МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1995

УДК 532.546

 С. Е. ХОЛОДОВСКИЙ

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В СРЕДАХ С ПРОТЯЖЕННОЙ ТРЕЩИНОЙ (ЗАВЕСОЙ)

Предложен метод построения потенциалов, описывающих упругий режим фильтрации, индуцированной начальными условиями, в средах с протяженной трещиной-дренажом или завесой-экраном, которые, в частности, используются при экранировании загрязненных зон. Трещина и завеса моделируются бесконечно тонкими слоями с бесконечно большой для трещины и бесконечно малой для завесы проницаемостью. Для установившихся процессов подобные задачи рассматриваются в [1—3].

Рассмотрим на плоскости x, y кусочно-однородную среду, разделенную трещиной или завесой $x=0$ на зоны D_1 $(x<0,\ y\in R)$ и D_2 $(x>0,\ y\in R)$ с проницаемостью соответственно K_1 и K_2. Для потенциалов φ_i в зонах D_i при упругом режиме фильтрации имеем уравнение

$$\partial_x^2\varphi_i+\partial_y^2\varphi_i=\frac{1}{b}\,\partial_t\varphi_i;\quad \partial_x^n=\frac{\partial^n}{\partial x^n},\quad b=\frac{K_i}{\gamma\beta_i} \tag{1}$$

Здесь γ — весовая плотность жидкости, β_i характеризуют сжимаемость жидкости и пористой среды в D_i [4], при этом полагаем, что $K_1/\beta_1=K_2/\beta_2$, в частности параметры сред в D_i могут совпадать. Для вывода условий сопряжения на трещине (завесе) заменим прямую $x=0$ слоем D_0 $(0<x<l,\ y\in R)$ с проницаемостью K_0 при классических условиях сопряжения на ∂D_0 и вычислим приращения потенциала и потока на ∂D_0

$$\varphi_{2|l}-\varphi_{1|0}=\varphi_{0|l}-\varphi_{0|0}=lK_0^{-1}v_{0|p} \tag{2}$$

$$v_{2|l}-v_{1|0}=v_{0|l}-v_{0|0}=lK_0\partial_x^2\varphi_{0|q} \tag{3}$$

$$p,\ q\in[0,l],\quad \varphi_{|l}\equiv\varphi_{|x=l},\quad v_i=K_i\partial_x\varphi_i,$$

Здесь φ_0 — потенциал в D_0, удовлетворяющий уравнению (1) при $b=b_0=K_0(\gamma\beta_0)^{-1}$.

Пусть слой D_0 вырождается в трещину, т. е. $l\to 0$, $K_0\to\infty$, $lK_0\to A$ [3], при этом $b_0\to\infty$. Из равенств (2) следует $\varphi_{0|l}\to\varphi_{0|0}=\varphi_{1|0}$ или в силу принципа максимума [5] $\varphi_{0|q}\to\varphi_{1|0}$. Дифференцируя последнее соотношение по свободным переменным и учитывая уравнение (1) для φ_0, найдем $\partial_x^2\varphi_{0|q}=b_0^{-1}\partial_t\varphi_0-\partial_y^2\varphi_{0|q}\to-\partial_y^2\varphi_{1|0}$.

Отсюда с учетом (2), (3) получим обобщенные условия сопряжения на трещине

$$x=0:\ \varphi_2=\varphi_1,\quad K_2\partial_x\varphi_2-K_1\partial_x\varphi_1=-A\partial_y^2\varphi_1 \tag{4}$$

Если слой D_0 вырождается в завесу, т. е. $l\to 0$, $K_0\to 0$, $l/K_0\to B$ [3], то из равенств (3) следует

$$v_{0|l}\to v_{0|0}=v_{1|0}\ \text{или}\ v_{0|p}\to v_{1|0}$$

Отсюда получим обобщенные условия сопряжения на завесе

$$x = 0:\ \varphi_2 - \varphi_1 = BK_1\partial_x\varphi_1,\ K_2\partial_x\varphi_2 = K_1\partial_x\varphi_1 \tag{5}$$

Условия типа (4), (5) на трещине и завесе при стационарном режиме получены в [1, 6], исходя из дополнительных гипотез.

Начальные условия имеют вид

$$t = 0:\ \varphi_i = f_i(x, y),\ (x, y) \in D_i \tag{6}$$

при этом полагаем, что заданные функции f_i абсолютно интегрируемые в D_i и удовлетворяют условиям (4) и (5) соответственно в случае трещины и завесы $x = 0$.

Таким образом, для потенциалов φ_i имеем задачи (1), (4), (6) и (1), (5), (6). Отметим, что при решении указанных задач классическим методом Фурье для выполнения краевых условий (4)—(6) недостаточно параметров — коэффициентов Фурье, входящих в потенциалы. Метод интегральных преобразований также вызывает большие трудности, так как функции f_i не конкретизируются.

Суть предлагаемого метода заключается в том, что сначала составляется такая дифференциальная комбинация произвольных четных и нечетных по x функций, которая автоматически удовлетворяет условиям на трещине (завесе). Затем потенциалы разлагаются по $\sin\lambda x$ и $\cos\lambda x$ в виде указанных комбинаций, удовлетворяющих уравнению и условиям сопряжения при произвольных коэффициентах Фурье, которые определяются из начальных условий.

Рассмотрим задачу (1), (4), (6). Если функции $f_i(x, y)$ определены в D_i и удовлетворяют условиям (4), то существуют нечетные по x функции h_1 и h_2 класса C^3, такие, что

$$f_1 = \frac{1}{K_1}h_1 + \partial_x h_2,\ f_2 = \frac{1}{K_2}h_1 + \partial_x h_2 - \frac{A}{K_2}\partial_y^2 h_2 \tag{7}$$

$$x > 0:\ h_1 = \frac{K_1K_2}{K_1 + K_2}\left[f_2(x, y) - f_1(-x, y)\right] + K_1\int_0^x \partial_x F(x, y, \xi)\, d\xi \tag{8}$$

$$\begin{gathered} h_2 = \int_0^x F(x, y, \xi)\, d\xi \\ F(x, y, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_1(\xi, \eta)}{\sqrt{4\pi\alpha(x - \xi)}} \exp\left[-\frac{(y - \eta)^2}{4\alpha(x - \xi)}\right] d\eta \\ \Phi_1(x, y) = \frac{K_2 f_2(x, y) + K_1 f_1(-x, y)}{K_1 + K_2},\ \alpha = \frac{A}{K_1 + K_2} \end{gathered} \tag{9}$$

И обратно: если h_i — произвольные нечетные функции класса C^3, то функции f_i (7) удовлетворяют условиям (4).

Действительно, записывая первое равенство системы (7) при $x > 0$

$$f_1(-x,\ y) = -K_1^{-1}h_1(x,\ y) + \partial_x h_2\ (x,\ y)$$

и исключая из этой системы h_1, для функции h_2 получим уравнение параболического типа $\alpha\partial_y^2 h_2 - \partial_x h_2 = -\Phi_1(x, y)$ при начальном условии $h_2(0, y) = 0$, которое следует из требования нечетности h_2. Решение последней задачи Коши имеет вид (9) [5], при этом функция h_1 определяется из первого равенства (7) в виде (8). При $x < 0$ функции h_i продолжаются по нечетному закону. Обратное утверждение очевидно.

Представим искомые потенциалы φ_i и D_i в виде (7)

$$\varphi_1 = \frac{1}{K_1}M_1 + \partial_x M_2,\ \varphi_2 = \frac{1}{K_2}M_1 + \partial_x M_2 - \frac{A}{K_2}\partial_y^2 M_2 \tag{10}$$

$$M_i = \int\int_0^\infty e^{-(\lambda^2+\mu^2)bt} \sin\lambda x \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\rho_j d\lambda d\mu$$

$$\rho_1 = \sin\mu y, \ \rho_2 = \cos\mu y \tag{11}$$

где a_{ij} — неизвестные параметры. Отсюда функции φ_i при условии возможности дифференцирования M_i под знаком интегралов удовлетворяют уравнению (1) и условиям сопряжения (4). Представляя начальные функции f_i в виде (7), где h_i строятся по формулам (8), (9), и разлагая функции h_1, $\partial_x h_2$ и $\partial_y^2 h_2$ с учетом их четности (нечетности) по x в интегралы Фурье, из начальных условий (6) найдем

$$a_{ij} = \frac{2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^\infty r_i\rho_j\sigma_i dx, \ \sigma_1 = \sin\lambda x, \ \sigma_2 = \cos\lambda x \tag{12}$$

где $r_1 = h_1, r_2 = \lambda^{-1}\partial_x h_2$, ρ_j имеют вид (11).

Рассмотрим задачу (1), (5), (6). Если функции $f_i(x, y)$ определены в D_i и удовлетворяют условиям (5), то существуют нечетная H_1 и четная H_2 по x функции класса C^2, такие, что

$$f_1 = \frac{1}{K_1}H_1 + H_2, \ f_2 = \frac{1}{K_2}H_1 + H_2 + B\partial_x H_1 \tag{13}$$

$$x > 0 : H_1 = \int_0^x e^{\beta(\xi-x)} \Phi_2(\xi, y)\, d\xi, \ H_2 = f_1(-x, y) + \frac{1}{K_1}H_1(x, y) \tag{14}$$

$$\Phi_2(x, y) = \frac{1}{B}[f_2(x, y) - f_1(-x, y)], \ \beta = \frac{K_1 + K_2}{BK_1K_2}$$

И обратно: для произвольных нечетной H_1 и четной H_2 по x функций класса C^2 функции (13) удовлетворяют условиям (5).

Действительно, исключая из системы (13), записанной при $x > 0$, функцию H_2, получим задачу Коши

$$\partial_x H_1 + \beta H_1 = \Phi_2(x, y), \ H_1(0, y) = 0$$

решение которой имеет вид (14), при этом H_2 определяется из первого равенства (13). Обратное утверждение очевидно.

Представим потенциалы φ_i и начальные функции f_i в виде (13)

$$\varphi_1 = \frac{1}{K_1}Q_1 + Q_2, \ \varphi_2 = \frac{1}{K_2}Q_1 + Q_2 + B\partial_x Q_1 \tag{15}$$

$$Q_i = \int\int_0^\infty e^{-(\lambda^2+\mu^2)bt} \sigma_i \sum_{j=1}^{2} c_{ij}\rho_j d\lambda d\mu$$

где ρ_j и σ_i имеют вид (11), (12), при этом в равенствах (13) H_i выражаются через f_i (14). Разлагая H_i (14) в интегралы Фурье, из начальных условий (6) найдем

$$c_{ij} = \frac{2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^\infty H_i\rho_j\sigma_i dx \tag{16}$$

Таким образом, решения поставленных задач строятся в квадратурах через заданные начальные функции по формулам (10), (12), (8), (9) и (15), (16), (14).

Рассмотрим конкретный случай. Пусть $f_2 = \delta(x - x_0)\delta(y)$, $f_1 = 0$, где δ — функция Дирака, т. е. в точке $(x_0, 0)$ при $t = 0$ имеет место мгновенный единичный источник и прямая $x = 0$ является завесой. Отсюда, вычисляя H_i (14) и c_{ij} (16), найдем φ_i в виде (15), где

$$c_{11} = 0,\ c_{12} = G(\beta s + \lambda c),\ c_{22} = GK_1^{-1}(\beta c - \lambda s)$$

$$G = 2\,[\pi^2 B(\lambda^2 + \beta^2)]^{-1},\ s = \sin \lambda x_0,\ c = \cos \lambda x_0$$

При отсутствии завесы ($B \to 0$) из полученных потенциалов и формулы 2.5.36 (1) [7] следуют известные формулы теоремы о прямой [8]:

$$\varphi_1 = \frac{2K_2}{K_1 + K_2} T(x, y, t),\ \varphi_2 = T(x, y, t) + \frac{K_2 - K_1}{K_1 + K_2} T(-x, y, t)$$

$$T = \frac{1}{4\pi b t} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2 + y^2}{4bt}\right)$$

Данный метод с сохранением его основных положений распространяется на решение пространственных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдурахманов И. М., Алишаев М. Г.* Плоская стационарная фильтрация в пласте, разделенном прямолинейной трещиной//Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 4. С. 173—177.
2. *Гуревич А. В., Крылов А. Л., Топор Д. Н.* Решение плоских задач гидродинамики пористых сред вблизи разрывных нарушений методом комплексного потенциала//Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 4. С. 846—850.
3. *Холодовский С. Е.* О фильтрации в пластах с кольцевыми неоднородными анизотропными зонами, трещинами и завесами//Докл. АН СССР. 1991. Т. 317. № 3. С. 606—608.
4. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
5. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 431 с.
6. *Пилатовский В. П.* Основы гидромеханики тонкого пласта. М.: Недра, 1966. 317 с.
7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.
8. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1972. 368 с.

Чита

Поступила в редакцию
16.VI.1994