\tau) = \int_0^\tau v_{pi}(\tau_1)\, d\tau_1 \tag{1.6}$$

$$v_{pi}(\tau) = \int_0^\tau \left[\frac{u_i(\mathbf{R}_p(\tau_1), \tau_1)}{\tau_u} + F_i(\mathbf{R}_p(\tau_1), \tau_1)\right] \exp\left(-\frac{\tau - \tau_1}{\tau_u}\right) d\tau_1$$

Применяя к (1.6) оператор функционального дифференцирования, получаем систему интегральных уравнений относительно функциональных производных

$$\frac{\delta R_{pi}(\tau)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, \tau_1)} = \delta_{ij}\left[1 - \exp\left(-\frac{\tau - \tau_1}{\tau_u}\right)\right] \delta(\mathbf{x}_1 - R_p(\tau_1))\, H(\tau - \tau_1) +$$

$$+\int_{\tau_1}^{\tau}\left[1-\exp\left(-\frac{\tau-\tau_2}{\tau_u}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_n}\left[u_l(\mathbf{R}_p(\tau_2),\tau_2)+\tau_u F_l(\mathbf{R}_p(\tau_2),\tau_2)\right]\times$$

$$\times\frac{\delta R_{pn}(\tau_2)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1,\tau_1)}\,d\tau_2 \tag{1.7}$$

$$\frac{\delta v_{pl}(\tau)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1,\tau_1)}=\frac{\delta_{lj}}{\tau_u}\exp\left(-\frac{\tau-\tau_1}{\tau_u}\right)\delta(\mathbf{x}_1-\mathbf{R}_p(\tau_1))\,H(\tau-\tau_1)+ \tag{1.8}$$

$$+\frac{1}{\tau_u}\int_{\tau_1}^{\tau}\exp\left(-\frac{\tau-\tau_2}{\tau_u}\right)\frac{\partial}{\partial x_n}\left[u_l(\mathbf{R}_p(\tau_2),\tau_2)+\tau_u F_l(\mathbf{R}_p(\tau_2),\tau_2)\right]\times$$

$$\times\frac{\delta R_{pn}(\tau_2)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1,\tau_1)}\,d\tau_2$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда: $H(x<0)=0$, $H(x>0)=1$.

С целью получения явных выражений для функциональных производных и соответственно для коррелятора $\langle u_l'p\rangle$ в [3, 4] все интегральные члены в (1.7) и (1.8) были исключены из рассмотрения. Однако влияние этих членов в неоднородных потоках может быть существенным. В [7] пренебрегается только интегральным членом в (1.7), а для интегрального члена в (1.8) с учетом (1.6) предлагается аппроксимация

$$\frac{1}{\tau_u}\int_{\tau_1}^{\tau}\exp\left(-\frac{\tau-\tau_2}{\tau_u}\right)\frac{\partial}{\partial x_n}\left[u_l(\mathbf{R}_p(\tau_2),\tau_2)+\tau_u F_l(\mathbf{R}_p(\tau_2),\tau_2)\right]\times$$

$$\times\frac{\delta R_{pn}(\tau_2)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1,\tau_1)}\,d\tau_2=\frac{\partial v_{pl}(\mathbf{R}_p(\tau),\tau)}{\partial x_n}\,\frac{\delta R_{pn}(\tau)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1,\tau_1)} \tag{1.9}$$

Для вычисления интегрального члена в (1.7) используем метод итераций. В качестве первого приближения, являющегося точным для однородного турбулентного потока, принимается первый член в правой части (1.7). Второй член итерационного разложения, учитывающий неоднородность течения с точностью до пространственных производных первого порядка, представляется в виде

$$\frac{\delta R_{pl}(\tau)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1,\tau_1)}=\delta_{lj}\left[1-\exp\left(-\frac{\tau-\tau_1}{\tau_u}\right)\right]\delta(\mathbf{x}_1-\mathbf{R}_p(\tau_1))\,H(\tau-\tau_1)+$$

$$+\delta(\mathbf{x}_1-\mathbf{R}_p(\tau_1))\int_{\tau_1}^{\tau}\left[1-\exp\left(-\frac{\tau-\tau_2}{\tau_u}\right)\right]\left[1-\exp\left(-\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_u}\right)\right]\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x_j}\left[u_l(\mathbf{R}_p(\tau_2),\tau_2)+\tau_u F_l(\mathbf{R}_p(\tau_2),\tau_2)\right]d\tau_2 \tag{1.10}$$

С учетом (1.8)—(1.10) выражение (1.5) может быть представлено в виде

$$\langle u_i'p\rangle=-f_u\langle u_i'u_k'\rangle\frac{\partial P}{\partial v_k}-\tau_u g_u\langle u_i'u_k'\rangle\left(\frac{\partial P}{\partial x_k}+\frac{\partial V_n}{\partial x_k}\frac{\partial P}{\partial v_n}\right)-$$

$$-\tau_u^2 h_u\langle u_i'u_k'\rangle\frac{\partial U_n}{\partial x_k}\left(\frac{\partial P}{\partial x_n}+\frac{\partial V_j}{\partial x_n}\frac{\partial P}{\partial v_j}\right) \tag{1.11}$$

$$f_u=\frac{1}{\tau_u}\int_0^{\tau}\Psi(\tau-\tau_1)\exp\left(-\frac{\tau-\tau_1}{\tau_u}\right)d\tau_1$$

$$g_u = \frac{1}{\tau_u}\int_0^{\tau} \Psi(\tau-\tau_1)\left[1-\exp\left(-\frac{\tau-\tau_1}{\tau_u}\right)\right]d\tau_1$$

$$h_u = \frac{1}{\tau_u^2}\int_0^{\tau} \Psi(\tau-\tau_1)\left\{(\tau-\tau_1)\left[1+\exp\left(-\frac{\tau-\tau_1}{\tau_u}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-2\tau_u\left[1-\exp\left(-\frac{\tau-\tau_1}{\tau_u}\right)\right]\right\}d\tau_1$$

Коэффициенты f_u, g_u, h_u характеризуют степень вовлечения частиц в макропульсационное движение турбулентного несущего потока. Для вычисления этих коэффициентов необходимо знать двухвременную корреляционную функцию пульсаций скорости газа вдоль траекторий частиц $\Psi(\xi)$ и определить время взаимодействия частиц с энергоемкими пульсациями газовой фазы $T_p = \int_0^{\infty} \Psi(\xi)\,d\xi$. Для безынерционных частиц время взаимодействия с флуктуациями скорости T_p совпадает с интегральным лагранжевым масштабом турбулентности T_L, характеризующим затухание энергоемких пульсаций несущего потока во времени. Для инерционных частиц, когда имеет место существенное осредненное скольжение частиц относительно газовой среды, $T_p < T_L$.

При $\tau \to \infty$ коэффициенты в (1.11) удовлетворяют следующим предельным соотношениям:

при $\tau_u/T_p \to 0$

$$f_u = 1,\quad g_u = \frac{T_p}{\tau_u},\quad h_u = \frac{1}{\tau_u^2}\int_0^{\infty}\Psi(\xi)\,\xi d\xi$$

при $\tau_u/T_p \to \infty$

$$f_u = \frac{T_p}{\tau_u},\quad g_u = \frac{1}{\tau_u^2}\int_0^{\infty}\Psi(\xi)\,\xi d\xi,\quad h_u = \frac{1}{6\tau_u^4}\int_0^{\infty}\Psi(\xi)\,\xi^3 d\xi$$

Подставляя (1.11) в (1.4), получим следующее уравнение для ФПВ скорости частиц в неоднородном турбулентном потоке

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} + v_k\frac{\partial P}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial v_k}\left[\left(\frac{U_k - v_k}{\tau_u} + F_k\right)P\right] = \frac{f_u}{\tau_u}\langle u_l' u_k'\rangle\frac{\partial^2 P}{\partial v_l \partial v_k} + \tag{1.12}$$

$$+ g_u\langle u_l' u_k'\rangle\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_l \partial v_k} + \frac{\partial V_n}{\partial x_k}\frac{\partial^2 P}{\partial v_l \partial v_n}\right) +$$

$$+ \tau_u h_u\langle u_l' u_k'\rangle\frac{\partial U_n}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_n \partial v_l} + \frac{\partial V_j}{\partial x_n}\frac{\partial^2 P}{\partial v_l \partial v_j}\right)$$

Уравнение (1.12) вследствие того, что оно содержит осредненную скорость дисперсной фазы $V_l = \int v_l P d\mathrm{v}/\int P d\mathrm{v}$, является интегродифференциальным. Без учета двух последних групп членов в правой части (1.12) становится уравнением типа Фоккера — Планка в теории броуновских частиц. Роль этих двух последних групп членов особенно существенна для мелких частиц ($\tau_u/T_p \ll 1$). Уравнение (1.12) отличается от уравнения для ФПВ, полученного в [3—5], наличием членов с пространственными производными от осредненных скоростей дисперсной и газовой фаз; оно подобно кинетическому уравнению в [7], за исключением того, что содержит последнюю группу членов, пропорциональную h_u. Эти члены отсутствуют в однородном турбулентном потоке, однако роль их в неоднородном течении может быть существенной.

2. Уравнения для моментов. Из (1.12) может быть получена цепочка континуальных уравнений для осредненных характеристик (моментов) дисперсной фазы. Уравнения баланса массы и количества движения имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi V_k}{\partial x_k} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial \tau} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial \langle v_i' v_k' \rangle}{\partial x_k} + \frac{U_i - V_i}{\tau_u} + F_i - \frac{D_{pik}}{\tau_u} \frac{\partial \ln \Phi}{\partial x_k} \tag{2.2}$$

$$\Phi = \int P d\mathrm{v}, \quad \langle v_i' v_j' \rangle = \frac{1}{\Phi} \int v_i' v_j' P d\mathrm{v}$$

$$D_{pij} = \tau_u \left(\langle v_i' v_j' \rangle + g_u \langle u_i' u_j' \rangle + \tau_u h_u \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right)$$

Здесь Φ — осредненная объемная концентрация дисперсной фазы, $\langle v_i' v_j' \rangle$ — турбулентные напряжения в дисперсной фазе; D_{pij} — тензор турбулентной диффузии частиц.

Уравнение для вторых моментов пульсаций скорости записывается в виде

$$\frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial \tau} + V_k \frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v_i' v_j' v_k' \rangle}{\partial x_k} = \tag{2.3}$$

$$= - \langle v_i' v_k' \rangle \frac{\partial V_j}{\partial x_k} - \langle v_j' v_k' \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{2}{\tau_u} \left(f_u \langle u_i' u_j' \rangle - \langle v_i' v_j' \rangle \right)$$

Это уравнение включает конвекцию, диффузию, генерацию пульсаций из осредненного движения частиц за счет сдвига скорости, обмен флуктуациями между дисперсной и газовой фазами. Для мелких частиц из (2.3) следует локально-однородное выражение для тензора напряжений дисперсной фазы

$$\langle v_i' v_j' \rangle = f_u \langle u_i' u_j' \rangle \tag{2.4}$$

Следует отметить, что цепочка дифференциальных уравнений для моментов скорости частиц, следующая из (1.12), как и известная система уравнений Фридмана — Келлера в теории однофазной турбулентности, является незамкнутой, так как уравнение для n-ого момента содержит $n + 1$ момент. Для получения замкнутой системы уравнений для моментов эту цепочку необходимо оборвать, вводя определенные замыкающие соотношения. Так, уравнение для третьих моментов пульсаций скорости может быть замкнуто, если использовать представление четвертых моментов пульсаций как суммы произведений вторых моментов. Получаемое таким путем замкнутое уравнение для третьих моментов имеет вид

$$\frac{\partial \langle v_i' v_j' v_k' \rangle}{\partial \tau} + V_n \frac{\partial \langle v_i' v_j' v_k' \rangle}{\partial x_k} + \langle v_i' v_j' v_n' \rangle \frac{\partial V_k}{\partial x_n} +$$

$$+ \langle v_i' v_k' v_n' \rangle \frac{\partial V_j}{\partial x_n} + \langle v_j' v_k' v_n' \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_n} + \frac{D_{pin}}{\tau_u} \frac{\partial \langle v_j' v_k' \rangle}{\partial x_n} +$$

$$+ \frac{D_{pjn}}{\tau_u} \frac{\partial \langle v_i' v_k' \rangle}{\partial x_n} + \frac{D_{pkn}}{\tau_u} \frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial x_n} + \frac{3}{\tau_u} \langle v_i' v_j' v_k' \rangle = 0 \tag{2.5}$$

Система (2.1), (2.2), (2.3), (2.5) описывает перенос импульса в дисперсной фазе на уровне уравнений для третьих моментов. Для моделирования движения частиц на уровне уравнений для вторых моментов необходимо получить алгебраическое соотношение для третьих моментов пульсаций скорости. Такая аппроксимация может быть получена из (2.5) путем пренебрежения вкладом конвекции и порождения за счет сдвига осредненной скорости

$$\langle v_i'v_j'v_k'\rangle = -\frac{1}{3}\left(D_{pin}\frac{\partial\langle v_j'v_k'\rangle}{\partial x_n} + D_{pjn}\frac{\partial\langle v_i'v_k'\rangle}{\partial x_n} + D_{pkn}\frac{\partial\langle v_i'v_j'\rangle}{\partial x_n}\right)$$

Для расчета движения мелких частиц ($\tau_u/T_p \ll 1$) из (2.1), (2.2) с учетом (2.4) может быть получена простая диффузионно-инерционная модель, описывающая перенос дисперсной фазы в пространстве на основе решения одного уравнения для концентрации

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\Phi\left[U_i + \tau_u\left(F_i - \frac{\partial f_u\langle u_i'u_k'\rangle}{\partial x_k} - \frac{\partial U_i}{\partial\tau} - U_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(T_p\langle u_i'u_k'\rangle + \tau_u^2 h_u\langle u_i'u_n'\rangle\frac{\partial U_k}{\partial x_n}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\right] \tag{2.6}$$

В предельном случае очень мелких частиц ($\tau_u \to 0$) уравнение (2.6) переходит в обычное уравнение диффузии

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} + \frac{\partial\Phi U_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ik}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\right) \tag{2.7}$$

где коэффициент турбулентной диффузии безынерционной примеси (пассивного скаляра) определяется выражением

$$D_{ij} = \lim_{\tau_u\to 0} D_{pij} = T_L\langle u_i'u_j'\rangle + \int_0^\infty \Psi(\xi)\,\xi d\xi\,\langle u_i'u_k'\rangle\frac{\partial U_j}{\partial x_k} \tag{2.8}$$

По сравнению с обычным уравнением диффузии (2.7) диффузионно-инерционная модель (2.6) позволяет в первом приближении по малому параметру τ_u/T_p учитывать ряд инерционных эффектов: влияние внешних сил, турбулентную миграцию частиц из области с высоким уровнем турбулентной энергии в область с низкой степенью турбулентности и инерционный перенос вследствие отклонения траекторий частиц от линий тока газа. Следует отметить, что формула (2.8) согласуется с выражением для коэффициента турбулентной диффузии пассивного скаляра, полученным в [10] для течения с постоянным сдвигом.

3. **Влияние частиц на несущий поток.** Перейдем к построению системы уравнений, описывающей движение газовой фазы с учетом обратного влияния частиц. Эта система совпадает с соответствующими уравнениями для однофазного турбулентного течения, за исключением дополнительных членов, обусловленных присутствием частиц. Члены, определяющие обратное влияние дисперсной фазы на характеристики несущего потока, могут быть выражены в виде интегралов по скорости в фазовом пространстве для ФПВ [11]. Так, дополнительный член в уравнении баланса количества движения газа имеет вид

$$A_{U_i} = \frac{\rho_p}{\rho\tau_u}\int\langle(u_i - v_{pi})\,p\rangle\,d\mathrm{v} = \frac{\rho_p}{\rho\tau_u}\left[(U_i - V_i)\,\Phi + \int\langle u_i'p\rangle\,d\mathrm{v}\right] \tag{3.1}$$

где ρ_p и ρ — плотности материала частиц и газа.

С учетом (1.11) выражение (3.1) примет вид

$$A_{U_i} = \frac{\rho_p}{\rho\tau_u}\left[(U_i - V_i)\,\Phi - \tau_u g_u\langle u_i'u_k'\rangle\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} - \tau_u^2 h_u\langle u_i'u_k'\rangle\frac{\partial U_n}{\partial x_k}\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\right] \tag{3.2}$$

Для упрощения формы записи осредненная скорость дисперсной фазы представляется в виде «конвективного» и «диффузионного» слагаемых [12]

$$V_i = V_{ci} + V_{di} \tag{3.3}$$

$$V_{di} = -\tau_u g_u \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial \ln \Phi}{\partial x_k} - \tau_u^2 h_u \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \frac{\partial \ln \Phi}{\partial x_n}$$

С учетом (3.3) соотношение (3.2) представляется в виде

$$A_{U_i} = \frac{\rho_p \Phi}{\rho \tau_u} (U_i - V_{ci}) \tag{3.4}$$

Обусловленный межфазным взаимодействием дополнительный член в уравнении для вторых моментов пульсаций скорости газа имеет вид

$$A_{\langle u_i' u_j' \rangle} = \frac{\rho_p}{\rho \tau_u} \int \langle [(u_i - v_{pi}) u_j' + (u_j - v_{pj}) u_i'] p > d\mathrm{v} =$$

$$= \frac{\rho_p}{\rho \tau_u} \int [(U_i - v_i) \langle u_j' p \rangle + (U_j - v_j) \langle u_i' p \rangle + 2 \langle u_i' u_j' p \rangle] \, d\mathrm{v} \tag{3.5}$$

Для определения члена, содержащего коррелятор $\langle u_i' u_j' p \rangle$, положим

$$\int \langle u_i' u_j' p \rangle \, d\mathrm{v} = \langle u_i' u_j' \rangle \Phi + \frac{1}{\Phi} \int \langle u_i' p \rangle \, d\mathrm{v} \cdot \int \langle u_j' p \rangle \, d\mathrm{v} \tag{3.6}$$

Тогда с учетом (1.11), (3.3), (3.6) выражение (3.5) представляется в виде

$$A_{\langle u_i' u_j' \rangle} = \frac{\rho_p \Phi}{\rho \tau_u} [2 (1 - f_u) \langle u_i' u_j' \rangle + (U_i - V_{ci}) V_{dj} + (U_j - V_{cj}) V_{di}] \tag{3.7}$$

Согласно (3.7), дополнительный член в уравнении баланса турбулентной энергии газа $k = \langle u_i' u_i' \rangle / 2$ имеет вид

$$A_k = \frac{\rho_p \Phi}{\rho \tau_u} [2 (1 - f_u) k + (U_i - V_{ci}) V_{di}] \tag{3.8}$$

Выражения (3.4) и (3.8) согласуются с соответствующими членами в уравнениях баланса количества движения и турбулентной энергии газа, полученными в [12, 13].

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда INTAS (грант № 94-4348) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01295А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Buyevich Yu. A.* Statistical hydromechanics of disperse systems. Pt 1. Physical background and general equations//J. Fluid Mech. 1971. V. 49. Pt. 3. P. 489—507.
2. *Крошилин А. Е., Кухаренко В. Н., Нигматулин Б. И.* Осаждение частиц на стенку канала в градиентном турбулентном дисперсном потоке//Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4. С. 57—63.
3. *Деревич И. В., Зайчик Л. И.* Осаждение частиц из турбулентного потока//Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 96—104.
4. *Деревич И. В., Зайчик Л. И.* Уравнение для плотности вероятности скорости и температуры частиц в турбулентном потоке, моделируемом гауссовым случайным полем//ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 767—774.
5. *Reeks M. W.* On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows//Phys. Fluids. A. 1991. V. 3. № 3. P. 446—456.
6. *Reeks M. W.* On the continuum equations for dispersed particles in nonuniform flows//Phys. Fluids. A. 1992. V. 4. № 6. P. 1290—1303.

7. *Зайчик Л. И.* Модели турбулентного переноса импульса и тепла в дисперсной фазе, основанные на уравнениях для вторых и третьих моментов пульсаций скорости и температуры частиц//Инж.-физ. журн. 1992. Т. 63. № 4. С. 404—413.
8. *Ватажин А. Б., Клименко А. Ю.* Континуальные модели движения инерционных частиц в ламинарном и турбулентном потоках, основанные на уравнениях Фоккера — Планка//Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 2. С. 27—35.
9. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
10. *Riley J. J., Corrsin S.* The relation of turbulent diffusivities to Lagrangian velocity statistics for the simplest shear flow//J. Geophys. Res. 1974. V. 79. № 12. P. 1768—1771.
11. *Деревич И. В.* Влияние примеси крупных частиц на турбулентные характеристики газовзвеси в каналах//ПМТФ. 1994. № 2. С. 70—78.
12. *Винберг А. А., Зайчик Л. И., Першуков В. А.* Расчет переноса импульса и тепла в турбулентных газодисперсных струйных течениях//Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 3. С. 69—80.
13. *Simonin O.* Second-moment prediction of dispersed phase turbulence in particle-laden flows//Proc. 8th Symp. on Turbulent Shear Flows. Münich, 1991. P. 7.4.1—7.4.6.

Москва

Поступила в редакцию
20.I.1995