

УДК 532.527.013.4

© 1995 г. В. Ф. КОПЬЕВ, С. А. ЧЕРНЫШЕВ

## ДЛИННОВОЛНОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВИХРЕВОГО КОЛЬЦА

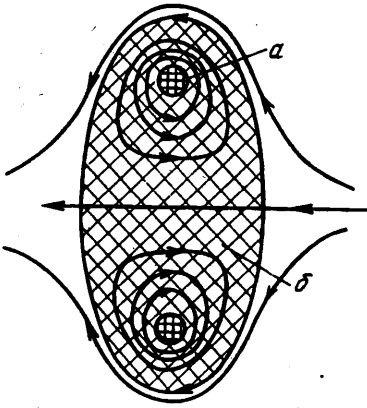
Исследуется устойчивость бочкообразных колебаний вихревого кольца в идеальной жидкости. Эти колебания, устойчивые для вихревого кольца с кусочно-однородным профилем завихренности, оказываются неустойчивыми для вихревого кольца со сглаженным профилем завихренности. Инкремент неустойчивости находится на основе уравнения энергетического баланса, определяющего перенос энергии от возмущений с отрицательной энергией в критическом слое к возмущениям с положительной энергией в остальном течении. Важную роль в рассматриваемом механизме неустойчивости играет кривизна вихревого кольца, благодаря которой оказываются связанными возмущения с энергией разного знака.

Вихревое кольцо представляет собой локализованный вихрь, обладающий самоиндуцированным движением вдоль своей оси. В системе координат, движущейся вместе с кольцом, это течение стационарно. Схема линий тока стационарного вихревого кольца в сечении, проходящем через ось кольца, изображена на фиг. 1. В реальных вихревых кольцах при больших числах  $Re$  можно выделить две области: тонкое тороидальное ядро ( $a$ ), в котором сосредоточена основная часть завихренности кольца, и атмосфера ( $b$ ) — слабозавихренная эллипсоидальная область течения, окружающая ядро и движущаяся вместе с ним.

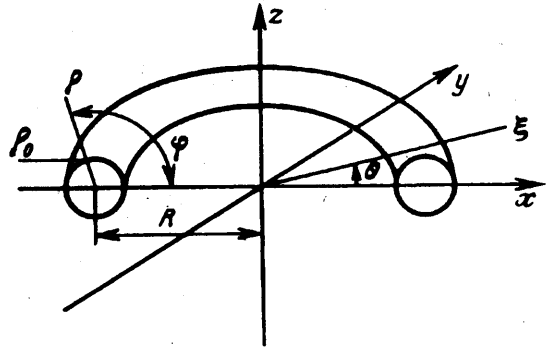
В рамках идеальной жидкости теоретическая модель рассматриваемого течения может быть различной, поскольку уравнения, описывающие стационарные течения идеальной жидкости, обладают множеством решений, имеющих вид вихревого кольца и различающихся между собой формой профиля завихренности [1]. Наиболее простой для теоретического анализа моделью является вихревое кольцо, имеющее тонкое ( $\mu \ll 1$ ) ядро с однородным распределением завихренности и безвихревое течение в атмосфере (кусочно-однородный профиль завихренности). Собственные колебания такого вихревого кольца неоднократно рассматривались в литературе, начиная с первых работ, посвященных вихревой модели атома [2]. Длинноволновые колебания тонкого вихревого кольца (колебания с длиной волны порядка радиуса кольца) распадаются на характерные семейства с частотами разных масштабов. К низкочастотным колебаниям относятся так называемые изгибные [2, 3] и бочкообразные [4] моды. Высокочастотные колебания разделяются на осесимметричные [5, 6] моды и моды с произвольной зависимостью от азимутального угла [7].

В настоящей работе рассматривается более реалистичная модель вихревого кольца. Предполагается, что в атмосфере кольца имеется поле завихренности, слабое ( $\alpha \ll 1$ ) по отношению к полю завихренности в ядре (сглаженный профиль завихренности). Показано, что бочкообразные колебания вихревого кольца в идеальной несжимаемой жидкости, устойчивые для кусочно-однородного профиля завихренности [4], оказываются неустойчивыми для случая сглаженного профиля завихренности. Наличие малого параметра  $\alpha$  в задаче позволяет остаться в рамках аналитических методов и использовать решения, полученные ранее для вихревого кольца с кусочно-однородным профилем завихренности ( $\alpha = 0$ ).

В отличие от известной неустойчивости коротковолновых изгибных возмущений с длиной волны порядка радиуса ядра вихря [3], полученная в настоящей работе



Фиг. 1



Фиг. 2

неустойчивость реализуется для длинноволновых возмущений, т. е. лежит в области других пространственных масштабов.

1. Постановка задачи. Собственные колебания безграничного вихревого течения в идеальной несжимаемой жидкости описываются системой уравнений

$$-i\omega\Omega' + \nabla \times (\Omega' \times V) + \nabla \times (\Omega \times v') = 0 \quad (1.1)$$

$$v'(\mathbf{r}) = \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Omega'(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (1.2)$$

где  $V, \Omega$  — стационарные поля скорости и завихренности,  $v', \Omega'$  — возмущения скорости и завихренности, удовлетворяющие условиям ограниченности и убывания на бесконечности. Уравнение (1.1) есть линеаризованное уравнение Гельмгольца для возмущений вида  $e^{i\omega t}$ , уравнение (1.2) связывает возмущения скорости и завихренности в каждый момент в соответствии с законом Био — Савара.

Будем использовать цилиндрические координаты  $\xi, \theta, z$  с осью  $e_z$  вдоль оси кольца, полярные координаты  $\rho, \varphi$  в сечении кольца и координату  $s, \xi = R - \rho \cos \varphi, z = \rho \sin \varphi, s = R\theta$ , где  $R$  — радиус кольца (фиг. 2).

Вихревое кольцо с кусочно-однородным профилем имеет поле завихренности  $\Omega' = \Omega_0 = \text{const}$  в ядре и  $\Omega' = 0$  в атмосфере ( $\Omega'$  — контравариантная компонента завихренности). В соответствии с этим модуль завихренности в ядре пропорционален расстоянию от оси симметрии кольца. В случае тонкого вихревого кольца задача имеет малый параметр  $\mu$ , представляющий собой отношение размера сечения ядра к радиусу кольца. В двух первых приближениях по  $\mu$  сечение ядра имеет круговую форму с радиусом  $\rho_0, \mu = \rho_0/R$ .

Тонкое вихревое кольцо со сглаженным профилем, рассматриваемое в настоящей работе, имеет поле завихренности  $\Omega' = \Omega_0 = \text{const}$  в ядре и слабое поле завихренности в атмосфере, монотонно убывающее при удалении от ядра ( $\Omega'/\Omega_0 = O(\alpha), \alpha \ll \mu \ll 1$ ). Стационарное поле скорости для этого течения может быть представлено в виде разложения по параметрам  $\mu$  и  $\alpha$ . Главный член этого разложения при  $\rho \ll R$  совпадает с полем скорости цилиндрического вихря. В этой области поле скорости имеет вид

$$V^p = O(\mu, \alpha), \quad V^r = 1/2 \Omega_0 + O(\mu, \alpha) \quad (\rho < \rho_0)$$

$$V^p = O\left(\mu \ln \frac{\rho_0}{\rho}, \alpha\right), \quad V^r = \frac{\Omega_0 \rho_0^2}{2\rho^2} + O\left(\mu \frac{\rho_0}{\rho} \ln \frac{\rho_0}{\rho}, \alpha\right) \quad (\rho_0 < \rho \ll R)$$

В настоящей работе находится решение уравнений (1.1), (1.2) для стацио-

нарных полей  $V, \Omega$ , соответствующих кольцу со сглаженным профилем завихренности.

2. Бочкообразные колебания вихревого кольца с кусочно-однородным профилем завихренности ( $\alpha = 0, \mu \ll 1$ ). В работе [4] разработан общий метод решения уравнений (1.1), (1.2) для вихревого кольца с кусочно-однородным профилем завихренности ( $\alpha = 0$ ) и на основе этого метода получено семейство бочкообразных колебаний. Далее ограничимся рассмотрением свойств этого семейства колебаний, поскольку именно эти колебания оказываются неустойчивыми при  $\alpha > 0$ .

Выпишем параметры бочкообразных колебаний для вихревого кольца с  $\alpha = 0$ . Собственные частоты и энергия бочкообразных колебаний в главном приближении имеют вид [4]

$$\omega_0 = \frac{\mu n}{x_j} \Omega_0, \quad E_0 = \pi^2 \varepsilon^2 \rho_0^2 R \Omega_0^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

где  $x_j$  — нули функции Бесселя  $J_0(x)$ ,  $\varepsilon$  — амплитуда колебаний, плотность жидкости предполагается равной единице. Смещение границы ядра  $\eta$  и возмущение скорости  $v_0'$  вблизи ядра ( $\rho_0 < \rho \ll R$ ) имеют вид

$$\eta = \varepsilon \left[ 1 - i \frac{2}{nx_j} \sin \varphi + O(\mu) \right] \exp(-i\omega t + in\mu s) \quad (2.2)$$

$$v_0'{}^{\rho} = -i\varepsilon \frac{\Omega_0 \rho_0^2}{nx_j \rho^2} \left[ \cos \varphi + O\left(\mu \frac{\rho}{\rho_0}\right) \right]$$

$$v_0'{}^{\varphi} = -i\varepsilon \frac{\Omega_0 \rho_0^2}{nx_j \rho^3} \left[ \sin \varphi + O\left(\mu \frac{\rho}{\rho_0}\right) \right] \quad (2.3)$$

Колебания (2.2) есть связанные между собой возмущения вида  $\exp(im\varphi)$  с различными  $m$ . В главном приближении выражение (2.2) содержит гармоники  $m = 0$  и  $m = \pm 1$ . Возмущение с  $m = 0$ , отвечающее за изменение радиуса сечения ядра, дает основной вклад в энергию  $E_0$ , а возмущения с  $m = \pm 1$ , смещающие сечение ядра, определяют главное приближение поля скорости (2.3) вне ядра.

Возмущения с различными  $m$  оказываются связанными между собой только с учетом кривизны кольца ( $\mu > 0$ ). В пределе  $R \rightarrow \infty$  ( $\rho_0 = \text{const}, R/n = \text{const}$ ) вихревое кольцо переходит в цилиндрический вихрь, для которого колебания с частотами (2.1) содержат только гармонику  $m = 0$ . Именно форма собственных колебаний вихревого кольца (2.2) лежит в основе рассматриваемой в настоящей работе неустойчивости, поскольку механизм неустойчивости связан с передачей энергии от возмущений с  $m = 1$  к возмущениям с  $m = 0$ . Отсутствие связи между возмущениями с различными  $m$  делает невозможной рассматриваемую неустойчивость в цилиндрическом вихре.

3. Вычисление потока энергии из окрестности критического слоя. ( $\alpha \ll 1, \mu = 0$ ). Свойства возмущений вихревых течений идеальной жидкости во многом определяются наличием критического слоя, в котором фазовая скорость возмущений совпадает со средней скоростью в потоке [8]. Критический слой не возникает при колебаниях вихревого кольца с кусочно-однородным профилем завихренности ( $\alpha = 0$ ). Этот профиль является в известном смысле особым, поскольку уже малое изменение стационарного течения при переходе к сглаженному профилю ( $\alpha \ll 1$ ) приводит к возникновению критических слоев и качественным изменениям свойств колебаний.

Для вихревого кольца со сглаженным профилем завихренности ( $\alpha \ll 1$ ) возмущения близки к возмущениям течения с  $\alpha = 0$  во всем течении, кроме малой окрестности критического слоя, где амплитуда возмущений может достигать большой величины. Изменение характера возмущений вблизи критического слоя, как показано ниже, сопровождается смещением собственных частот в комплексную плоскость. При  $\alpha \ll 1$  мнимые добавки  $\delta$  к собственным частотам малы. В этом

случае они могут быть определены методом, основанным на рассмотрении энергетического баланса между окрестностью критического слоя и остальным течением.

Вычислим величину потока энергии  $J$  из окрестности критического слоя в главном приближении по  $\mu$ . Для колебаний с частотой (2.1) критический слой располагается в окрестности ядра ( $\rho_0 < \rho \ll R$ ). В этой области уравнение (1.1) при  $\mu \rightarrow 0$  сводится к уравнению, описывающему двумерные колебания кругового вихря

$$\left(-i\omega + V^e \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \Omega'^s + \frac{d\Omega^s}{d\rho} v'^\rho = 0$$

$$V^e = \Omega_0 \rho_0^2 / 2\rho^2, \quad d\Omega^s/d\rho < 0, \quad \Omega^s/\Omega_0 = O(\alpha)$$

Используя уравнение неразрывности  $\nabla V = 0$ , выразим возмущение скорости через векторный потенциал. Для возмущений вида  $\exp(im\varphi)$  получим

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho} - \left(\frac{m^2}{\rho^2} + \frac{m}{\rho} \frac{1}{mV^e - \omega} \frac{d\Omega^s}{d\rho}\right) A = 0 \quad (3.1)$$

$$v'^\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \varphi}, \quad v'^\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \rho}$$

Последний коэффициент этого уравнения имеет особенность в критическом слое  $\rho = \rho_c$ , где  $\rho_c$  определяется из соотношения  $mV^e(\rho_c) = \omega$ . Для решения уравнения (3.1) воспользуемся следующим методом. Разделим течение на две области: окрестность критического слоя и остальную часть течения. В каждой из этих областей получим решения в виде разложений по малым параметрам, а затем сошьем полученные решения на границе областей с использованием условия неразрывности компонент  $v'^\rho$  и  $v'^\varphi$ .

В окрестности критического слоя  $|\rho - \rho_c| < \Delta$ ,  $\Delta \ll \rho_c$  решение находится методом Фробениуса [9] в виде разложения по  $x = \rho - \rho_c$ . Два линейно независимых решения имеют вид

$$A = x + O(x^2)$$

$$A = 1 + O(x^2) + \frac{(d\Omega^s/d\rho)_c}{\rho_c (dV^e/d\rho)_c} \ln x [x + O(x^2)]$$

где индекс  $c$  означает, что функция берется в точке  $\rho = \rho_c$ . Ветвь логарифмической функции выбирается с помощью малого смещения частоты в комплексную плоскость. Для частоты  $\omega + i\delta$ , где  $\delta \rightarrow \pm 0$ , получим  $\ln x = \ln|x| \pm i\pi$  при  $x < 0$ . В остальной части течения решение может быть представлено в виде разложения по  $\alpha$ , так как последний член уравнения (3.1) оказывается мал во всей этой области. Ограничимся в этом разложении главным членом, определяемым из (2.3).

Изложенная процедура проводится отдельно для каждой гармоники  $\exp(im\varphi)$ . Представим возмущение скорости (2.3) в виде суммы двух гармоник с  $m = +1$  и  $m = -1$ . Критический слой возникает только для возмущения с  $m = +1$ . Для этой гармоники возмущение скорости в окрестности критического слоя имеет вид

$$v'^\rho = v + O(x, \alpha x \ln x)$$

$$v'^\varphi = -\frac{i}{\rho_c} v + \frac{i}{\rho_c} \frac{(d\Omega^s/d\rho)_c}{(dV^e/d\rho)_c} v \ln x + O(x, \alpha) \quad (3.2)$$

$$v = -\frac{i\epsilon \Omega_0 \rho_0^2}{2n x \rho_c^2}, \quad \rho_c = \rho_0 \sqrt{\frac{x_l}{2n\mu}}$$

Поток энергии через поверхность  $\rho = \text{const}$  является квадратичной по амплитуде возмущений величиной и равен

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\rho' + Vv') v' \rho_c d\varphi R d\theta \quad (3.3)$$

Выражая возмущение давления  $\rho'$  через  $v'$  с помощью уравнения Эйлера и используя выражение (3.2) для  $v'$ , из (3.3) получим поток энергии из области  $|x| < \Delta$

$$J = \mp \pi^3 R \rho_c^3 \left( \frac{d\Omega^s}{d\rho} \right)_c v^* \left[ 1 + O \left( \frac{\delta}{\Delta}, \frac{\Delta}{\rho_c} \right) \right] \quad (3.4)$$

где знаки минус и плюс соответствуют положительной и отрицательной мнимой добавке  $\delta$  к частоте. Для нарастающих колебаний ( $\delta > 0$ ) этот поток энергии положителен, а для затухающих колебаний ( $\delta < 0$ ) отрицателен. Величина  $J$  в главном приближении не зависит от ширины критического слоя  $\Delta$ , т. е. существует конечный поток энергии из сколь угодно малой окрестности критического слоя.

4. Неустойчивость бочкообразных колебаний вихревого кольца со сглаженным профилем завихренности ( $\alpha \ll 1, \mu \ll 1$ ). Выделим из всего течения окрестность критического слоя как отдельную подсистему. Эта подсистема является источником или стоком энергии в зависимости от знака потока энергии  $J$ . Оставшаяся область течения является другой подсистемой с изменяющейся энергией  $E$ . Очевидно, что величины  $J$  и  $E$  связаны уравнением энергетического баланса

$$J = dE/dt \quad (4.1)$$

Будем предполагать, что в течении с  $\alpha \ll 1$  имеются собственные частоты дискретного спектра, близкие к собственным частотам течения с  $\alpha = 0$ . Тогда колебания в области  $|x| > \Delta$  в главном приближении совпадают с колебаниями в течении с  $\alpha = 0$  с тем отличием, что при  $\alpha \ll 1$  амплитуда колебаний медленно меняется вследствие изменения их энергии. Энергия  $E$  в этом случае определяется выражением (2.1) с зависящей от времени амплитудой  $\varepsilon(t)$ . С учетом этого из уравнения (4.1) получим

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) \exp(\delta t), \quad \delta = \frac{J}{2E_0} \quad (4.2)$$

Таким образом, использование уравнения энергетического баланса (4.1) позволяет определить сдвиг  $\delta$  собственных частот в комплексную плоскость через решение задачи о возмущениях с  $\alpha = 0$  (вычисление  $\omega_0, E_0$  и  $v_0''$ ) и параметры стационарного течения с  $\alpha > 0$  (величина  $d\Omega^s/d\rho$ ).

Обратим внимание, что знак величины  $J$  определяется в (3.4) в зависимости от знака  $\delta$ . В свою очередь знак  $\delta$  в соответствии с (4.2) определяется соотношением знаков  $J$  и  $E_0$ . Это обстоятельство может приводить к двум существенно различным ситуациям.

В случае  $E_0 > 0$  уравнения (3.4) и (4.2) имеют два решения: с  $\delta > 0, J > 0$  и  $\delta < 0, J < 0$ . Это означает, что при  $E_0 > 0$  появление критического слоя приводит к расщеплению собственной частоты на пару комплексно-сопряженных. Собственная частота с  $\delta > 0$  соответствует неустойчивым колебаниям. Механизм этой неустойчивости аналогичен механизму неустойчивости Майлса для ветровых волн на воде [10].

В случае  $E_0 < 0$  соотношение (3.4) будет несовместно с выражением (4.2) для потока энергии  $J$  ни для положительных, ни для отрицательных  $\delta$ . Это означает, что собственные частоты дискретного спектра не находятся на физическом листе римановой поверхности, а переходят на нефизический лист через разрез, соответствующий непрерывному спектру системы. На этом листе им

будут соответствовать разрывные решения уравнения Рэлея. Такая ситуация имеет место в плоской задаче о колебаниях кругового вихря [11].

Энергия  $E_0$  бочкообразных колебаний при  $\alpha = 0$  положительна. Следовательно, влияние слабой завихренности в окрестности ядра приводит к расщеплению действительных собственных частот на пару комплексно-сопряженных. Собственная частота с положительной мнимой частью соответствует неустойчивым колебаниям вихревого кольца. Подставляя (2.1) и (3.4) в (4.2), получим инкремент неустойчивости

$$\delta = -\frac{\pi}{4n^2 x_j^2 \Omega_0} \left( \rho \frac{d\Omega^*}{d\rho} \right)_c \omega_0$$

Величина инкремента оказывается пропорциональной градиенту завихренности в критическом слое, как и в случае майлсовской неустойчивости плоскопараллельных течений. Оценивая порядки величин, легко получить, что для  $\alpha \approx 0,1$  амплитуда возмущений увеличивается в 2 раза за короткое время, составляющее около 20 колебаний.

Для реализации рассматриваемой неустойчивости в вихревом кольце определяющую роль играет кривизна вихревых линий. Именно этот фактор обеспечивает связь между возмущениями, имеющими вид отдельных гармоник  $\exp(im\varphi)$ , и делает для вихревого кольца возможной передачу энергии от возмущения с  $m = 1$ , для которого возникает критический слой, к возмущению с  $m = 0$ , обладающему положительной энергией. Для цилиндрического вихря такая связь отсутствует и неустойчивость рассматриваемого типа не возникает, т. е. вихревое кольцо, возможно, является простейшим локализованным вихрем, в котором реализуется майлсовский механизм неустойчивости.

В заключение укажем на возможные проявления полученной неустойчивости. В недавних экспериментах было обнаружено акустическое излучение уединенного вихревого кольца [12]. Этот факт свидетельствует о том, что какая-то из форм неустойчивости вихревого кольца служит эффективным механизмом передачи энергии от среднего течения к гидродинамическим и соответственно акустическим пульсациям. Действительно, вихревое кольцо при полете не испытывает внешних воздействий, а начальные возмущения, возникающие в момент образования кольца, не могут создавать длительного излучения. Поэтому нестационарные возмущения могли бы возбуждаться и поддерживаться только за счет энергии самого вихревого кольца. Для возбуждения таких пульсаций, по-видимому, не подходят известные до настоящего времени механизмы неустойчивости. Неустойчивость изгибных возмущений [3] вообще не имеет колебательного характера и может отвечать скорее за качественную перестройку всего течения. Акустическая неустойчивость [6] имеет инкремент, пропорциональный пятой степени числа Маха, и при малых  $M$  малоэффективна. Полученная в настоящей работе неустойчивость является одним из возможных механизмов возбуждения гидродинамических и акустических пульсаций в уединенном вихревом кольце.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01135) и Международного научного фонда (грант № MC9000).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fraenkel L. E.* On steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid//Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 1970. V. 316. № 1524. P. 29—62.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
3. *Уиднелл Ш.* Структура и динамика вихревых нитей//Механика. Новое в зарубежной науке. № 21. Вихревые движения жидкости. М.: Мир, 1979. С. 126—159.
4. *Копьев В. Ф., Чернышев С. А.* Малые возмущения стационарных вихрей//Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 99—109.

5. Moore D. W. The velocity of vortex ring with a thin core of elliptical cross-section//Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 1980. V. 370. P. 407—415.
6. Копьев В. Ф., Леонтьев Е. А. Излучение и рассеяние звука вихревым кольцом//Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 83—95.
7. Koriev V. F., Chernyshev S. A. Sound radiation by high frequency oscillations of the vortex ring//AIAA Pap. 1993. 93—4362.
8. Линь Цзяцзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
9. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 376 с.
10. Miles J. W. On the generation of surface waves by shear flows//J. Fluid Mech. 1957. V. 3. № 2. P. 185—204.
11. Данилов С. Д. Об акустической неустойчивости течений с круговыми линиями тока//Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 6. С. 1059—1065.
12. Зайцев М. Ю., Копьев В. Ф., Мушин А. Г., Потокин А. А. Излучение звука турбулентным вихревым кольцом//Докл. АН СССР. 1990. Т. 312. № 5. С. 1080—1083.

Москва

Поступила в редакцию  
9.VI.1994