

УДК 532.546

© 1995 г. Ю. Н. ГОРДЕЕВ

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПСЕВДОТРЕХМЕРНОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА В НЕПРОНИЦАЕМОМ ПЛАСТЕ

Рассматривается задача о распространении вертикальной трещины гидроразрыва в непроницаемых пластах или слабо проницаемых пластах на начальной стадии гидроразрыва в рамках псевдотрехмерной модели трещины Перкинса — Керна.

Одним из эффективных методов исследования сложных нелинейных систем уравнений является получение их автомодельных решений. В настоящее время для двумерных вертикальных трещин, расклиниваемых потоком ньютоновской или неньютоновской жидкости, найдено достаточно большое количество автомодельных решений как в рамках модели трещины, предложенной в [1, 2], так и в рамках модели Перкинса — Керна [3—6]. Результаты этих исследований приведены в монографии [7].

В реальных нефтеносных пластах распределение бокового горного давления является неоднородным. В простейшем случае профиль бокового горного давления является кусочно-однородным. Анализ распространения трещин гидроразрыва в таких неоднородных пластах может быть проведен только в рамках или трехмерных, или псевдотрехмерных моделей [8].

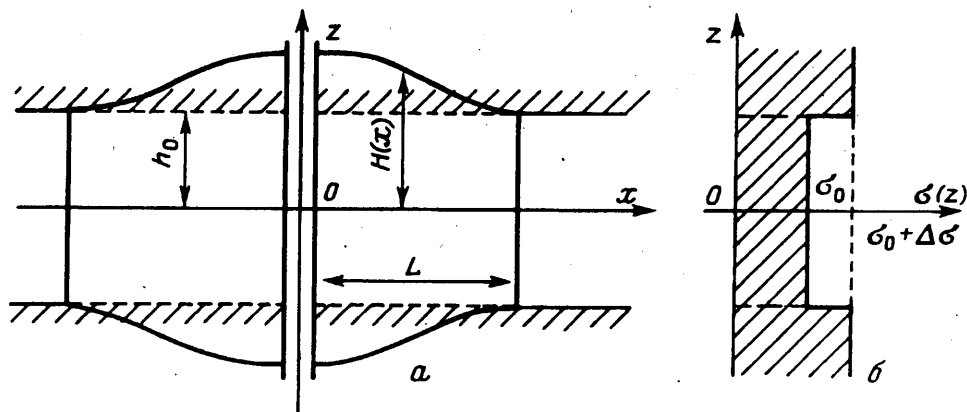
В данной работе для кусочно-однородного профиля бокового горного давления и при постоянном давлении закачки вязкой жидкости в трещину найдено автомодельное решение задачи о распространении трещины гидроразрыва. Предложен алгоритм решения обратной задачи восстановления характеристик пласта по параметрам, измеряемым в устье скважины.

1. Постановка задачи. Пусть при гидравлическом разрыве нефтеносного пласта образуется симметричная относительно скважины вертикальная трещина переменной высоты $2h(x, t)$ и большой протяженности в горизонтальном направлении $2l \gg 2h$ ($|x| \leq l$, фиг. 1, а). Следуя [6], нарушениями сплошности среды скважиной будем пренебрегать, упругие постоянные пласта и вмещающих его пород будем считать одинаковыми, давление жидкости в трещине p — постоянным по высоте трещины ($|z| \leq h(x, t)$) в каждом ее вертикальном сечении ($|x| = \text{const}$). Раскрытие трещины $2w(x, z)$ в каждом сечении ($|x| = \text{const}$) будем находить независимо как решение соответствующей плоской задачи теории упругости для разреза $|z| \leq h(x, t)$ в упругой плоскости (z, y) с заданными нагрузками на его берегах $p(x, t) - \sigma(x)$, где $\sigma(x)$ — боковое горное давление, t — время. Эпюру бокового горного давления $\sigma(x)$ возьмем в виде [7], $\sigma(x) = \sigma_0 - \Delta\sigma\theta(z^2 - h_0^2)$, где $2h_0$ — высота пласта, σ_0 — боковое горное давление в пласте, $\sigma_0 + \Delta\sigma$ — боковое горное давление во вмещающих породах, $\theta(z)$ — функция Хевисайда (фиг. 1, б).

При этих предположениях раскрытие трещины может быть представлено в виде [9]

$$2w(x, z, t) = \frac{4(1-\nu)}{\pi G} h(x, t) \int_{\xi}^l \int_0^x \frac{[p(x, t) - \sigma(h\xi)] d\xi \zeta d\zeta}{\sqrt{\xi^2 - \zeta^2} \sqrt{\xi^2 - z^2}} \quad (1.1)$$

$$\xi = z/h(x, t) \quad |x| \leq l, \quad |z| \leq h(x, t)$$



Фиг. 1

В (1.1) переменные x и t являются параметрами; ν — коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига.

Ограничимся рассмотрением непроницаемых пластов, т. е. слабо проницаемых пластов на начальной стадии гидроразрыва, когда утечками в пласт можно пренебречь.

В этом случае течение жидкости в трещине будем описывать уравнениями движения и непрерывности, осредненными по раскрытию и по вертикальному сечению $|x| = \text{const}$

$$u^n = -B_n w^n \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle w \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle wu \rangle = 0 \quad (1.3)$$

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2h_0} \int_{-h(x,t)}^{h(x,t)} f(z) dz$$

Здесь u — скорость движения в трещине, а m , n и B_n — некоторые постоянные.

Степенной закон сопротивления (1.2) описывает медленные течения псевдопластических жидкостей со степенным реологическим законом в узкой щели [7]

$$\dot{\epsilon} = K\tau^m, \quad m = n + 1, \quad B_n = \left(\frac{n}{1 + 2n} \right)^n K^{-1}, \quad 0 < n \leq 1$$

где K — коэффициент consistency, τ — касательные напряжения сдвига, $\dot{\epsilon}$ — скорость сдвига.

Если $n = 1$, то показатель consistency переходит в вязкость жидкости μ , а (1.2) — в формулу Буссинеска для вязкой ньютоновской жидкости в узкой щели. В случае быстрых течений, полагая в (1.2) $m = 1$, $n = 2$, $B_n = (\rho\lambda)^{-1}$, получим квадратичный закон сопротивления, отвечающий турбулентным течениям ньютоновской жидкости [10]. Здесь ρ — плотность жидкости, а λ — коэффициент сопротивления, зависящий в общем случае от числа Рейнольдса Re и относительной шероховатости стенок трещины.

В силу симметрии задачи относительно оси $x = 0$ далее будем рассматривать только правую половину трещины $x \geq 0$. Высоту трещины в каждом вертикальном сечении $x = \text{const}$ будем определять из критерия разрушения [2]

$$\int_0^1 \frac{[p(x,t) - \sigma(h\xi)]}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \frac{K_I}{\sqrt{2h(x,t)}} \approx 0 \quad (1.4)$$

где K_I — модуль сцепления.

В (1.4) сделано предположение [11], что в механике горных пород для сколько-нибудь значительных размеров трещин модулем сцепления можно пренебречь.

Уравнения (1.1) — (1.4) дополняются условием «непротекания» в концах трещины для осредненного одномерного потока, условием плавного смыкания поверхностей трещины в ее концах (аналогом условия Христиановича [1]) и начальными условиями

$$\dot{l}(t) = \frac{dl(t)}{dt} = \langle u \rangle, \quad p = \sigma_0, \quad x = l(t) \quad (1.5)$$

$$l(0) = l_0, \quad p(x, 0) = p^0(x) \quad (1.6)$$

Условие, определяющее режим нагнетания жидкости в трещину, зададим в виде давления нагнетания, т. е. давления, осредненного по высоте

$$p(0, t) = p_0(t) \quad (1.7)$$

При принятых предположениях о постоянстве давления жидкости в каждом вертикальном сечении и ступенчатом характере бокового горного давления в выражениях для критерия разрушения (1.4) и раскрытия трещины (1.1) они принимают вид

$$h(x, t) = \frac{h_0}{\cos \varphi}, \quad \varphi = \frac{\pi(p(x, t) - \sigma_0)}{2\Delta\sigma} \quad (1.8)$$

$$2w(x, z, t) = \frac{4(1-\nu)}{\pi G} h(x, t) \Delta\sigma \kappa(\zeta, \zeta_0(x, t)) \quad (1.9)$$

$$\kappa(\zeta, \zeta_0) = \zeta \ln \frac{|1 - \zeta_0 \lambda(\zeta, \zeta_0)/\zeta|}{1 + \zeta_0 \lambda(\zeta, \zeta_0)/\zeta} - \zeta_0 \ln \frac{|1 - \zeta_0 \lambda(\zeta, \zeta_0)|}{1 + \zeta_0 \lambda(\zeta, \zeta_0)}$$

$$\lambda(\zeta, \zeta_0) = \sqrt{\frac{1 - \zeta^2}{1 - \zeta_0^2}}$$

$$\zeta = \frac{z}{h(x, t)}, \quad \zeta_0 = \frac{h_0}{h(x, t)}$$

2. Автомодельные решения. Используя (1.9), можно вычислить средние величины, входящие в (1.3) и (1.5)

$$\langle w \rangle = w_0 H(x, t)^2 \int_0^1 \kappa(\zeta, \zeta_0(x, t)) d\zeta = \frac{\pi}{4} w_0 \operatorname{tg} \varphi \quad (2.1)$$

$$\langle q \rangle = -q_0 l_0^{1/n} H(x, t)^{m/n+2} \left[\int_0^1 \kappa(\zeta, \zeta_0(x, t))^{m/n+1} d\zeta \right] \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \left| F^m \frac{\partial F}{\partial x} \right|^{1/n}$$

$$\langle u \rangle = \frac{\langle q \rangle}{\langle w \rangle} = - \frac{4q_0 l_0^{1/n} H(x, t)^{m/n+2}}{\pi w_0 \operatorname{tg} \varphi} \left[\int_0^1 \kappa(\zeta, \zeta_0(x, t))^{m/n+1} d\zeta \right] \times$$

$$\times \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \left| F^m \frac{\partial F}{\partial x} \right|^{1/n}$$

$$F(x, t) = \frac{\pi}{2\delta} \left(\frac{p}{\sigma_0} - 1 \right), \quad H(x, t) = \frac{h(x, t)}{h_0}, \quad \delta = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0},$$

$$w_0 = \frac{2(1-\nu)}{\pi G} h_0 \Delta\sigma, \quad q_0 = \left(\frac{2w_0^{n+m} B_n \sigma_0 \delta}{\pi l_0} \right)^{1/n}$$

В безразмерных переменных уравнения (1.2), (1.3), условия (1.5)—(1.7) и осредненные величины потока и скорости жидкости в трещине (2.1) примут вид

$$X = \frac{x}{l(t)}, \quad L = \frac{l(t)}{l_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad U = \frac{\langle u \rangle L^{1/n}}{u_0}, \quad Q = \frac{\langle q \rangle L^{1/n}}{q_0}, \quad W = \frac{\langle w \rangle}{w_0},$$

$$u_0 = \frac{q_0}{w_0}, \quad t_0 = \frac{w_0 l_0}{q_0} \quad (2.2)$$

$$L^{(n+1)/n} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\dot{L}}{L} X \frac{\partial}{\partial X} \right) W + \frac{\partial}{\partial X} Q = 0 \quad (2.3)$$

$$\dot{L} = dL/d\tau = U(1, \tau), \quad F(1, \tau) = 0 \quad (2.4)$$

$$L(0) = 1, \quad F(X, 0) = F^0(X) = \frac{\pi}{2\delta} \left(\frac{p^0(X)}{\sigma^0} - 1 \right) \quad (2.5)$$

$$F(0, \tau) = F_0(\tau) = \frac{\pi}{2\delta} \left(\frac{p_0}{\sigma_0} - 1 \right) = \gamma \quad (2.6)$$

$$Q(X, \tau) = -H(x, t)^{m/n+2} \left[\int_0^1 \kappa(\zeta, \zeta_0)^{m/n+1} d\zeta \right] \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial}{\partial X} F \right) \left| F^m \frac{\partial F}{\partial X} \right|^{1/n} \quad (2.7)$$

$$U(X, \tau) = -\frac{4H(x, t)^{m/n+2}}{\pi \operatorname{tg} \varphi} \left[\int_0^1 \kappa(\zeta, \zeta_0(x, t))^{m/n+1} d\zeta \right] \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \left| F^m \frac{\partial F}{\partial x} \right|^{1/n}$$

Будем искать решение (2.3)—(2.7) в форме $F(X, \tau) = R(X)$. Из (2.7), (2.1) и (2.3) следует, что для существования решения такого вида должно выполняться соотношение

$$\dot{L} L^{1/n} = \alpha = \text{const} \quad (2.8)$$

где α — некоторая постоянная, подлежащая определению.

Интегрируя уравнение (2.8) с учетом первого условия (2.5), находим закон распространения трещины

$$L(\tau) = \left(1 + \frac{n+1}{n} \alpha \tau \right)^{n/(n+1)} \quad (2.9)$$

При этом задача (2.3)—(2.7) становится автомодельной

$$-\alpha X \frac{\partial}{\partial X} W + \frac{\partial}{\partial X} Q = 0, \quad W(X) = \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} R(X) \quad (2.10)$$

$$Q(X) = -H(X)^{m/n+2} \left[\int_0^1 \kappa(\zeta, \zeta_0)^{m/n+1} d\zeta \right] \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial}{\partial X} R \right) \left| R^m \frac{\partial R}{\partial X} \right|^{1/n} \quad (2.11)$$

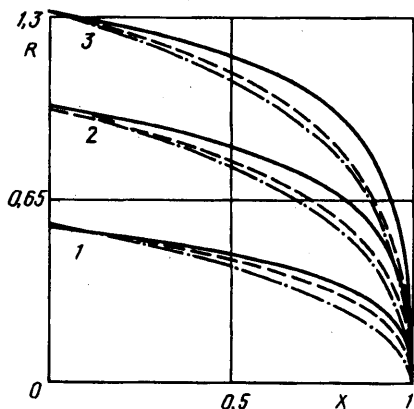
$$H(X) = 1/\cos R(X) \quad (2.12)$$

$$\alpha = U(1) = -\frac{2}{\pi} B \left(\frac{m+3n}{2n}, \frac{1}{2} \right) \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial}{\partial X} R \right) \lim_{x \rightarrow 1} \left| R^m \frac{\partial R}{\partial X} \right|^{1/n} \quad (2.13)$$

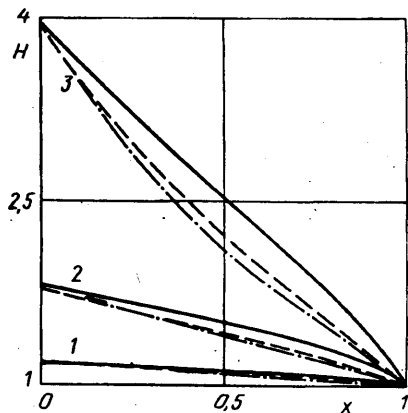
$$R(0) = \gamma, \quad R(1) = 0 \quad (2.14)$$

Здесь $B(x, y)$ — бета-функция. В выражении (2.13) учтено, что $H(X) \rightarrow 1$ при $X \rightarrow 1$.

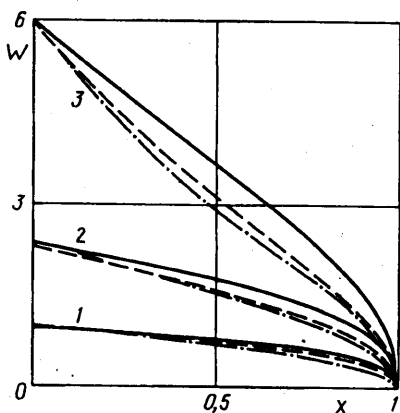
3. Результаты расчетов. Уравнение (2.12) является нелинейным уравнением второго порядка и его решение может быть найдено численно, например методом Рунге — Кутты. Характерной особенностью этого уравнения является обращение искомой функции R в ноль, а ее производной dR/dX в бесконечность на конце



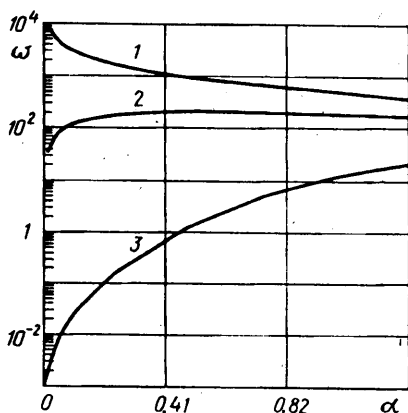
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

трещины ($X \rightarrow 1$). Поэтому для численного решения этого уравнения необходимо найти асимптотику его решения при $X \rightarrow 1$. Эта асимптотика имеет вид

$$R(X) = A(1 - X)^\beta + o[(1 - X)^\beta] \quad (3.1)$$

$$A = \left[(m + 1) \left(\frac{\pi \alpha}{2B((m + 3n)/2n, \sqrt{2})} \right) \right]^{1/(m+1)}, \quad \beta = \frac{1}{m + 1}$$

Были проведены три серии расчетов, отвечающие квадратичному и линейному законам сопротивления, а также гидроразрыву неньютоновской жидкости. Соответствующие им безразмерные распределения давления $R(X)$, высоты $H(X)$ и раскрытия трещины $W(X)$ показаны на фиг. 2—4 для трех значений безразмерного давления закачки жидкости в трещину: $R(0) = 0,56; 0,975; 1,32$ (кривые 1—3). Здесь штрихпунктирные линии соответствуют квадратичному ($n = 2, m = 1$), сплошные линии — линейному ($n = 1, m = 2$) законам сопротивления, а штриховые линии — гидроразрыву неньютоновской жидкости ($n = 0,5, m = 1,5$). Так как рассматриваемая задача симметрична относительно оси $y = 0$, то на фиг. 3 показан только профиль верхней кромки трещины. Безразмерная величина $H = 1$ соответствует положению кровли пласта.

Для рассмотренных трех режимов гидравлического разрыва пласта давление жидкости вдоль трещины, а следовательно, и ее раскрытие и высота падают

наиболее быстро при квадратичном законе сопротивления и наиболее медленно при линейном законе.

Медленное падение давления жидкости в середине трещины увеличивается к ее вершине. В плоской задаче, соответствующей отсутствию проникновения трещины в кровлю и подошву пласта, аналогично ведет себя и раскрытие трещины, оставаясь почти постоянным вдоль трещины и существенно меняясь только в ее вершине [6]. В рассматриваемой задаче, когда трещина может проникать в кровлю и подошву пласта, незначительное падение давления в середине трещины может приводить к существенному изменению ее раскрытия, а следовательно, и проводимости трещины, величина которой является одной из важнейших технических характеристик гидравлического разрыва пласта.

4. Определение размеров трещины и параметров пласта. Пусть гидроразрыв проводится при постоянном давлении нагнетания ($p = \text{const}$). На начальной стадии гидроразрыва пласта или в слабопроницаемых пластах утечками жидкости из трещины в пласт можно пренебречь. В этом случае будет справедливо найденное нами автомодельное решение задачи о распространении псевдотрехмерной трещины Перкинса — Керна.

Найденное автомодельное решение дает возможность решать обратную задачу определения длины трещины и параметров пласта по управляемым параметрам, контролируемым в устье скважины: давление нагнетания p , расход q и объем закачанной жидкости

$$v = \int_0^t q(\tau) d\tau = 8h_0 \int_0^{l(t)} \langle w \rangle dr$$

Получим формулы, которые по этим параметрам позволяют восстановить длину трещины $l(t)$, мощность пласта $2h_0$, скачок бокового горного давления $\Delta\sigma$ и режим течения жидкости разрыва в трещине n (ламинарный $0 < n \leq 1$ или турбулентный $n = 2$).

Из (2.1), (2.7) и (2.10), учитывая, что $Q(X=1)$ и выражения для v

$$\alpha = \frac{l_0 w_0}{q_0} s, \quad s = \frac{q(t)}{nv(t) - (n+1)q(t)t} \quad (4.1)$$

Показатель поведения степенной жидкости n зависит от температуры жидкости разрыва в трещине, которая в общем случае определяется температурой пласта на данной глубине и процессами теплообмена. Так как $\alpha = \text{const}$, то из (4.1) может быть найдено значение параметра n , при котором реализуется постоянство α (т. е. s).

Длина трещины гидроразрыва как функция времени находится из (2.1), (2.3)

$$l(t) = l_0 \left[\frac{nv(t)}{nv(t) - (n+1)q(t)t} \right]^{n/(n+1)} \quad (4.2)$$

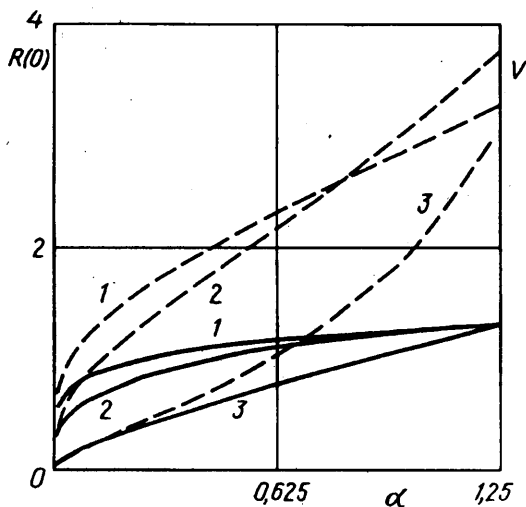
Затем определяется значение параметра α из уравнения

$$R(0, \alpha)^{m+2} Q(0, \alpha)^m = \omega \alpha^{2n+m} \quad (4.3)$$

$$\omega = \frac{l_0^{2(n+1)+m}}{(B_n \sigma_0)^2} \left[\frac{4G}{(1-\nu)\sigma_0} \right]^m \left[\frac{s^{n(2n+m+2)}}{q^{nm} \sigma_0^m P^{(n+1)(m+2)}} \right]^{1/(n+1)}, \quad P = \frac{p}{\sigma_0} - 1$$

Уравнение (4.3) получено из (2.1) и (2.3) в результате исключения неизвестных величин $2h_0$, $\Delta\sigma$. Решение уравнения (4.3) дает значение параметра α как функции безразмерного комплекса ω , составленного из предполагаемо известных размерных параметров задачи и параметров, заданных в устье скважины.

На фиг. 5 приведены графики функции $\alpha(\omega)$ для $n = 0,5; 1; 2$ (кривые 1—3).



Фиг. 6

Используя найденное значение α , восстанавливается мощность пласта и скачок бокового горного давления

$$(2h_0)^2 = \frac{G}{(1-\nu) l_0 n^{1/n}} \frac{\alpha R(0, \alpha)}{Q(0, \alpha)} \frac{[(n\nu(t) - (n+1)q(t)t)^n \nu(t)]^{1/(n+1)}}{(p - \sigma_0)} \quad (4.4)$$

$$\Delta\sigma = \sqrt{2\pi} (p - \sigma_0) R(0, \alpha) \quad (4.5)$$

Значения безразмерного давления закачки жидкости разрыва в трещину $R(X=0, \alpha)$ (сплошные линии) и расхода $Q(X=0, \alpha) = \alpha V(V(\alpha))$ — штриховые линии при $X=0$ как функции параметра α приведены на фиг. 6 (для линейного закона сопротивления ($n=0,5$) — кривая 1; для квадратичного закона сопротивления ($n=1$) — кривая 2; и для неньютоновской жидкости ($n=2$) — кривая 3).

Из фиг. 5 видно, что для ньютоновской жидкости ($n=1$) из-за немонотонности графика $\omega(\alpha)$ указанный алгоритм, к сожалению, не позволяет однозначным образом восстанавливать параметры пласта. Поэтому в этом случае необходимо привлечь дополнительную информацию о пласте.

В пределе $(p - \sigma_0)/\Delta\sigma \ll 1$, т. е. в случае, когда трещина не проникает в кровлю и подошву пласта, псевдотрехмерная модель вертикальной трещины Перкинса — Керна перейдет в двумерную, которая детально исследована в [6].

Предложенный подход получения автомодельного решения может быть распространен и на пласты с произвольным кусочно-однородным профилем бокового горного давления. А так как любая достаточно гладкая функция может быть приближена ступенчатой функцией, то при постоянном давлении закачки данный метод позволяет получать приближенные автомодельные решения для пластов с произвольным неоднородным профилем бокового горного давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 5. С. 3—41.
2. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3—56.
3. Perkins T. K., Kern L. R. Width of hydraulic fractures // J. Petrol. Technol. 1961. V. 13. № 9. P. 937—949.
4. Nordgren R. P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // Soc. Petrol. Eng. J. 1972. V. 12. № 4. P. 306—314.

5. *Daneshy A. A.* On the design of vertical hydraulic fractures//J. Petrol. Technol. 1973. V. 25: № 1. P. 83—97.
6. *Гордеев Ю. Н., Зазовский А. Ф.* Точные решения задачи о распространении высоты и большой протяженности в непроницаемой среде//Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 1. С. 94—104.
7. Reservoir stimulation/Ed. M. J. Economides, K. G. Nolte. Schlumberger Educational Services. Englewood, Cliffs (NJ): Prentice-Hall, 1989. Pag. var.
8. *Settari A., Cleary M. P.* Development and testing of a pseudo-three-dimensional model of hydraulic fracture geometry//SPE Prod. Eng. 1986. V. 1. № 6. P. 449—466.
9. *Sneddon I. N., Lowengrub M.* Crack problems in the classical theory of elasticity. N. Y.: Wiley, 1969. 221 p.
10. *Николаевский В. Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
11. *Баренблатт Г. И., Христианович А. С.* О модуле сцепления в теории трещин//Инж. журн. 1968. № 2. С. 70—75.

Москва

Поступила в редакцию
1.VI.1994