

УДК 532.529:532.517.4

© 1996 г. И. В. ДЕРЕВИЧ

СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Получено уравнение для двухточечной функции плотности вероятности распределения двух частиц по координатам и скоростям. Представлена замкнутая система уравнений для первых и вторых двухточечных моментов пульсаций скорости пары частиц с учетом неоднородности турбулентного потока. Найдены граничные условия для уравнений концентрации частиц и интенсивности относительной хаотической скорости при столкновении частиц. Для ядра уравнения коагуляции получена единая формула, описывающая процесс столкновений частиц в результате турбулентного движения и осредненного относительного скоростного скольжения частиц. На основе двухточечной двухвременной автокорреляционной функции пульсаций скорости с двумя временными и пространственными масштабами, представляющими энергоемкое и мелкомасштабное движение жидкой фазы, исследовано влияние осредненной скорости скольжения частиц и несущей фазы на параметры движения дисперсной примеси и ее коагуляции.

Интенсивность коагуляции или дробления дисперсной примеси (частиц или капель) в потоках жидкости или газа зависит от их относительной скорости и частоты соударений. Относительная скорость частиц (капель) определяется величиной массовых сил, действующих на частицы, сил притяжения или отталкивания между частицами, а также интенсивностью их хаотического движения в турбулентном потоке. При малых расстояниях между частицами значительную роль играют силы гидродинамического и межмолекулярного взаимодействия, исследованию которых посвящена обширная литература (см., например, [1—3]). Однако транспортная стадия, на которой частицы движутся навстречу друг другу, рассматривается в рамках довольно упрощенных моделей.

Мелкие частицы, время динамической релаксации которых значительно меньше временного макромасштаба турбулентных пульсаций, полностью вовлекаются в крупномасштабное движение энергоемких вихрей. Скоростное скольжение таких частиц, без учета влияния их инерционности на степень вовлечения в мелкомасштабное движение, обусловлено градиентом скорости несущей фазы на масштабах порядка суммы диаметров сталкивающихся частиц [4, 5]. В [6] в рамках модели [4] вычислено ядро коагуляции мелких частиц с учетом броуновской и относительной турбулентной диффузии. Предполагается, что концентрация частиц на сфере с радиусом, равным сумме радиусов коагулирующих частиц, равна нулю. Исследовано влияние относительного осредненного скольжения частиц, обусловленного действием силы тяжести, на частоту столкновения частиц. На основе модели относительной диффузии мелких капель одного размера в [7] проведен расчет изменения дисперсного состава при течении конденсата в трубе. Концентрация капель, падающих на поверхность капли «мишени», принимается в [7] равной нулю.

Интенсивность турбулентного движения крупных частиц с временем динамической релаксации порядка временного макромасштаба зависит от степени вовлечения их в энергоемкое хаотическое движение. По аналогии с кинетической теорией газов [8] осредненная скорость относительного пульсационного движения таких частиц вычисляется в [9] как среднеквадратичное значение из суммы

пульсационных энергий соударяющихся частиц. Этот подход основан на предположении, что траектории крупных частиц не коррелируют друг с другом.

В [10] на основе статистического осреднения проведен анализ процесса столкновения частиц в однородном изотропном потоке. Относительная скорость мелких частиц определяется неоднородностью поля скорости турбулентных вихрей, размер которых порядка суммы диаметров сталкивающихся частиц.

Для более крупных частиц скоростное скольжение определяется степенью участия частиц в энергоемких пульсациях. В [10] предполагается, что траектории инерционных частиц одного размера полностью коррелируют друг с другом. В этой ситуации при хаотическом движении (без учета скольжения из-за скоростной неоднородности турбулентных молей) отсутствуют столкновения одинаковых частиц, что противоречит результатам [9] и интуитивным представлениям. Автокорреляционная функция флуктуаций скорости несущей фазы зависит в [10] от одного временного масштаба, равного времени жизни энергоемких турбулентных молей, что существенно завышает степень вовлечения частиц в мелкомасштабные пульсации, длительность жизни которых порядка временного микромасштаба турбулентности. В [10] не проводится вычисление ядра уравнения коагуляции частиц в турбулентном потоке. Отметим, что в [4—10] не учитывается влияние относительного осредненного скольжения частиц и жидкой фазы на параметры хаотического движения дисперсной примеси.

Для определения интенсивности коагуляции необходима информация об относительной скорости, коэффициенте относительной турбулентной диффузии дисперсной примеси и граничных условиях, для концентрации частиц, налетающих на частицу-«мишень».

Настоящая работа является дальнейшим развитием статистического описания дисперсных турбулентных потоков на основе функции плотности вероятности (ФПВ) распределения характеристик частиц [11—13].

1. Уравнение для ФПВ. Рассматриваем парные соударения сферических однородных частиц. В результате осреднения по ансамблю реализаций турбулентного потока имеет вид ФПВ распределения скоростей и координат двух частиц

$$\langle \Phi_{12}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{V}^{(1)}; \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{V}^{(2)}; t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{R}_p^{(1)}) \delta(\mathbf{V}^{(1)} - \mathbf{V}_p^{(1)}) \delta(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{R}_p^{(2)}) \delta(\mathbf{V}^{(2)} - \mathbf{V}_p^{(2)}) \rangle \quad (1.1)$$

где $\mathbf{R}_p^{(\alpha)}(t)$, $\mathbf{V}_p^{(\alpha)}(t)$ ($\alpha = 1, 2$) — радиус-векторы и скорости частиц.

В уравнении движения частицы учитываются сила вязкого трения и массовая сила

$$\frac{d\mathbf{V}_p^{(\alpha)}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_V^{(\alpha)}} [\mathbf{U}(\mathbf{R}_p^{(\alpha)}(t), t) + \langle \mathbf{G}^{(\alpha)} \rangle - \mathbf{V}_p^{(\alpha)}(t)], \quad \frac{d\mathbf{R}_p^{(\alpha)}(t)}{dt} = \mathbf{V}_p^{(\alpha)}(t) \quad (1.2)$$

где $\tau_V^{(\alpha)}$ — время динамической релаксации частиц, зависящее от относительной скорости частиц и жидкой фазы, $\langle \mathbf{G}^{(\alpha)} \rangle$ — относительная скорость, обусловленная массовыми силами, действующими на частицы, $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ — скорость несущего потока.

Определяем двухточечную функцию распределения частиц по координатам, условные осредненные и пульсационные компоненты скорости частиц

$$\langle N_{12}(\mathbf{x}^{(1)}; \mathbf{x}^{(2)}; t) \rangle = \int d\mathbf{V}^{(1)} \int d\mathbf{V}^{(2)} \langle \Phi_{12} \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{R}_p^{(1)}) \delta(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{R}_p^{(2)}) \rangle \quad (1.3)$$

$$\langle \mathbf{V}^{(\alpha)}(\mathbf{x}^{(1)}; \mathbf{x}^{(2)}; t) \rangle \langle N_{12} \rangle = \int d\mathbf{V}^{(1)} \int d\mathbf{V}^{(2)} \mathbf{V}^{(\alpha)} \langle \Phi_{12} \rangle$$

$$\mathbf{v}^{(\alpha)} = \mathbf{V}^{(\alpha)} - \langle \mathbf{V}^{(\alpha)} \rangle, \quad \alpha = 1, 2$$

Безусловные средние получаются из соотношений (1.3) при интегрировании по второй координате.

Дифференцируя выражение (1.1) по времени с учетом уравнения движения одиночной частицы (1.2), получаем уравнение для ФПВ распределения координат и пульсаций скорости пары частиц

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle \Phi_{12} \rangle}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^2 \{ \langle \langle V_k^{(\alpha)} \rangle \rangle + v_k^{(\alpha)} \} \frac{\partial \langle \Phi_{12} \rangle}{\partial x_k^{(\alpha)}} - \\ & - \left[\frac{\partial \langle V_l^{(\alpha)} \rangle}{\partial t} + \langle \langle V_k^{(\alpha)} \rangle \rangle + v_k^{(\alpha)} \right] \frac{\partial \langle \Phi_{12} \rangle}{\partial v_l^{(\alpha)}} - \\ & - \frac{\partial}{\partial v_l^{(\alpha)}} \left[\frac{\langle U_l(\mathbf{x}^{(\alpha)}, t) \rangle + \langle G_l^{(\alpha)} \rangle - \langle \langle V_l^{(\alpha)} \rangle \rangle + v_l^{(\alpha)}}{\tau_U^{(\alpha)}} \langle \Phi_{12} \rangle \right] \} = A \langle \Phi_{12} \rangle \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$A \langle \Phi_{12} \rangle = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial v_k^{(\alpha)}} \frac{\langle u_k(\mathbf{x}^{(\alpha)}, t) \rangle \Phi_{12}}{\tau_U^{(\alpha)}} \quad (1.5)$$

где оператор A описывает взаимодействие частиц с хаотической скоростью несущего потока.

Для раскрытия корреляции пульсаций скорости жидкой фазы и ФПВ в (1.5) используем процедуру функционального дифференцирования [13], применяемую к флуктуациям скорости одиночной частицы

$$v_p^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{\tau_U^{(\alpha)}} \int_0^t ds \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_U^{(\alpha)}}\right) u(\mathbf{x}^{(\alpha)} - \mathbf{R}_p^{(\alpha)}(t-s), s), \quad \mathbf{R}_p^{(\alpha)}(0) = 0$$

В результате получаем замкнутое выражение для слагаемых, представляющих порождение турбулентного движения частиц в уравнении (1.4) для ФПВ

$$A \langle \Phi_{12} \rangle = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \left[\frac{1}{\tau_U^{(\alpha)}} f_{\alpha\beta} e_{kj}^{(\alpha, \beta)} \frac{\partial^2 \langle \Phi_{12} \rangle}{\partial v_k^{(\alpha)} \partial v_j^{(\beta)}} + \frac{\tau_U^{(\beta)}}{\tau_U^{(\alpha)}} g_{\alpha\beta} e_{kj}^{(\alpha, \beta)} \frac{\partial^2 \langle \Phi_{12} \rangle}{\partial v_k^{(\alpha)} \partial x_j^{(\beta)}} \right] \quad (1.6)$$

$$e_{kj}^{(\alpha, \beta)} = \langle u_k(\mathbf{x}^{(\alpha)}, t) u_j(\mathbf{x}^{(\beta)}, t) \rangle$$

Функции $f_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$ в (1.6) учитывают степень вовлечения одиночных частиц в турбулентное движение несущей фазы

$$f_{\alpha\beta} e_{kj}^{(\alpha, \beta)} = \frac{1}{\tau_U^{(\beta)}} \int_0^t ds \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_U^{(\beta)}}\right) \langle u_k(\mathbf{x}^{(\alpha)}, t) u_j(\mathbf{x}^{(\beta)} - \mathbf{R}_p^{(\beta)}(t-s), s) \rangle \quad (1.7)$$

$$g_{\alpha\beta} e_{kj}^{(\alpha, \beta)} = \frac{1}{\tau_U^{(\beta)}} \int_0^t ds \left[1 - \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_U^{(\beta)}}\right) \right] \langle u_k(\mathbf{x}^{(\alpha)}, t) u_j(\mathbf{x}^{(\beta)} - \mathbf{R}_p^{(\beta)}(t-s), s) \rangle$$

При $\alpha = \beta$ осреднение в (1.7) проводится по траектории одной частицы, при $\alpha \neq \beta$ — по траектории частицы β , попадающей за время $t-s$ в точку $\mathbf{x}^{(\beta)}$ при условии, что в точке $\mathbf{x}^{(\alpha)}$ в момент времени t находится частица α .

В случае стационарного однородного изотропного турбулентного потока из уравнения (1.4) с учетом выражения (1.6) находится ФПВ распределения двух частиц по скоростям

$$\begin{aligned} \varphi(v^{(1)}, v^{(2)}) &= \prod_{i=1}^3 \frac{1}{2\pi \langle (v_i^{(1)})^2 \rangle \langle (v_i^{(2)})^2 \rangle (1 - R_u^2)^{1/2}} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - R_u^2)} \left[\frac{v_i^{(1)} v_i^{(1)}}{\langle (v_i^{(1)})^2 \rangle} + \frac{v_i^{(2)} v_i^{(2)}}{\langle (v_i^{(2)})^2 \rangle} - \frac{2R_u v_i^{(1)} v_i^{(2)}}{\langle (v_i^{(1)})^2 \rangle \langle (v_i^{(2)})^2 \rangle^{1/2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\langle v_i^{(\alpha)} v_i^{(\beta)} \rangle = \frac{1}{\langle N_{12} \rangle} \int dv^{(1)} \int dv^{(2)} v_i^{(\alpha)} v_i^{(\beta)} \langle \Phi_{12} \rangle$$

$$R_u = \frac{\langle v_i^{(1)} v_i^{(2)} \rangle}{\langle (v_i^{(1)})^2 \rangle \langle (v_i^{(2)})^2 \rangle^{1/2}}$$

где $\langle v_i^{(\alpha)} v_j^{(\beta)} \rangle$ — корреляции пульсаций скоростей частиц, которые в случае изотропного потока равны

$$\langle (v_i^{(\alpha)})^2 \rangle = f_{\alpha\alpha} e_{ii}^{(\alpha, \alpha)}, \quad \langle v_i^{(1)} v_i^{(2)} \rangle = \frac{\tau_{ij}^{(1)} f_{21} + \tau_{ij}^{(2)} f_{12}}{\tau_{ij}^{(1)} + \tau_{ij}^{(2)}} e_{ii}^{(1,2)} \quad (1.9)$$

Из выражения (1.8) следует представление для ФПВ полусуммы $v^{(1,2)} = (v^{(1)} + v^{(2)})/2$ и относительной $w^{(1,2)} = v^{(1)} - v^{(2)}$ хаотических скоростей двух частиц

$$\varphi(v^{(1,2)}) = \int dw^{(1,2)} \varphi(v^{(1,2)}, w^{(1,2)}) = \prod_{i=1}^3 \frac{1}{2\pi \sqrt{\langle (v_i^{(1,2)})^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{v_i^{(1,2)} w_i^{(1,2)}}{\langle (v_i^{(1,2)})^2 \rangle}\right) \\ \langle (v_i^{(1,2)})^2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle (v_i^{(1)})^2 \rangle + \langle (v_i^{(2)})^2 \rangle + 2 \langle v_i^{(1)} v_i^{(2)} \rangle) \quad (1.10)$$

$$\varphi(w^{(1,2)}) = \int dv^{(1,2)} \varphi(v^{(1,2)}, w^{(1,2)}) = \prod_{i=1}^3 \frac{1}{2\pi \sqrt{\langle (w_i^{(1,2)})^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{w_i^{(1,2)} v_i^{(1,2)}}{\langle (w_i^{(1,2)})^2 \rangle}\right) \\ \langle (w_i^{(1,2)})^2 \rangle = \langle (v_i^{(1)})^2 \rangle + \langle (v_i^{(2)})^2 \rangle - 2 \langle v_i^{(1)} v_i^{(2)} \rangle$$

Из выражений (1.7), (1.9), (1.10) видно, что с увеличением расстояния между частицами корреляция пульсаций скоростей частиц уменьшается и интенсивность относительного хаотического движения частиц определяется только турбулентной энергией отдельных частиц.

2. Уравнения для первых и вторых моментов. Осредненные характеристики пары частиц зависят от средней $X = (x^{(1)} + x^{(2)})/2$ и относительной $Y = x^{(1)} - x^{(2)}$ координат. Масштаб изменения осредненных параметров по относительной координате Y значительно меньше, чем по координате X . Из уравнения (1.4) для ФПВ вытекают уравнение для плотности распределения двух частиц в пространстве, система уравнений для условной осредненной скорости частиц, а также для корреляции пульсаций скорости частиц

$$\frac{\partial \langle N_{12} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle W_i^{(1,2)} \rangle \langle N_{12} \rangle}{\partial Y_i} = 0, \quad \langle W_i^{(1,2)} \rangle = \langle V_i^{(1)} \rangle - \langle V_i^{(2)} \rangle \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \langle V_i^{(\alpha)} \rangle}{\partial t} - (-1)^{(\alpha)} \langle V_k^{(\alpha)} \rangle \frac{\partial \langle V_i^{(\alpha)} \rangle}{\partial Y_k} + (-1)^\alpha \frac{\partial \langle v_i^{(\alpha)} v_k^{(\beta)} \rangle}{\partial Y_k} = \quad (2.2)$$

$$= \frac{1}{\tau_{ij}^{(\alpha)}} (\langle U_i(x^{(\alpha)}, t) \rangle + \langle G_i^{(\alpha)} \rangle - \langle V_i^{(\alpha)} \rangle) + (-1)^\alpha \frac{D_{ik}^{(\alpha)}}{\tau_{ij}^{(\alpha)}} \frac{\partial \ln \langle N_{12} \rangle}{\partial Y_k} - \\ - (-1)^\alpha \left(\langle v_i^{(\alpha)} v_k^{(\beta)} \rangle + \frac{\tau_{ij}^{(\beta)}}{\tau_{ij}^{(\alpha)}} g_{\alpha\beta} e_{ik}^{(\alpha, \beta)} \right) \frac{\partial \ln \langle N_{12} \rangle}{\partial Y_k}$$

$$D_{ik}^{(\alpha)} = \tau_{ij}^{(\alpha)} (\langle v_i^{(\alpha)} v_k^{(\alpha)} \rangle + g_{\alpha\alpha} e_{ik}^{(\alpha, \alpha)}), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad \alpha \neq \beta$$

$$\frac{\partial \langle v_i^{(1)} v_j^{(2)} \rangle}{\partial t} + \langle W_k^{(1,2)} \rangle \frac{\partial \langle v_i^{(1)} v_j^{(2)} \rangle}{\partial Y_k} + \quad (2.3)$$

$$+ \frac{1}{\langle N_{12} \rangle} \frac{\partial}{\partial Y_k} \langle N_{12} \rangle \langle v_i^{(1)} v_j^{(2)} \rangle (v_k^{(1)} - v_k^{(2)}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \langle v_i^{(1)} v_k^{(2)} \rangle \frac{\partial \langle V_j^{(2)} \rangle}{\partial X_k} + \frac{1}{2} \langle v_j^{(2)} v_k^{(1)} \rangle \frac{\partial \langle V_i^{(1)} \rangle}{\partial X_k} =$$

$$= \left(\frac{f_{12}}{\tau_{ij}^{(1)}} + \frac{f_{21}}{\tau_{ij}^{(2)}} \right) e_{ij}^{(1,2)} - \left(\frac{1}{\tau_{ij}^{(1)}} + \frac{1}{\tau_{ij}^{(2)}} \right) \langle v_i^{(1)} v_j^{(2)} \rangle$$

Здесь $D_k^{(a)}$ — коэффициент турбулентной диффузии частиц [12, 13]. Из формулы (2.3) видно, что в корреляцию пульсаций скорости частиц вносят вклад конвективное слагаемое с осредненной относительной скоростью частиц (второе слагаемое в левой части уравнения), турбулентный перенос, обусловленный относительным пульсационным скольжением частиц (третье слагаемое), а также члены, связанные с порождением хаотического движения частиц из осредненного (четвертое и пятое слагаемые). Величина источника турбулентного движения частиц (первый член справа в (2.3)) уменьшается по мере увеличения относительного расстояния между частицами.

Из уравнений (2.2) вытекает формула для относительной осредненной скорости, определяющей динамику изменения концентрации частиц в потоке

$$\langle W_i^{(1,2)} \rangle = (\langle G_i^{(1)} \rangle - \langle G_i^{(2)} \rangle) + (\tau_Y^{(a)} + \tau_Y^{(a)}) \frac{\partial \langle v_i^{(1)} v_k^{(2)} \rangle}{\partial Y_k} - D_k^{(1,2)} \frac{\partial \ln \langle N_{12} \rangle}{\partial Y_k} \quad (2.4)$$

$$D_k^{(1,2)} = D_k^{(1)} + D_k^{(2)} - (\tau_Y^{(1)} + \tau_Y^{(2)}) \langle v_i^{(1)} v_k^{(2)} \rangle - \tau_Y^{(1)} g_{21} e_{ik}^{(1,2)} - \tau_Y^{(2)} g_{12} e_{ik}^{(1,2)} \quad (2.5)$$

Здесь $D_k^{(1,2)}$ — коэффициент относительной турбулентной диффузии частиц. Отметим, что при увеличении расстояния между частицами коэффициент относительной диффузии частиц стремится к сумме коэффициентов диффузии одиночных частиц. Относительная скорость частиц определяется не только разностью относительных скоростей, обусловленных массовыми силами, но и градиентами концентрации и корреляции пульсаций скорости частиц (эффект аналогичен турбофорезу [14] в случае одиночной частицы).

Из выражений (2.1), (2.4) следует уравнение для изменения концентрации частиц в потоке

$$\frac{\partial \langle N_{12} \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Y_k} \left\{ - \left[(\langle G_k^{(1)} \rangle - \langle G_k^{(2)} \rangle) + (\tau_Y^{(1)} + \tau_Y^{(2)}) \frac{\partial \langle v_i^{(1)} v_k^{(2)} \rangle}{\partial Y_i} \right] \langle N_{12} \rangle + D_k^{(1,2)} \frac{\partial \langle N_{12} \rangle}{\partial Y_i} \right\}$$

Аналогично работам [12, 13] на основе приближенного решения кинетического уравнения (1.4), (1.5) получается градиентное представление для турбулентного переноса корреляций пульсаций скорости частиц (третье слагаемое в левой части уравнения (2.3))

$$\langle v_i^{(1)} v_j^{(2)} (v_k^{(1)} - v_k^{(2)}) \rangle = - \left(\frac{1}{\tau_Y^{(1)}} + \frac{1}{\tau_Y^{(2)}} \right)^{-1} \langle (w_k^{(1,2)})^2 \rangle \frac{\partial \langle v_i^{(1)} v_j^{(2)} \rangle}{\partial Y_k}$$

Предполагаем, что в результате соударения двух частиц происходит потеря импульса относительного движения, т. е. после столкновения относительная скорость разлетающихся частиц составляет k_n часть относительной скорости налетающих друг на друга частиц. Граничные условия для концентрации частиц и корреляций пульсаций скоростей частиц выставляются на сфере, радиус которой равен сумме радиусов соударяющихся частиц. Соответствующие выражения находятся в результате процедуры, аналогичной [12, 13], и имеют вид

$$\langle W_i^{(1,2)} \rangle + \frac{1 - k_n}{1 + k_n} \left(\frac{2}{\pi} \langle (w_i^{(1,2)})^2 \rangle \right)^{1/2} = 0$$

$$\left[\langle W_k^{(1,2)} \rangle + 2 \frac{1 - k_n}{1 + k_n} \left(\frac{2}{\pi} \langle (w_k^{(1,2)})^2 \rangle \right)^{1/2} \right] \langle v_i^{(1)} v_j^{(2)} \rangle =$$

$$= - \left(\frac{1}{\tau_Y^{(1)}} + \frac{1}{\tau_Y^{(2)}} \right)^{-1} \langle (w_k^{(1,2)})^2 \rangle \frac{\partial \langle v_i^{(1)} v_j^{(2)} \rangle}{\partial Y_k}$$

В случае абсолютного упругого удара $k_n = 1$, $\langle W_i^{(1,2)} \rangle = 0$, концентрация частиц не меняется и $\partial \langle v_i^{(1)} v_j^{(2)} \rangle / \partial Y_k = 0$.

Вычисление ядра коагуляции частиц в турбулентном потоке проводим в сферически симметричном случае без учета изменения корреляции пульсаций скорости частиц в пространстве. Уравнение для расчета концентрации частиц и граничное условие имеют вид

$$\frac{\partial \langle N_{12} \rangle}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 D^{(1,2)} \frac{\partial \langle N_{12} \rangle}{\partial r} \right) + \langle G^{(1,2)} \rangle \frac{\partial \langle N_{12} \rangle}{\partial r} \quad (2.6)$$

$$\langle G^{(1,2)} \rangle \langle N_{12} \rangle + D^{(1,2)} \frac{\partial \langle N_{12} \rangle}{\partial r} = \frac{1 - k_n}{1 + k_n} \left(\frac{2}{\pi} \langle (w^{(1,2)})^2 \rangle \right)^{1/2} \langle N_{12} \rangle$$

$$\langle G^{(1,2)} \rangle = \langle G^{(1)} \rangle - \langle G^{(2)} \rangle$$

Ядро коагуляции частиц $K(a^{(1)}, a^{(2)})$, где $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$ — радиусы частиц, равно отношению полного потока частиц 2 на поверхность частицы 1 к концентрации частиц 2 на «бесконечности» [6]. В результате решения уравнения (2.6) находим

$$K(a^{(1)}, a^{(2)}) = \left[4\pi (a^{(1)} + a^{(2)})^2 \frac{1 - k_n}{1 + k_n} \left(\frac{2}{\pi} \langle (w^{(1,2)})^2 \rangle \right)^{1/2} \right] \times \\ \times \left\{ 1 + x \exp(x) E_2(x) \left[\frac{1 - k_n}{1 + k_n} \left(\frac{2 \langle (w^{(1,2)})^2 \rangle}{\pi \langle G^{(1,2)} \rangle^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{-1} \quad (2.7)$$

$$x = \frac{\langle G^{(1,2)} \rangle (a^{(1)} + a^{(2)})}{D^{(1,2)}}, \quad E_2(x) = \int_1^{\infty} dt t^{-2} \exp(-xt)$$

Здесь $E_2(x)$ — интегральная экспонента второго порядка. Из формулы (2.7) видно, что эффективность коагуляции зависит от величины коэффициента восстановления импульса при соударении частиц друг с другом.

Рассмотрим предельные случаи. Для значительной осредненной скорости скольжения частиц друг относительно друга $x \gg 1$, используя асимптотическое представление для интегральной экспоненты [15], получаем выражение для ядра коагуляции

$$K(a^{(1)}, a^{(2)}) = 4\pi (a^{(1)} + a^{(2)})^2 \langle G^{(1,2)} \rangle \quad (2.8)$$

В отсутствие массовых сил вытекает формула

$$K(a^{(1)}, a^{(2)}) = 4\pi (a^{(1)} + a^{(2)})^2 \frac{1 - k_n}{1 + k_n} \left(\frac{2}{\pi} \langle (w^{(1,2)})^2 \rangle \right)^{1/2} \quad (2.9)$$

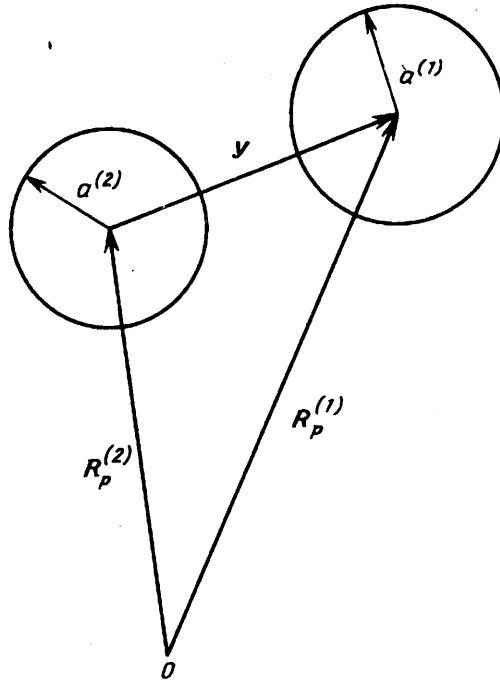
При записи формул (2.8), (2.9) привлекается следующая оценка дополнительных слагаемых в знаменателе выражения (2.7):

$$\frac{\langle (w^{(1,2)})^2 \rangle^{1/2} (a^{(1)} + a^{(2)})}{D^{(1,2)}} \approx \frac{(a^{(1)} + a^{(2)}) u}{D^{(0)}} \approx \frac{(a^{(1)} + a^{(2)})}{L_E} \ll 1$$

Здесь $D^{(0)}$ — коэффициент турбулентной диффузии несущей фазы, u — среднеквадратичная пульсационная скорость жидкой фазы, L_E — лагранжев интегральный пространственный масштаб турбулентности.

3. Вычисление интенсивности пульсационного движения частиц. Столкновение частиц реализуется в результате сближения их поверхностей (фиг. 1). Корреляция скоростей жидкой фазы на поверхности сближающихся частиц в (1.7) записывается в виде

$$\langle u_i(x^{(\alpha)} + a^{(\alpha)}, t) u_j(x^{(\beta)} + (-1)^{(\alpha+\beta)} a^{(\beta)} - R_p^{(\beta)}(t-s), s) \rangle \approx \\ \approx \langle u_i(x^{(\alpha)}, t) u_j(x^{(\beta)} - R_p^{(\beta)}(t-s), s) \rangle + \\ + (-1)^{(\alpha+\beta)} a_k^{(\alpha)} a_m^{(\beta)} \left\langle \frac{\partial u_i(x^{(\alpha)}, t)}{\partial x_k^{(\alpha)}} \frac{\partial u_j(x^{(\beta)} - R_p^{(\beta)}(t-s), s)}{\partial x_m^{(\beta)}} \right\rangle \quad (3.1)$$



Фиг. 1

Определяем автокорреляционную функцию и ее вторую производную для пульсаций скорости несущей фазы, которые в приближении локальной изотропности записываются в виде

$$\langle u_i(x-y, t-s) u_j(x, t) \rangle = \langle u_i u_j \rangle \Psi(y, s)$$

$$\left\langle \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial u_j(x-y, t-s)}{\partial x_n} \right\rangle = \delta_{kn} \delta_{ij} \frac{\varepsilon}{3\nu} \Psi''(y, s)$$

где ε — турбулентная диссипация в несущей фазе, ν — коэффициент молекулярной кинематической вязкости жидкой фазы. Функции Ψ , Ψ'' связаны соотношением [15]

$$-\langle u_i^2 \rangle \frac{d^2 \Psi(y, s)}{dy^2} = \frac{\varepsilon}{3\nu} \Psi''(y, s)$$

Корреляции (3.1) определяются в эйлеровой системе координат, движущейся с осредненной скоростью несущего потока. При записи выражения для слагаемых, входящих в источникный член в уравнении (2.3), учитываем, что при $\alpha \neq \beta$ корреляция пульсаций скорости несущей фазы вычисляются на траектории различных частиц

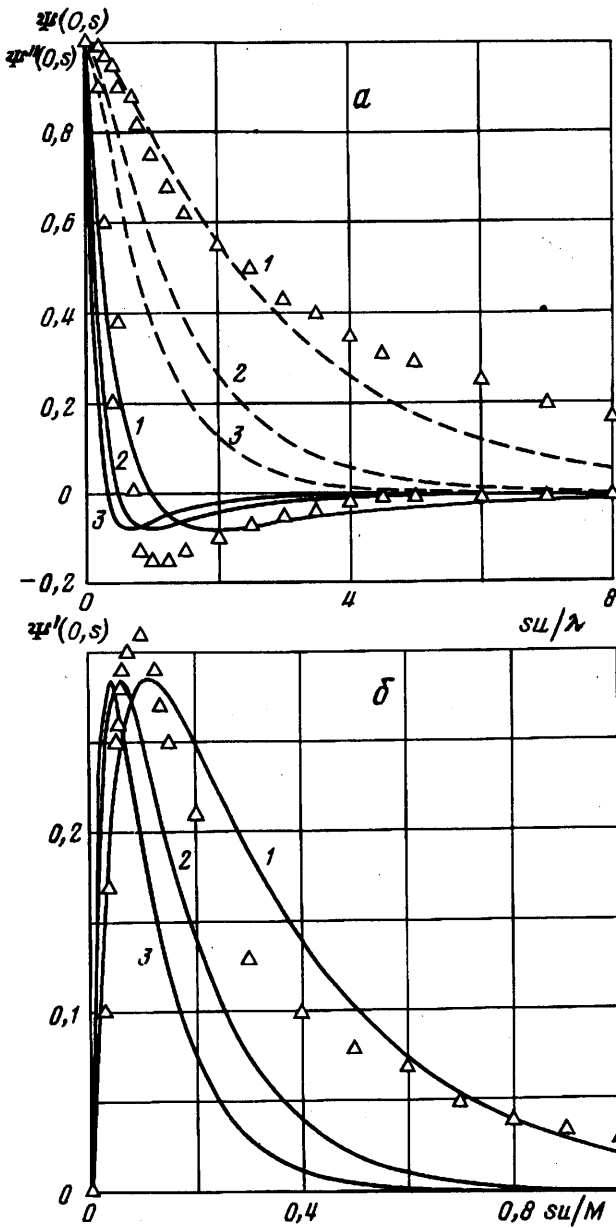
$$f_{\alpha\beta} e^{i(\alpha, \beta)}(Y) = \frac{1}{\tau_0^{(\beta)}} \int_0^{\infty} ds \exp\left(-\frac{s}{\tau_0^{(\beta)}}\right) \int dw^{(1,2)} \varphi(w^{(1,2)}) \times$$

$$\times \left\{ \Psi(Y(1 - \delta_{\alpha\beta}) + [|\langle W^{(\beta)} \rangle| + (1 - \delta_{\alpha\beta}) |w^{(1,2)}|] s, s) \langle u_i u_j \rangle + \right.$$

$$\left. + \delta_{ij} \frac{\varepsilon}{3\nu} \Psi''(Y(1 - \delta_{\alpha\beta}) + [|\langle W^{(\beta)} \rangle| + (1 - \delta_{\alpha\beta}) |w^{(1,2)}|] s, s) \right\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

$$\langle W^{(\beta)} \rangle = |\langle V^{(\beta)} \rangle - \langle U \rangle|, \quad Y = |x^{(1)} - x^{(2)}|$$

Двухточечная двухвременная автокорреляционная функция пульсаций



Фиг. 2

скорости жидкой фазы аппроксимируется в виде, учитывающем распределение скоростей на микро- и макромасштабах турбулентности [16]

$$\Psi(y, s) = (\chi - 1)^{-1} \left[\chi \exp\left(-\frac{y}{L} - \frac{s}{T}\right) - \exp\left(-\frac{\chi y}{L} - \frac{\chi s}{T}\right) \right] \quad (3.2)$$

$$T = \frac{L}{u}, \quad u = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \langle u_i^2 \rangle$$

При малых $y \ll L$ для одновременной двухточечной автокорреляционной функции (3.2) имеем разложение

$$\Psi(y, 0) \approx 1 - \frac{1}{2}(\chi + 1) \frac{y^2}{L^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{y^2}{\lambda^2}, \quad \chi = \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 - 1$$

Здесь λ — тейлоровский пространственный микромасштаб.

При $y \gg L$ имеем экспоненциальное затухание автокорреляционной функции. С целью лучшего соответствия экспериментальным данным [17] параметры χ и L вычисляются по формулам

$$\chi = (\beta_1 L_E / \lambda)^2 - 1, \quad L = \beta_2 L_E, \quad \beta_1 = 0,3, \quad \beta_2 = 1,7$$

На фиг. 2 показано сравнение результатов расчета одноточечной автокорреляционной функции (3.2) и ее первых и вторых производных с экспериментальными данными [17] при числе $Re_\lambda = u\lambda/\nu = 45$ (экспериментальные данные показаны точками, штриховые кривые на фиг. 2, а представляют автокорреляционную функцию, параметр M на фиг. 2, б равен характерному размеру ячейки турбулизирующей решетки).

На фиг. 2 представлено также влияние осредненной относительной скорости фаз на корреляции пульсаций скорости несущей фазы, вычисленные по траектории частицы. Значения параметра $\gamma^{(\alpha)} = \langle W^{(\alpha)} \rangle / u$ на кривых 1, 2, 3 соответственно равны 0, 1, 2. Видно, что увеличение относительной скорости вызывает быстрое затухание корреляций скорости несущей фазы на траектории частиц, что приводит к уменьшению интенсивности хаотического движения дисперсионной примеси. На основе выражений (1.9) и (3.1), (3.2) находим формулы для расчета интенсивности пульсационного движения и корреляции скоростей точек на поверхности сталкивающихся частиц ($Y = a^{(1)} + a^{(2)}$)

$$\langle (v_i^{(\alpha)})^2 \rangle = f_{\alpha\alpha} e_i^{(\alpha, \alpha)} = \langle u_i^2 \rangle \psi_0(\Omega^{(\alpha)}, \gamma^{(\alpha)}) + \frac{\varepsilon}{3\nu} a^{(\alpha)} a^{(\alpha)} \psi_2(\Omega^{(\alpha)}, \gamma^{(\alpha)}) \quad (3.3)$$

$$\langle v_i^{(1)} v_i^{(2)} \rangle = \frac{\Omega^{(1)} \Omega^{(2)}}{\Omega^{(1)} + \Omega^{(2)}} \left[\langle u_i^2 \rangle \left\{ \frac{\psi_0(\Omega^{(1)}, \gamma_*^{(1)})}{\Omega^{(2)}} + \frac{\psi_0(\Omega^{(2)}, \gamma_*^{(2)})}{\Omega^{(1)}} \right\} - \frac{\varepsilon}{3\nu} a^{(1)} a^{(2)} \left(\frac{\psi_2(\Omega^{(1)}, \gamma_*^{(1)})}{\Omega^{(2)}} + \frac{\psi_2(\Omega^{(2)}, \gamma_*^{(2)})}{\Omega^{(1)}} \right) \right]$$

$$\gamma_*^{(\alpha)} = \frac{\langle W^{(\alpha)} \rangle + \langle (w^{(1,2)})^2 \rangle^{1/2}}{u} = \gamma^{(\alpha)} + \gamma^{(1,2)}$$

$$\langle (w_i^{(1,2)})^2 \rangle = \langle (v_i^{(1)})^2 \rangle + \langle (v_i^{(2)})^2 \rangle - 2 \langle v_i^{(1)} v_i^{(2)} \rangle \quad (3.4)$$

$$\gamma^{(1,2)} = \frac{\langle (w^{(1,2)})^2 \rangle^{1/2}}{u}, \quad w^{(1,2)} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (w_i^{(1,2)})^2}$$

Здесь $\Omega^{(\alpha)} = \tau_v^{(\alpha)} / T$ — параметр инерционности, определяющий характеристики турбулентного движения частиц. Функции ψ_0, ψ_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_0(\Omega, \gamma) &= \frac{1}{\tau_v} \int_0^\infty ds \exp\left(-\frac{s}{\tau_v}\right) \Psi(Ws, s) = \\ &= \frac{(\chi + 1) \Omega (1 + \gamma) + 1}{[1 + \Omega (1 + \gamma)] [1 + \chi \Omega (1 + \gamma)]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2(\Omega, \gamma) &= \frac{1}{\tau_v} \int_0^\infty ds \exp\left(-\frac{s}{\tau_v}\right) \Psi''(Ws, s) = \\ &= \frac{1}{[1 + \Omega (1 + \gamma)] [1 + \chi \Omega (1 + \gamma)]}, \quad \Omega = \frac{\tau_v}{T}, \quad \gamma = \frac{W}{u} \end{aligned}$$

Из формул (3.3), (3.4) видно, что энергия хаотического движения точек на поверхности частиц и их относительного движения определяется двумя механизмами. Во-первых, инерционным переносом частиц, обусловленным вовлечением частиц в энергоемкие пульсации несущей фазы (группа слагаемых, пропорциональных квадрату пульсаций скорости несущей фазы) и, во-вторых, скоростным скольжением точек поверхности вследствие неоднородности мелко-масштабной турбулентности (слагаемые, пропорциональные турбулентной диссипации).

Рассмотрим некоторые следствия из формул (3.3), (3.4). Относительная скорость очень мелких частиц в точке их контакта стремится к нулю по мере уменьшения их размера: $\Omega^{(\alpha)} \rightarrow 0$ ($a^{(\alpha)} \rightarrow 0$). Для инерционной частицы (например, второй) $\Omega^{(2)} \rightarrow \infty$ получаем $\langle v_i^{(1)} v_i^{(2)} \rangle \rightarrow 0$, $\langle (w_i^{(1,2)})^2 \rangle \rightarrow \langle (v_i^{(1)})^2 \rangle$, и относительная скорость частиц равна пульсационной скорости первой частицы. Для частиц одного размера в результате инерционного переноса ($\chi \gg 1$) имеем

$$\gamma^{(1,2)} = \frac{2\Omega^{(1)}}{[1 + \Omega^{(1)}(1 + \gamma^{(1)})][1 + \Omega^{(1)}(1 + \gamma^{(1)} + \gamma^{(1,2)})]} \quad (3.5)$$

В отличие от результата работы [10] из формулы (3.5) следует, что относительная скорость частиц одного размера в турбулентном потоке не равна нулю. При малых значениях параметра инерционности $\Omega^{(1)} \ll 1$ относительная скорость частиц в точке контакта $\gamma^{(1,2)} \propto \Omega^{(1)}$.

С ростом инерционности $\Omega^{(1)} \gg 1$ ($\gamma^{(1)} \ll 1$) относительная скорость частиц $\gamma^{(1,2)} \propto 1/\sqrt{\Omega^{(1)}}$, что коррелирует с поведением турбулентной энергии частиц при больших значениях $\Omega^{(1)}$.

Выражения для коэффициентов диффузии отдельных частиц и коэффициента относительной диффузии частиц следуют из формул (2.2), (2.5) и имеют вид

$$D_u^{(\alpha)} = \int_0^\infty ds \langle u_i(x^{(\alpha)}, t) u_i(x^{(\alpha)} - R_p^{(\alpha)}(t-s), s) \rangle, \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.6)$$

$$D_u^{(1,2)} = \int_0^\infty ds \{ \langle u_i(x^{(1)}, t) [u_i(x^{(1)} - R_p^{(1)}(t-s), s) - u_i(x^{(2)} - R_p^{(2)}(t-s), s)] \rangle + \\ + \langle u_i(x^{(2)}, t) [u_i(x^{(2)} - R_p^{(2)}(t-s), s) - u_i(x^{(1)} - R_p^{(1)}(t-s), s)] \rangle \}$$

Используя представления для корреляций пульсаций скорости несущей фазы (3.2), находим формулы для коэффициентов диффузии отдельных частиц и относительной диффузии частиц ($Y = a^{(1)} + a^{(2)}$)

$$D_u^{(\alpha)} = \frac{D_u^{(0)}}{1 + \gamma^{(\alpha)}}, \quad D_u^{(0)} = \frac{T \langle u_i^2 \rangle (\chi + 1)}{\chi}$$

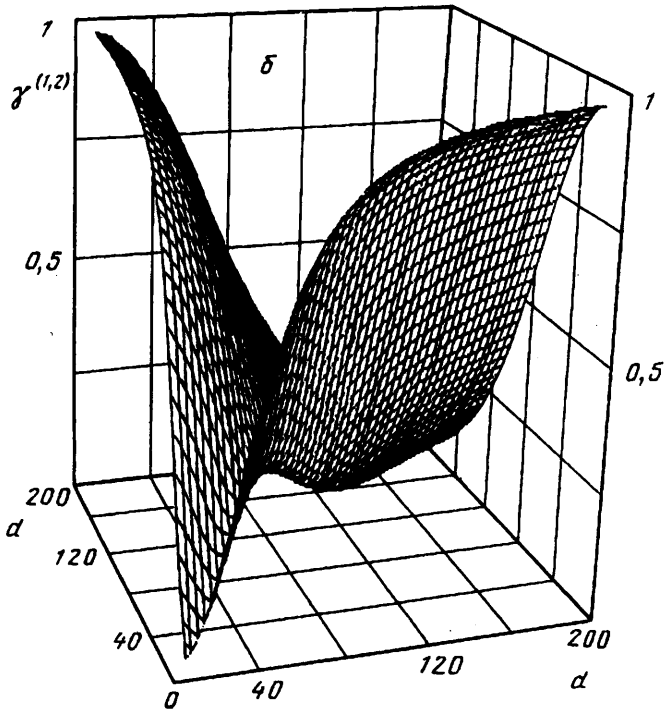
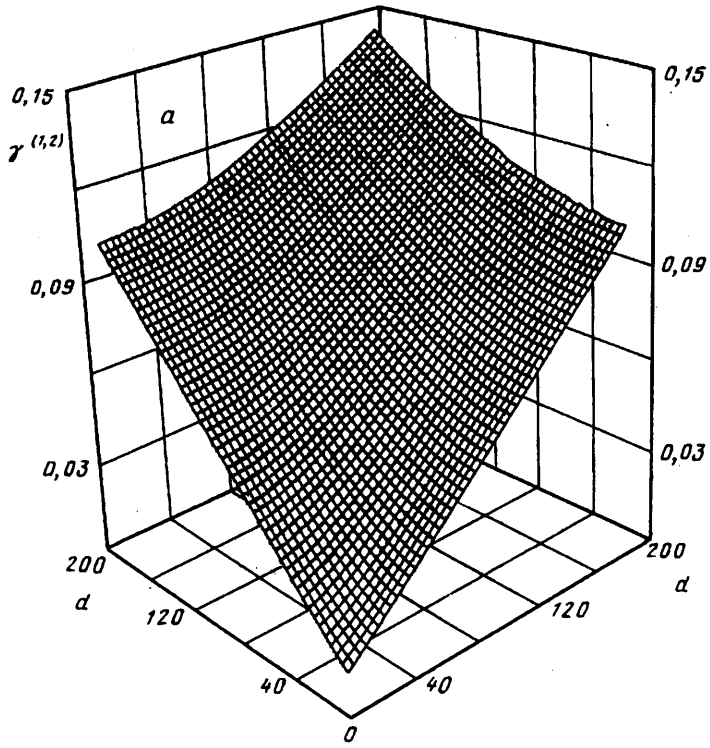
$$D_u^{(1,2)} = D_u^{(0)} \gamma^{(1,2)} \left[\frac{1}{(1 + \gamma^{(1)})(1 + \gamma^{(1)} + \gamma^{(1,2)})} + \frac{1}{(1 + \gamma^{(2)})(1 + \gamma^{(2)} + \gamma^{(1,2)})} \right] \quad (3.7)$$

где $D_u^{(0)}$ — коэффициент турбулентности диффузии несущей фазы.

Из формул (3.4), (3.7) следует, что коэффициент относительной турбулентности диффузии безынерционных частиц $\Omega^{(\alpha)} \rightarrow 0$ ($a^{(\alpha)} \rightarrow 0$) при их контакте равен нулю. В случае частиц одного размера имеем следующее выражение для коэффициента относительной диффузии:

$$D_u^{(1,2)} = D_u^{(0)} \frac{2\gamma^{(1,2)}}{(1 + \gamma^{(1,2)} + \gamma^{(1)})(1 + \gamma^{(1)})}$$

Коэффициент относительной диффузии для малоинерционных частиц пропорционален параметру инерционности $\Omega^{(1)}$. В случае инерционных частиц $D_u^{(1,2)} \sim 1/\sqrt{\Omega^{(1)}}$.



Фиг. 3

При $\Omega^{(a)} \ll 1$ из (2.9) и (3.3), (3.4) находим формулу для коэффициента коагуляции мелких частиц в результате неоднородности мелкомасштабного поля пульсаций скорости несущей фазы

$$K(a^{(1)}, a^{(2)}) = 4 \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/2} (a^{(1)} + a^{(2)})^3 \left(\frac{1 - k_n}{1 + k_n}\right) \left(\frac{\varepsilon}{v}\right)^{1/2} \quad (3.8)$$

При $k_n = 0$ формула (3.8) совпадает с выражениями [4, 6] для коэффициента коагуляции капель.

Фигура 3 иллюстрирует поведение хаотической относительной скорости частиц из полистирола диаметром d (мкм) в турбулентном изотропном потоке газа за решеткой (характеристики течения соответствуют экспериментальным данным [18]). На фиг. 3, а представлена относительная скорость, обусловленная только неоднородностью турбулентного поля мелкомасштабных пульсаций [4] (формула следует из (3.3), (3.4) при $\Omega^{(a)} \ll 1$ в пренебрежении инерционным переносом и скольжением частиц). Фиг. 3, б показывает результаты расчета по предлагаемой модели. Из сравнения фиг. 3, а и 3, б следует качественное и количественное отличие в характере изменения относительной пульсационной скорости для различных диаметров частиц. На фиг. 3, б видно наличие максимума в скорости относительного движения частиц близких размеров.

Для коагуляции частиц (капель) после их сближения необходимо преодолеть энергетический барьер E_0 , обусловленный, например, короткодействующими межмолекулярными силами [1—3]. Величина отношения энергии этого барьера к кинетической энергии частиц при их относительном движении может быть использована для расчетов параметра k_n

$$k_n = 1 - \exp\left(\frac{-E_0}{E_w}\right), \quad E_w = \left(\frac{1}{m^{(1)}} + \frac{1}{m^{(2)}}\right)^{-1} \frac{\langle (w^{(1,2)})^2 \rangle}{2}$$

где $m^{(1)}, m^{(2)}$ — массы сталкивающихся частиц.

Таким образом, привлечение аппарата функции плотности вероятности распределения скоростей и координат частиц в пространстве позволило корректно описать процесс столкновения и коагуляции частиц в турбулентном потоке.

Автор выражает искреннюю благодарность фирме ТЕХНОСЕРВ за поддержку при выполнении этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лапуга Е. Я., Логинов В. И. О ядрах кинетического уравнения коалесценции // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 2. С. 32—38.
2. Синайский Э. Г. Коагуляция капель в турбулентном потоке вязкой жидкости // Коллоид. ж. 1993. Т. 55. № 4. С. 91—103.
3. Kumar S., Kumar R., Gandhi K. S. A new model for coalescence efficiency of drops in stirred dispersions // Chem. Eng. Sci. 1993. V. 48. № 11. P. 2025—2038.
4. Saffman P. G., Turner J. S. On the collision of drops in turbulent clouds // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. Pt 1. P. 16—30.
5. Delichatsios M. A., Probstein R. F. Coagulation in turbulent flow: Theory and experiment // J. Colloid Interface Sci. 1975. V. 51. № 3. P. 394—405.
6. Williams M. M. R. A unified theory of aerosol coagulation // J. Phys. D: Appl. Phys. 1988. V. 21. № 6. P. 875—886.
7. Душкин А. Л. Турбулентная коагуляция капель конденсата в цилиндрическом канале // Теплофизика высоких температур. 1989. Т. 27. № 2. С. 335—340.
8. Rambo P. W., Denavit J. Time-implicit fluid simulation of collisional plasmas // J. Computat. Phys. 1992. V. 98. № 2. P. 317—331.

9. Abrahamson J. Collision rates of small particles in a vigorously turbulent fluids//Chem. Eng. Sci. 1975. V. 30. № 11. P. 1371—1379.
10. Yui S. Collision rate of small particles in a homogeneous and isotropic turbulence//AIChE J. 1984. V. 30. № 5. P. 802—807.
11. Деревич И. В., Ерошенко В. М. Расчет осредненного скоростного скольжения фаз при турбулентном течении дисперсных потоков в каналах//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 2. С. 69—78.
12. Деревич И. В., Ерошенко В. М. Граничные условия для уравнений тепло- и массопереноса грубодисперсных аэрозолей в турбулентном потоке//Инж.-физ. журн. 1991. Т. 61. № 4. С. 546—553.
13. Деревич И. В. Статистическое описание турбулентного потока газозвеси крупных частиц, соударяющихся со стенками канала//Инж.-физ. журн. 1994. Т. 66. № 4. С. 387—397.
14. Медников Е. П. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М.: Наука, 1981. 174 с.
15. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. М. Абрамовица, И. М. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
16. Sawford B. L. Reynolds number effects in Lagrangian stochastic models of turbulent dispersion//Phys. Fluids. A. 1991. V. 3. № 6. P. 1577—1586.
17. Frenkiel F. N., Klebanoff P. S. Statistical properties of velocity derivatives in a turbulent field//J. Fluid Mech. 1971. V. 48. Pt 1. P. 183—208.
18. Wells M. R., Stock D. E. The effects of crossing trajectories on the dispersion of particles in turbulent flow//J. Fluid Mech. 1983. V. 136. P. 31—62.

Москва

Поступила в редакцию
5.1.1995