

УДК 532.59:534.12

© 1995 г. А. В. МАРЧЕНКО

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГРЯДЫ ТОРОСОВ В УПРУГОМ ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ, ПЛАВАЮЩЕМ НА ПОВЕРХНОСТИ БЕСКОНЕЧНО ГЛУБОКОЙ ЖИДКОСТИ

Исследованы свойства собственных колебаний гряды торосов в упругом ледяном покрове. Получены характерные формы дисперсионных кривых для симметричных и антисимметричных краевых волн, распространяющихся вдоль тороса и экспоненциально затухающих при удалении от него. Показано, что собственные колебания могут вызывать разрушение ледяного покрова на некотором удалении от тороса. Этот процесс приведет к формированию параллельной гряды торосов при сжатии.

Морской ледяной покров сильно неоднороден в горизонтальных направлениях [1, 2]. Характерными примерами неоднородностей являются трещины и торосы, формирующиеся в ледяном покрове при его деформациях под влиянием внешних нагрузок (ветра, морских течений и т. п.). Представляет интерес исследование влияния этих неоднородностей на спектральный состав колебаний ледяного покрова.

В [3, 4] были исследованы краевые волны, распространяющиеся вдоль трещины в ледяном покрове, плавающем на поверхности слоя жидкости конечной глубины, и экспоненциально затухающие при удалении от нее. Оказывается, что глубина существенно влияет на свойства краевых волн этого типа. В данной работе показано, что при стремлении глубины к бесконечности краевые волны исчезают.

Собственные колебания гряды торосов в ледяном покрове не исследовались ранее. С физической точки зрения основными свойствами тороса являются его инерция и упругость при деформациях изгиба и кручения. Поэтому в данной работе рассмотрена модельная задача о собственных колебаниях упругого стержня, замороженного в упругий ледяной покров, плавающий на поверхности жидкости бесконечной глубины.

1. Потенциальные движения в бесконечно глубокой идеальной жидкости, находящейся под упругой пластиной, описываются в линейном приближении уравнением Лапласа с граничными условиями

$$\Delta\varphi = 0, \quad z < 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (g + D\Delta_-^2) \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_- = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Здесь введены обозначения: φ -потенциал скоростей, η -возвышение поверхности жидкости над горизонтальным положением равновесия, t — время, x , y и z — гори-

горизонтальные и вертикальные координаты. Жесткость пластины D определяется формулой

$$D = \frac{Eh^3}{12\rho(1-\nu^2)}$$

где E , ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона пластины, ρ — плотность жидкости. Введем безразмерные переменные, обозначаемые буквами со штрихами

$$(x, y, z) = l(x', y', z'), \quad t = \omega^{-1}t', \quad l = (D/g)^{1/4}, \quad \eta = a\eta', \quad \varphi = a\omega l\varphi'$$

Здесь ω^{-1} , l — временной и пространственный масштабы, a — амплитуда волн. Решения (1.1), (1.2), соответствующие плоским волнам, имеют в безразмерных переменных вид

$$\varphi = A \exp [i(\theta + k_0 x') + \lambda_0 z'], \quad \eta = A\lambda_0 \exp [i(\theta + k_0 x')] \quad (1.3)$$

$$\theta = \mu y' + t'$$

где k_0 — действительный корень уравнения

$$x(\gamma, \lambda) \equiv \gamma^2 - \lambda(1 + \lambda^4) = 0 \quad (1.4)$$

$$\lambda = \sqrt{\mu^2 + k^2}, \quad \gamma^2 = \omega^2 l/g$$

Условие существования действительных корней $\pm k_0$ уравнения (1.4) имеет вид

$$\gamma^2 > \gamma_*^2(\mu) \equiv \mu(1 + \mu^4) \quad (1.5)$$

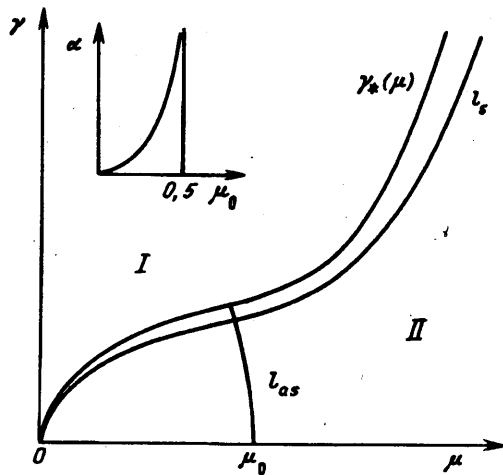
При выполнении (1.5) существуют плоские волны с волновым числом μ в направлении y и частотой γ . При $\gamma^2 < \gamma_*^2$ корни $\pm k_0$ чисто мнимые. Случай $\gamma = \gamma_*$ соответствует плоской волне с фронтом, параллельным оси x , при этом $k_0 = 0$.

Уравнение (1.4) всегда имеет относительно λ один действительный корень λ_0 и четыре комплексных корня $\lambda_1, \lambda_1^*, \lambda_2, \lambda_2^*$, для которых выполняется $\text{Re}\lambda_1 > 0$, $\text{Re}\lambda_2 < 0$. Если двулистная риманова поверхность, на которой определена функция $\lambda(k)$, разрезана вдоль мнимой оси k при $|\text{Im}k| > \mu$, то λ_1 и λ_2 лежат на разных листах. Области существования действительных и мнимых корней $\pm k_0$ на плоскости γ, μ обозначены на фиг. 1 соответственно I и II.

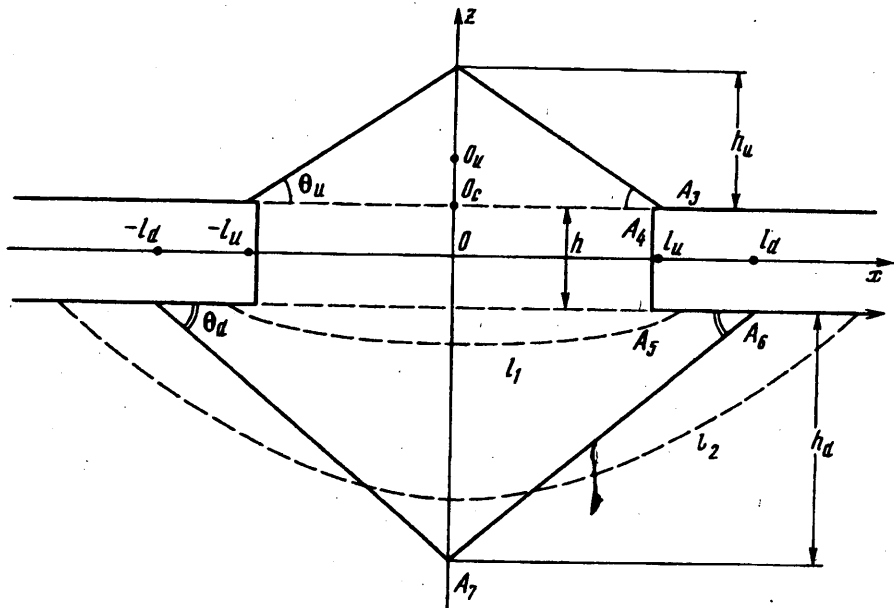
2. Предположим, что в ледяном покрове имеется гряда торосов. Опишем структуру тороса, пользуясь материалами монографий [1, 2]. Торос состоит из кусков льда, вытесненных на поверхность ледяного покрова и под воду. Контур сечения тороса вертикальной плоскостью $y = \text{const}$ представлен на фиг. 2 замкнутой ломаной $A_1 \dots A_{10} A_1$. Плотность заполнения тороса кусками льда $\psi = 0,5-0,6$.

В верхней части тороса куски льда смерзаются и с течением времени образуют монолитную конструкцию с упругими свойствами на масштабах, превышающих характерные размеры кусков льда. Будем предполагать, что область смерзания ограничена (см. фиг. 2) сверху ломаной линией, проходящей через точки $A_1 \dots A_5, A_9, A_{10}$, и снизу пунктирной кривой l_1 . Из физических соображений следует, что кривая l_1 должна быть достаточно близко расположена к нижней границе ледяного покрова, проходящей через точки A_5, A_9 . Отрезки $A_4 A_5$ и $A_9 A_{10}$ являются границами невостороненного ледяного покрова.

Нижняя подводная часть тороса — непрочное образование, так как куски льда не смерзаются в ней. При этом с течением времени вследствие перемещения под водой некоторых кусков льда профиль тороса выравнивается так, как показано пунктирной линией l_2 на фиг. 2. В связи с тем что плотность льда ρ_l близка к плотности воды ρ , полагается, что при $z < h/2$ пространство между кусками льда заполнено водой.



Фиг. 1



Фиг. 2

Полагается, что в отсутствие внешних возмущений торос находится в положении изостатического равновесия

$$\left(\frac{l_d}{l_u}\right)^2 = \frac{\rho}{\rho - \rho_l} \frac{\operatorname{tg} \theta_u}{\operatorname{tg} \theta_d} \quad (2.1)$$

Здесь θ_u , θ_d — углы ската надводной и подводной частей тороса.

Далее будут исследоваться изгибные и крутильные колебания тороса с характерными пространственными масштабами, значительно превышающими размеры сечения тороса. Торос будет моделироваться тонким упругим стержнем. Предполагается, что вклад в упругие свойства тороса дает только область смявшихся кусков льда. Вклад в инерционные свойства тороса вносит весь объем тороса, включая воду, имеющуюся между кусками льда в торосе.

Уравнения изгибных колебаний торося запишем в виде [5]

$$M_b \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2} + C_b \frac{\partial^4 \eta_0}{\partial y^4} - F^+ - F^- = 0, \quad C_b = E_b I_x \quad (2.2)$$

Здесь η_0 — смещение торося в вертикальном направлении, M_b — полная масса единицы длины торося в направлении y , включая воду между кусками льда, E_b — модуль Юнга торося, I_x — момент инерции сечения смерзшейся части торося относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс сечения, F^+ , F^- — силы, действующие на торося со стороны ледяного покрова при его деформации.

Полная масса торося M_b может быть оценена при помощи формулы

$$M_b = \rho_l \psi (l_u h_u + l_d h_d + 2l_u h) + \rho (1 - \psi) (l_d h_d + 2l_u h) \quad (2.3)$$

Для определения I_x необходимо найти центр тяжести смерзшейся части торося. Центр тяжести верхней части торося, ограниченной треугольником $A_1 A_2 A_3$, находится в точке O_u с координатами $x = 0$, $z = h/2 + h_u/3$. Центр тяжести средней части торося, ограниченной прямоугольником $A_4 A_5 A_9 A_{10}$, находится в начале координат. Заметим, что в средней части торося упаковка кусков льда под влиянием сжатия повышена и положение нижней границы l_1 точно определить невозможно. Поэтому для оценок положим, что центр тяжести смерзшейся части находится в точке O_c с координатами $x = 0$, $z = h/2$ (фиг. 2). Тогда для I_x справедлива формула [5]

$$I_x = \psi \int_{S_m} \left(z - \frac{h}{2} \right)^2 ds \quad (2.4)$$

где S_m — площадь сечения смерзшейся части торося. Вычисляя интеграл (2.4) по площади фигуры, ограниченной замкнутой ломаной $A_1 \dots A_5 A_9 A_{10} A_4$, находим

$$I_x \approx 1/2 \psi (1/3 h_u^3 + 2h l_u^3) \quad (2.5)$$

Уравнения крутильных колебаний торося запишем в виде [5]

$$C_t \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - I \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - M^+ + M^- = 0 \quad (2.6)$$

Здесь Φ — угол поворота сечения торося относительно положения равновесия, C_t — крутильная жесткость смерзшейся части торося, I — момент инерции полного сечения торося относительно центра тяжести его смерзшейся части, M^+ , M^- — крутящие моменты, действующие на торося со стороны ледяного покрова при его деформации.

Полагая, что центр инерции сечения смерзшейся части торося находится в O_c , находим

$$\begin{aligned} I &= \rho_l \psi \int_S \left[x^2 + \left(z - \frac{h}{2} \right)^2 \right] ds + \rho (1 - \psi) \int_{S_w} \left[x^2 + \left(z - \frac{h}{2} \right)^2 \right] ds = \\ &= \frac{1}{3} \rho_l \psi \left(\frac{h_u^3}{3} + \frac{h_d^3}{3} + 2h l_u^3 \right) + \frac{1}{3} \rho (1 - \psi) \left(\frac{h_d^3}{3} + 2h l_u^3 \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь S — полное сечение торося, S_w — фигура, ограниченная замкнутой ломаной $A_4 \dots A_{10} A_4$.

Для оценки крутильной жесткости используем формулу для стержня эллиптического сечения с полуосями l_u , h_u [5]

$$C_t \approx E_t \psi \frac{h_u^3 l_u^3}{h_u^2 + l_u^2}$$

где E_t — упругий модуль сдвига.

Проведем численные оценки инерционных и упругих параметров торося. Полагая $\rho_l \approx 0,9 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho \approx 10^3$ кг/м³, $\theta_u \approx \theta_d \approx 30-45^\circ$, из (2.1) находим

$h_u \approx i_u$, $h_d \approx l_d$, $l_d/l_u \approx 3$, т. е. высота подводной части торося примерно в 3 раза меньше толщины его подводной части. Для полной погонной массы торося, моментов инерции и крутильной жесткости имеем

$$M_b \approx \rho h_u (9,5h_u + 2h), \quad I_x \approx 1,7h_u^3 (1/3h_u + 2h) \quad (2.8)$$

$$I \approx 2\rho h_u^3 (7h_u + 1/3h), \quad C_t \approx 1/2Eh_u^4$$

3. Будем исследовать колебания в системе жидкость — ледяной покров — торося с характерными горизонтальными масштабами, значительно превышающими характерный масштаб торося h_u . Торося при этом может рассматриваться как точечная неоднородность при $x = 0$ в сечениях упругой пластины вертикальными плоскостями $y = \text{const}$.

В местах соединения пластины с торося должны быть определены перерезывающие силы F^\pm и изгибающие моменты M^\pm , действующие на края пластины при $x \rightarrow \pm 0$. Полагая, что зависимость η от t , y определяется в безразмерных переменных множителем $\exp i\theta$, имеем [6]

$$F^\pm = \mp \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu'^2 \mu^2 \right) \eta, \quad \nu' = 2 - \nu \quad (3.1)$$

$$M^\pm = - \lim_{x \rightarrow \pm 0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu \mu^2 \right) \eta$$

Здесь и далее штрихи у безразмерных переменных опускаются. Из (2.2), (2.6) находим

$$\delta_b \eta_0 - F^+ - F^- = 0, \quad \delta_i \varphi_0 + M^+ - M^- = 0 \quad (3.2)$$

$$\delta_b = D_b \mu^4 - m_b \gamma^2, \quad \delta_i = D_i \mu^2 - m_i \gamma^2$$

$$D_b = \frac{C_b}{\rho g l^3}, \quad D_i = \frac{C_i}{\rho g l^3}, \quad m_b = \frac{M_b}{\rho l^2}, \quad m_i = \frac{I}{\rho l^4}, \quad \frac{a}{l} \Phi_0 = \Phi$$

Предполагается, что в местах соединения пластины с торося выполняется условие непрерывности смещений

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \eta = \eta_0 \quad (3.3)$$

Для моментов, действующих на края пластины, примем упругий закон, при котором момент, действующий на край пластины, пропорционален изменению угла между срединной линией пластины в направлении оси x и осью, жестко связанной с торося и имеющей вертикальное направление в положении равновесия.

$$M^\pm = \mp \alpha \lim_{x \rightarrow \pm 0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \Phi_0 \right) \quad (3.4)$$

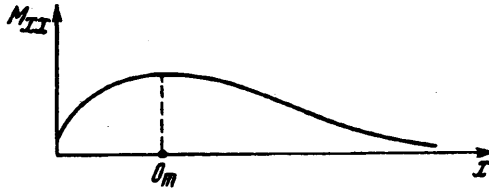
Для симметричных или антисимметричных относительно плоскости $x = 0$ волн надо положить $\Phi_0 = 0$ или $\eta_0 = 0$ соответственно. При этом контактно-граничные условия (3.2)—(3.4) упрощаются. Из (2.2)—(2.5) следует для симметричных и антисимметричных волн:

$$M^+ = - \alpha \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \delta_b \lim_{x \rightarrow +0} \eta = 2F^+ \quad (3.5)$$

$$(\delta_i - 2\alpha) M^+ = - \alpha \delta_i \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \eta = 0 \quad (3.6)$$

Из (2.6) при $\alpha = \delta_b = 0$ вытекает контактно-граничное условие для симметричной волны, бегущей вдоль трещины с невзаимодействующими краями [6]

$$M^+ = F^+ = 0. \quad (3.7)$$



Фиг. 3

4. Нетривиальное решение (1.1), (1.2), ограниченное во всей области движения, при $\gamma^2 < \gamma_*^2$ дается формулами [6]

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_3(k)}{x(\gamma, \lambda)} e^{ikx + \lambda z} dk e^{i\omega t}, \quad \eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_3(k) \lambda}{x(\gamma, \lambda)} e^{ikx} dk e^{i\omega t} \quad (4.1)$$

$$P_3(k) = d_0 + d_1 k + d_2 k^2 + d_3 k^3$$

где $P_3(k)$ — полином с произвольными постоянными d_i , которые определяются из контактно-граничных условий. Вычисляя интегралы по вычетам в верхней или нижней полуплоскостях комплексного переменного k , находим

$$\eta = \sum_{i=0}^3 d_i [r_i(\pm k_0, \lambda_0) e^{\pm i k_0 x} + r_i(\pm k_1, \lambda_1) e^{\pm i k_1 x} + r_i(\mp k_1^*, \lambda_1^*) e^{\mp i k_1^* x} + J_i^{\pm}] \quad (4.2)$$

$$J_i^{\pm} = (\pm i)^i \frac{\gamma^2}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{n^i \sqrt{n^2 - \mu^2} e^{\mp n x}}{\gamma^4 + (n^2 - \mu^2) [1 + (n^2 - \mu^2)^2]} dn, \quad r_i(x, y) = -x^{i-1} \frac{y^2}{1 + 5y^4}$$

Знак плюс соответствует области $x > 0$, минус — области $x < 0$.

Подставляя (4.2) в контактно-граничные условия, получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений для определения d_i . Видно, что число постоянных d_i в решении (4.1), (4.2) совпадает с числом контактно-граничных условий. Условием существования нетривиальных решений для d_i является обращение в ноль определителя системы алгебраических уравнений.

При рассмотрении симметричных или антисимметричных волн в (4.1), (4.2) надо соответственно положить $d_1 = d_3 = 0$ или $d_0 = d_2 = 0$. Для определения $d_{0,2}, d_{1,3}$ из (3.5), (3.6) имеем системы однородных линейных алгебраических уравнений второго порядка с определителями Δ_s, Δ_{as} . Условие существования нетривиальных решений сводится к нахождению действительных решений уравнений

$$\Delta_s(\gamma, \mu) = 0, \quad \Delta_{as}(\gamma, \mu) = 0 \quad (4.3)$$

которые являются дисперсионными соотношениями между частотой краевой волны и ее волновым числом в направлении оси y .

5. Исследование существования решений (4.3) проводилось численно с помощью сканирования функций $\Delta_s(\gamma, \mu), \Delta_{as}(\gamma, \mu)$ в плоскости (γ, μ) при $0 < \gamma < \gamma_*$ при различных значениях параметров торола $D_b, D_t, m_b, m_t, \alpha$, соответствующих реальной физической ситуации.

Рассматривались следующие параметры ледяной пластины и торола [7]:

$$E = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \nu = 0.34, \quad h = 1 \text{ м} \quad (5.1)$$

$$E_b = E_t = 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad h_b = h_t = 3 \text{ м}$$

Из (5.1) следует

$$D_b \approx 43,8, \quad D_t \approx 12,9, \quad m_b \approx 0,58, \quad m_t \approx 0,05 \quad (5.2)$$

$$l \approx 12,6 \text{ м}, \quad \omega \approx \gamma \text{ с}^{-1}$$

Расчеты проводились для $\gamma = 0 + 10$ и $0 \leq \alpha < 100$, а также в предельном

случае $1/\alpha = 0$. Случай больших α соответствует жесткой заделке кромки ледяного покрова в торосе. При $\alpha = 0$ кромка льда может свободно поворачиваться в месте контакта с торосом.

Дисперсионные кривые для симметричных волн, распространяющихся вдоль трещины или тороса, в начале координат имеют касание высокого порядка с осью γ , расположены немного ниже границы запрещенной зоны $\gamma = \gamma_*(\mu)$ и повторяют ее форму. Их качественное поведение изображено на фиг. 1 кривой l_s .

При малых α график типичного распределения изгибающего момента M_{xx} представлен на фиг. 3. Видно, что M_{xx} достигает максимума на некотором удалении от тороса в точке O_m . В этой точке при достаточно большой амплитуде волн может наступить разрушение ледяного покрова и образование новой гряды торосов при сжатии льда. Гряда новых торосов будет параллельна ранее образовавшейся гряде, проходящей через точку $x = 0$. Этот механизм объясняет существование параллельных гряд торосов в морских льдах.

Заметим, что в [3, 4] были исследовались краевые волны, распространяющиеся вдоль трещины в упругой пластине, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины. В этих работах контактно-граничное условие для перерезывающих усилий было сформулировано неверно. Именно в выражениях аналогичных формулам (3.1) вместо v' использовался коэффициент v .

Качественный вид дисперсионных кривых, соответствующих антисимметричным волнам, распространяющимся вдоль тороса, представлен на фиг. 1 кривой $l_{as,r}$. Для различных значений α они начинаются на оси μ при $\gamma = 0$, $0 < \mu < 0,5$, имеют отрицательную дисперсию (различное направление групповой и фазовой скоростей) и заканчиваются на границе запрещенной зоны при $\gamma = \gamma_*(\mu)$. Кривые $l_{as,r}$ мало отличаются друг от друга при $\alpha > 10$. Зависимость координаты μ_0 начальной точки $l_{as,r}$ от α представлена на фиг. 1.

Антисимметричные волны, распространяющиеся вдоль трещины во льду и удовлетворяющие контактно-граничным условиям (3.7) отсутствуют.

Работа выполнена при финансовой поддержке ISF (MFE000, MFE300).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зубов Н. Н. Льды Арктики. М.: Изд-во Главсевморпути, 1944. 350 с.
2. Доронин Ю. П., Хейсин Д. Е. Морской лед. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 318 с.
3. Марченко А. В., Семенов А. Ю. Краевые волны в мелкой жидкости под упругой пластиной с трещиной//Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 4. С. 185—189.
4. Гольдштейн Р. В., Марченко А. В., Семенов А. Ю. Краевые волны в жидкости под упругой пластиной с трещиной//Докл. РАН. 1994. Т. 339. С. 331—335.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
6. Марченко А. В. Дифракция поверхностных волн на трещине в ледяном покрове//Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 2. С. 93—102.
7. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 384 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.IX.1994