

УДК 532.517.013.4

© 1995 г. М. В. УСТИНОВ

ГЕНЕРАЦИЯ МОД ВТОРИЧНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛОКАЛИЗОВАННЫМ ВДУВОМ-ОТСОСОМ ЖИДКОСТИ

Изучается порождение пакета близких к субгармоническим вторичных возмущений включившимся в начальный момент времени периодическим вдувом-отсосом жидкости через малый участок стенки. Возникающий пакет рассматривается как простейшая модель турбулентного пятна. Исследование проводится для плоского течения Пуазейля и пограничного слоя Блазиуса. Полученные результаты сравниваются с данными экспериментов и прямого численного моделирования течения в турбулентных пятнах.

При малой степени турбулентности набегающего потока ламинарно-турбулентный переход начинается с зарождения и роста плоской волны Толлмина — Шлихтинга. Когда амплитуда этой первичной волны достигает порогового значения порядка 1% скорости набегающего потока, на ее фоне начинают быстро усиливаться вторичные трехмерные возмущения. В экспериментах, проводимых при контролируемом внесении возмущений, вторичные возмущения образуют λ -образные вихревые структуры, при переходе в «естественных» условиях образуются более сложные структуры, такие, как турбулентные пятна, «паффы» и др.

В [1, 2] показано, что причиной роста вторичных возмущений является неустойчивость первичного течения, созданного волной Толлмина — Шлихтинга, по отношению к периодическим в направлении потока и вдоль размаха возмущениям. Эти возмущения получаются из решения задачи на собственные значения и далее называются модами вторичной неустойчивости. При заданном периоде в направлении размаха наиболее быстро нарастают моды, имеющие продольный период, равный одной или двум длинам первичной волны, что объясняет наличие двух режимов перехода — клевановского и субгармонического.

При контролируемом введении возмущений генерируется почти чистая мода вторичной неустойчивости, поперечный период которой задается периодом искусственно создаваемой неоднородности амплитуды первичной волны, а продольный период — длиной этой волны. В «естественных» условиях вторичные возмущения возникают из случайных пульсаций скорости внешнего потока. При наличии первичной волны эти пульсации должны породить пакеты мод вторичной неустойчивости, имеющих различные продольные и поперечные периоды. Дальнейшее развитие этих пакетов, по-видимому, приводит к образованию различных структур, наблюдаемых в переходной области. Следовательно, изучение процесса генерации и развития пакета мод вторичной неустойчивости может быть полезным для моделирования таких структур.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать течение вязкой несжимаемой жидкости с кинематическим коэффициентом вязкости ν в пограничном слое на плоской пластине или в бесконечном плоском канале. Начало декартовой системы координат поместим на нижней стенке канала или на пластине на достаточно большом расстоянии от передней кромки. Оси координат X , Y и Z направим вдоль потока, по нормали к пластине или стенкам канала и в трансверсальном направлении соответственно. За масштабы длины L и скорости u_∞ примем полуширину канала и скорость потока в его центре для течения Пуазейля или

толщину вытеснения в начале координат и скорость набегающего потока для течения в пограничном слое.

Предположим, что в окрестности начала координат имеется плоская волна Толлмина — Шлихтинга конечной амплитуды. Принимая за основное течение двумерный поток, являющийся суперпозицией этой волны и течения Блазиуса или Пуазейля, будем рассматривать малые трехмерные возмущения, порождаемые вдувом-отсосом жидкости через нижнюю стенку канала или пластинку. Для этого поле скоростей V' представим в виде

$$V'(x, y, z, t) = V_b(x, z, t) + \varepsilon V_p(x, y, z, t), \quad V' = \{u', v', w'\}$$

Здесь $V_b(x, z, t) = \{u_b, 0, w_b\}$ — основное течение, $V_p = \{u_p, v_p, w_p\}$ — малые возмущения, вызванные вдувом-отсосом, распределенным по закону

$$w_p(x, y, 0, t) = f(x, y, t)$$

где функция $f(x, y) \equiv 0$ при $t < 0$ и является финитной функцией x и y . В связи с быстрым ростом вторичных возмущений будем пренебрегать нарастанием первичной волны и изменением профиля скорости по x , рассматривая полностью периодическое основное течение вида

$$V_b = V_{b0}(z) + (V_{b1}(z) e^{i(\alpha x - \omega t)} + V_{b1}^*(z) e^{-i(\alpha x - \omega t)}) \quad (1.1)$$

$$V_{b0} = \{U_0, 0, 0\}, \quad V_{b1} = \{u_b, 0, w_b\}$$

Здесь и далее звездочка обозначает комплексное сопряжение.

С целью задания выражения для возмущений скорости рассмотрим основные результаты теории вторичной неустойчивости, развитой в [2]. В [2] показано, что первичное течение (1.1) неустойчиво по отношению к вторичным возмущениям V_H вида

$$V_H = \{u_H, v_H, w_H\}$$

$$\begin{Bmatrix} u_H \\ v_H \end{Bmatrix} = \sum_{n=-N}^N \begin{Bmatrix} u_n \\ w_n \end{Bmatrix} (z) e^{i/2(n+\kappa)(\alpha x - \Omega t)} \cos \beta y \quad (1.2)$$

$$v_H = \sum_{n=-N}^N v_n(z) e^{i/2(n+\kappa)(\alpha x - \Omega t)} \sin \beta y$$

где суммирование производится по нечетным n . В этих выражениях κ и β — вещественные, комплексная величина Ω находится из задачи на собственные значения, получаемой подстановкой (1.2) в линеаризованные около (1.1) уравнения Навье — Стокса. Действительная часть Ω задает частоту возмущений, мнимая часть — их инкремент нарастания. В [2] показано, что мнимая часть Ω при заданном β имеет два максимума вблизи $\kappa=0$ и 1 , соответствующих субгармоническим возмущениям и модам основного периода. Вблизи максимумов действительная часть Ω близка к ω .

Искусственные возмущения типа вдува-отсоса должны возбуждать пакет мод вторичной неустойчивости с разными продольными периодами или κ . Из этих мод на достаточно большом расстоянии от источника выделяются наиболее быстро растущие, которые соответствуют волновым числам, близким к $n\alpha/2$, $n=1, 2, 3, \dots$. Такие возмущения могут быть представлены в виде квазигармонического волнового пакета

$$V_p = \sum_{n=-N}^N V_n(x, y, z, t) e^{i\varphi_n}, \quad \varphi_n = \frac{i}{2} n (\alpha x - \omega t)$$

$$V_n = \{u_n, v_n, w_n\}, \quad V_{-n} = V_n^* \quad (1.3)$$

где V_n — медленно меняющиеся функции x и t . Для удобства дальнейшего рассмотрения выберем граничные условия, дающие возможность использовать приближение квазигармонического пакета при всех x и t . Форма вдува-отсоса для этого должна иметь вид, аналогичный (1.3)

$$f = \sum_{n=-N}^N f_n(x, y, t) e^{i\varphi_n}$$

где f_n — медленно меняющиеся функции x и t .

Для описания течения будем использовать систему уравнений для вертикальных составляющих скорости w' и завихренности $\eta' = \partial u'/\partial y - \partial v'/\partial x$, эквивалентную уравнениям Навье — Стокса

$$\frac{\partial \Delta w'}{\partial t} + \Delta S_x - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{R} \Delta \Delta w'$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + \frac{\partial S_x}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial x} = \frac{1}{R} \Delta \eta'$$

$$S = (V', \nabla) V' = \{S_x, S_y, S_z\}, \quad R = \frac{u_\infty L}{\nu}$$

Линеаризация этих уравнений около основного течения (1.1) и подстановка в них (1.3) дает

$$\sum_{n=-N}^N \left[L \left(\frac{n}{2} \omega, \frac{n}{2} \alpha \right) \circ w_n + F(V_{n-2}', V_{n+2}') \right] e^{i\varphi_n} = 0 \quad (1.4)$$

$$\sum_{n=-N}^N \left[M \left(\frac{n}{2} \omega, \frac{n}{2} \alpha \right) \circ \eta_n + \frac{dU_0}{dz} \frac{\partial w_n}{\partial y} + G(V_{n-2}', V_{n+2}') \right] e^{i\varphi_n} = 0$$

$$\eta_n = \frac{\partial u_n}{\partial y} - i \frac{n}{2} \alpha v_n$$

$$L(\omega, \alpha) = M(\omega, \alpha) \Delta_1 - \frac{d^2 U_0}{dz^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\alpha \right)$$

$$M(\omega, \alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega \right) + U_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\alpha \right) - \frac{1}{R} \Delta_1$$

$$\Delta_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\alpha \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Слагаемые F и G в этих уравнениях представляют собой часть конвективных членов, включающих периодическую составляющую основного течения. Точные выражения для них достаточно громоздки и здесь не приводятся. Для дальнейшего изложения существенно, что данные величины являются суммой членов, пропорциональных компонентам векторов, указанных в скобках, или их производным. Коэффициенты пропорциональности в этих членах зависят только от z .

Граничные условия для (1.4) имеют вид

$$\sum_{n=-N}^N w_n^d e^{i\varphi_n} = \sum_{n=-N}^N f_n(x, y, t) e^{i\varphi_n} \quad (1.5)$$

$$u_p^d = v_p^d = u_p^u = v_p^u = w_p^u = 0$$

Здесь верхним индексом d обозначены значения функций на нижней стенке канала или поверхности пластины ($z=0$); верхним индексом u — их значения на верхней стенке канала ($z=2$) или при $z \rightarrow \infty$ в случае пограничного слоя.

Будем считать, что в начальный момент времени вторичные возмущения отсутствовали и что при конечных t они затухают при $|x|, |y| \rightarrow \infty$.

Предположим для простоты, что распределение вдува-отсоса является симметричным относительно плоскости $y=0$. Тогда из соображений симметрии следует, что u_n, w_n четные, а v_n, η_n — нечетные функции y .

Линейность уравнений (1.4) и вид граничных условий позволяют использовать для их решения комбинацию преобразования Лапласа по t и преобразования Фурье по x и y . Более точно для четных $g_f(x, y, t)$ и нечетных $g_0(x, y, t)$ функций y будем применять следующие преобразования:

$$F [g_f] (k, p, \beta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{\infty} dt g_f (x, y, t) e^{-ikx - pt} \cos \beta y$$

$$F [g_0] (k, p, \beta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{\infty} dt g_0 (x, y, t) e^{-ikx - pt} \sin \beta y$$

которые назовем преобразованиями Фурье — Лапласа. Применив эти преобразования к уравнениям (1.4) и граничным условиям (1.5), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-N}^N \{L_f (k, p, \beta) \circ W_n (k_n, p_n, \beta) + \\ & + D (F [V_{n-2}'] (k_n, p_n, \beta), F [V_{n+2}'] (k_n, p_n, \beta))\} = 0 \\ & \sum_{n=-N}^N \left\{ M_f (k, p, \beta) \circ H_n (k_n, p_n, \beta) - \beta \frac{dU_0}{dz} W_n (k_n, p_n, \beta) + \right. \\ & \left. + E (F [V_{n-2}'] (k_n, p_n, \beta), F [V_{n+2}'] (k_n, p_n, \beta)) \right\} = 0 \\ & \sum_{n=-N}^N W_n^d (k_n, p_n, \beta) = \sum_{n=-N}^N F_n (k_n, p_n, \beta) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\sum_{n=-N}^N \{U_n^d, V_n^d, U_n^u, V_n^u, W_n^u\} (k_n, p_n, \beta) = 0$$

$$L_f (k, p, \beta) = M_f (k, p, \beta) \Delta_k - ik \frac{d^2 U_0}{dz^2}$$

$$M_f (k, p, \beta) = ikU_0 + p + \frac{1}{R} \Delta_k, \quad \Delta_k = \frac{d^2}{dz^2} - (k^2 + \beta^2)$$

$$U_n = F [u_n], \quad V_n = F [v_n], \quad W_n = F [w_n], \quad H_n = F [\eta_n], \quad F_n = F [f_n],$$

$$k_n = k - \frac{n}{2} \alpha, \quad p_n = p + i \frac{n}{2} \omega$$

Здесь слагаемые D и E являются образами F и G из (1.4) при преобразовании Фурье — Лапласа.

Система (1.6) недоопределенная, так как в ней количество уравнений меньше количества неизвестных. Эта неопределенность устраняется, если предположить, что образы гармоник возмущений скорости U_n, V_n, W_n , вертикальной завихренности H_n и формы вдува-отсоса F_n отличны от нуля только при $|k| < \alpha/4$ и $|p| < \omega/4$. Действительно, при этом для любого номера n при $|k - 1/2 n \alpha| < \alpha/4$ и $|p + i/2 n \omega| < \omega/4$ во всех суммах в (1.6) отличны от нуля только слагаемые, соответствующие данному n . Следовательно, вместо каждого равенства (1.6) имеем $2N + 1$ уравнений для отдельных гармоник и количество уравнений становится равным количеству неизвестных. Введенные ограничения физически

означают, что масштабы длины X и времени T , на которых гармоники u_n, v_n, w_n, f_n меняются на свой порядок, удовлетворяют оценкам $X \gg 1/\alpha$, $T \gg 1/\omega$.

В дальнейшем, говоря об (1.6), будем иметь в виду систему уравнений для отдельных гармоник. Эти уравнения связывают между собой гармоники с номерами, отстоящими на два, поэтому (1.6) распадается на две независимые системы для четных и нечетных n . Первая из них описывает возмущения с периодом, близким к длине первичной волны, вторая — возмущения, близкие к субгармоническим. Так как при умеренной амплитуде первичной волны $\sim 1-3\%$ от u_n наиболее быстро растут субгармонические моды вторичной неустойчивости [2], то далее ограничимся исследованием возмущений, близких к субгармоническим, и будем рассматривать только нечетные n . Отметим, что задача (1.6) с однородными граничными условиями при $x = 2k/\alpha$ эквивалентна задаче на собственные значения для мод вторичной неустойчивости.

В дальнейшем будем рассматривать (1.6) с минимальным количеством гармоник $N = 1$. Возможность такого подхода оправдана тем, что инкременты нарастания близких к субгармоническим мод вторичной неустойчивости, полученные при $N = 1$, отличаются от точных значений, найденных с учетом высших гармоник, менее чем на 3% [2].

Сделав замены $k - 1/2n\alpha \rightarrow k$; $p + i1/2n\omega \rightarrow p$ и обозначая индексами плюс и минус образы гармоник с номерами $+1$ и -1 , получим окончательную формулировку задачи

$$L_f \left(k + \frac{\alpha}{2}, p - i \frac{\omega}{2} \right) \circ W_+ (k, p, \beta) + D (W_- (k, p, \beta), H_- (k, p, \beta)) = 0 \quad (1.7)$$

$$M_f \left(k + \frac{\alpha}{2}, p - i \frac{\omega}{2} \right) \circ H_+ (k, p, \beta) - \beta \frac{dU_0}{dz} + E (W_- (k, p, \beta), H_- (k, p, \beta)) = 0$$

$$L_f \left(k - \frac{\alpha}{2}, p + i \frac{\omega}{2} \right) \circ W_- (k, p, \beta) + D (W_+ (k, p, \beta), H_+ (k, p, \beta)) = 0$$

$$M_f \left(k - \frac{\alpha}{2}, p + i \frac{\omega}{2} \right) \circ H_- (k, p, \beta) + \beta \frac{dU_0}{dz} + E (W_+ (k, p, \beta), H_+ (k, p, \beta)) = 0$$

$$W_+^d (k, p, \beta) = F_+ (k, p, \beta), W_-^d (k, p, \beta) = F_- (k, p, \beta)$$

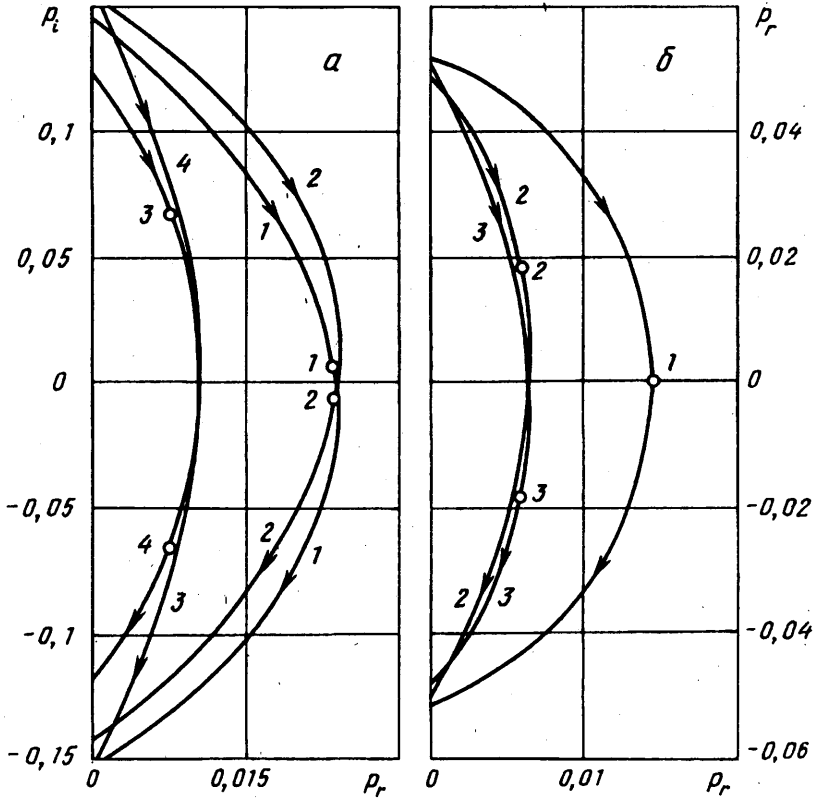
$$W_+^u = W_-^u = H_+^d = H_-^d = H_+^u = H_-^u = 0$$

При выводе этих уравнений для исключения U_+, U_-, V_+, V_- использовались образы уравнения неразрывности и определения вертикальной завихренности.

Решив численно (1.7) для всех k, p, β и вычислив обратное преобразование Фурье — Лапласа, можно в принципе найти вторичные возмущения при любых x и t . Однако такой подход неприемлем из-за слишком большого объема вычислений. Поэтому ограничимся нахождением решения при больших t , когда вычисление обратного преобразования Фурье — Лапласа значительно упрощается. В качестве примера рассмотрим нахождение оригинала W_+ , который дается формулой

$$w_{+,1} = \int_0^{\infty} \cos \beta y \left(\int_{-\infty}^{\infty} J (k, \beta) e^{ikx} dk \right) d\beta \quad (1.8)$$

где $J(k, \beta)$ — обратное преобразование Лапласа от W_+ . Предположим, что решения (1.6) являются аналитическими функциями комплексного переменного p . Тогда, применяя теорему Коши к интегралу по стандартному контуру, состоящему из



Фиг. 1

вертикальной прямой, проходящей справа от всех особых точек p_j , функции W_+ и полуокружности c_r радиуса r , расположенной в левой полуплоскости, имеем

$$\begin{aligned}
 J(k, \beta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} W_+(p) e^{p t} dp = \\
 &= \sum_{p=p_j} \text{res}(W_+) e^{p t} - \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{c_r} W_+ e^{p t} dt
 \end{aligned}$$

Так как $|F_+|$ и $|F_-|$ в (1.7) быстро затухают вне ограниченной области, то $|W_+| \rightarrow 0$ при $|p| \rightarrow \infty$ и, по лемме Жордана, второе слагаемое равно нулю. Таким образом, $J(k, \beta)$ полностью определяется вычетами изображения W_+ в его полюсах. Эти полюсы расположены в точках p_j , являющихся собственными значениями задачи о вторичной неустойчивости основного течения, определяемой (1.7) с однородными граничными условиями. Для дальнейшего рассмотрения необходимо исследовать расположение этих полюсов при разных k и β . Такое исследование облегчается свойством симметрии решений (1.7) относительно $k=0$

$$W_+(-k, p) = W_-^*(k, p), \quad H_+(-k, p) = H_-^*(k, p) \quad (1.9)$$

которое можно проверить непосредственной подстановкой.

Из этого свойства следует, что если имеется полюс в точке p_j при некотором k , то при $-k$ существует полюс в точке p_j^* и вычеты в этих полюсах связаны соотношением, аналогичным (1.9). В частности, при $k=0$ полюсы образуют

пары, расположенные в комплексно сопряженных точках, либо лежат на действительной оси.

Траектории наиболее неустойчивых корней (имеющих наибольшие действительные части p_j при $k=0$) при фиксированном β и переменном k для течения в канале при $\beta = 1, 2$, и пограничном слое при $\beta = 0, 25$ показаны на фиг. 1, а, б соответственно. Положения корней при $k=0$ отмечены точками, стрелки показывают направления их движения при увеличении k , цифры обозначают номера корней.

Для течения в канале показаны траектории двух наиболее неустойчивых пар корней, для течения в пограничном слое — наиболее неустойчивого корня, лежащего на действительной оси при $k=0$, и следующей по неустойчивости пары корней. Показанные на фиг. 1 результаты соответствуют поперечным волновым числам β , при которых достигаются абсолютные максимумы $\text{Re}(p_j)$ как функций k и β . Общий вид траекторий корней остается аналогичным фиг. 1 для β в достаточно широкой окрестности этого максимума. Именно окрестность максимума инкрементов нарастания дает определяющий вклад в решение при больших t . Из фиг. 1 видно, что в этой окрестности инкременты нарастания первой пары корней в течении Пуазейля (фиг. 1, а, кривые 1 и 2) и первого корня в пограничном слое (фиг. 1, б, кривая 1) значительно превышают инкременты нарастания остальных корней. В дальнейшем в сумме для $J(k, \beta)$ будем оставлять только члены, соответствующие этим корням. Выражение для обратного преобразования Лапласа при этом примет вид

$$J(k, \beta) = \sum_{j=1}^m W_{+j} e^{p_j(k, \beta)t}, \quad W_{+j} = \text{res}_{p=p_j} W_+$$

где $m=1$ для пограничного слоя и $m=2$ для канала.

Подставляя это в (1.8) и учитывая (1.9), получим окончательное выражение для $w_{1+}(x, y, t)$

$$w_{1+} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J (I'_+ + I'_-), \quad I'_\pm = I'_{1\pm} + I'_{2\pm} \quad (1.10)$$

$$I'_{1\pm} = \int_0^\infty \int_0^\infty W_{+j} e^{p_j j + ikx \pm \beta y} dk d\beta$$

$$I'_{2\pm} = \int_0^\infty \int_0^\infty W_{-j} e^{p_j j - ikx \pm \beta y} dk d\beta$$

$$W_{-j} = \text{res}_{p=p_j} W_-$$

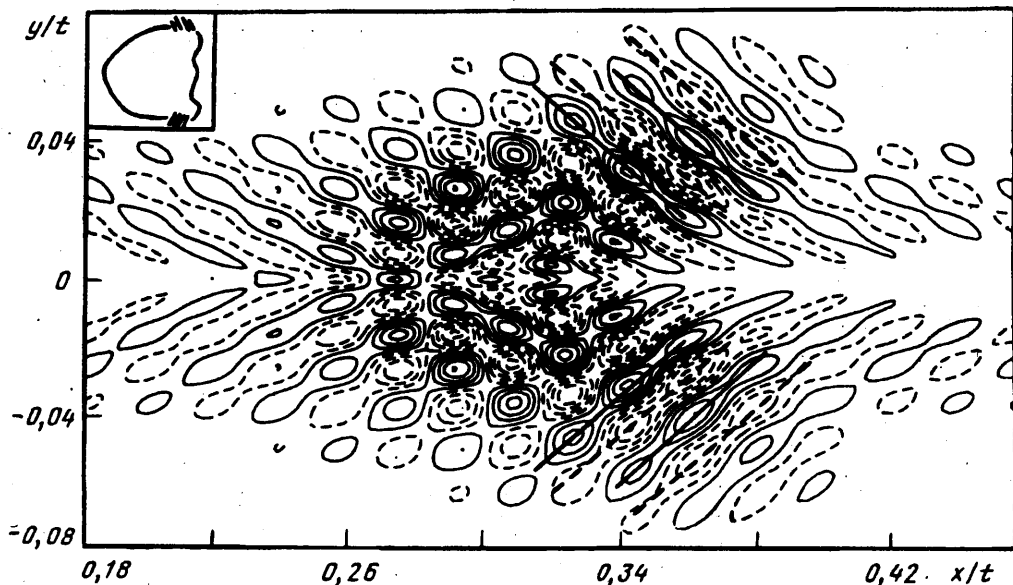
Формулы для u_{1+} аналогичны (1.11), выражения для $v_{1\pm}$ отличаются первым равенством, которое имеет вид

$$v_{1+} = \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^J (I'_+ - I'_-)$$

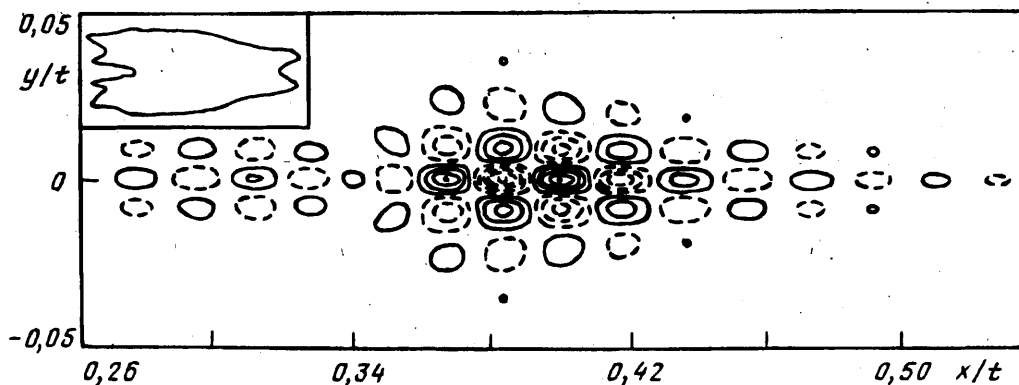
2. Численный метод. Дискретизация (1.7) производилась квазиспектральным методом. В результате задача (1.7) сводилась к системе линейных алгебраических уравнений, а задача на собственные значения для однородной системы (1.7) — к аналогичной задаче для матрицы. В результате решения последней прямым методом находились полюсы p_j . Затем неоднородная система (1.7) решалась для p , слегка отстоящего от p_j , и находились вычеты ее решений

$$\text{res}_{p=p_j} \{W_+, W_-, H_+, H_-\} = (p - p_j) \{W_+, W_-, H_+, H_-\}(p)$$

Для вычисления интегралов (1.10) вместо бесконечной области интегрирование



Фиг. 2



Фиг. 3

проводилось по прямоугольнику $0 < k < \alpha/2$, $0 < \beta < \beta_{\max}$. Значение β_{\max} задавалось из условия затухания мод вторичной неустойчивости при $\beta > \beta_{\max}$. В области интегрирования выбиралась сетка и интегралы представлялись суммой интегралов по ее ячейкам. В каждой ячейке предэкспоненциальный множитель и показатель экспоненты в подынтегральной функции аппроксимировались плоскостью $Ak + B\beta + c$ и интеграл по ячейке вычислялся аналитически. Такой способ вычисления интеграла от быстроосциллирующей функции, какой является экспонента в (1.10) при больших t , обеспечивает достаточную точность даже на грубой сетке с ячейками, превышающими период пульсаций экспоненты.

3. Результаты расчетов. Расчет развития вторичных возмущений в канале производится при $R = 5000$, $\alpha = 1,12$ и амплитуде первичной волны Толлмина — Шлихтинга $a = 2 \max |u_b(z)| = 0,014$, а в пограничном слое при $R = 1634$, $\alpha = 0,286$, $a = 0,02$.

Для проведения расчетов было выбрано распределение вдува-отсоса, образ формы которого $F_*(k, p, \beta) \equiv 1$. Такие граничные условия обеспечивают равную генерацию

возмущений со всеми возможными k и β , поэтому полученное решение заведомо определяется только собственными свойствами вторичных возмущений. Физически эти граничные условия соответствуют мгновенному точечному вдуву и не удовлетворяют ограничениям, налагаемым на форму вдува-отсоса, принятым при выводе (1.7). Для удовлетворения этим ограничениям, вместо $F_+(k, p, \beta) \equiv 1$ должна быть выбрана «обрезанная» функция, равная единице при $|k| > \alpha/4$ и быстро затухающая вне этого интервала. Однако в связи с малыми инкрементами нарастания мод вторичной неустойчивости при $|k| > \alpha/4$ решения для обрезанной и необрезанной функций F_+ отличаются незначительно. Поэтому в дальнейшем будем использовать необрезанное распределение $F_+(k, p, \beta) \equiv 1$, дающее более универсальное решение.

Рассчитанные при приведенных выше параметрах распределения вертикальной составляющей скорости вторичных возмущений в плоскости x, y для течения в плоском канале при $t = 300$ в сечении $z = -0,823$ и в пограничном слое при $t = 1200$ и $z = 1,43$ представлены на фиг. 2 и 3 соответственно. На этих фигурах показаны линии уровня $w = (\pm 0,1, \pm 0,3, \pm 0,5, \pm 0,7, \pm 0,9)$ $w_m, w_m = \max_{x,y} |w(x, y)|$, положительным значениям w соответствуют сплошные, а отрицательным — штриховые кривые.

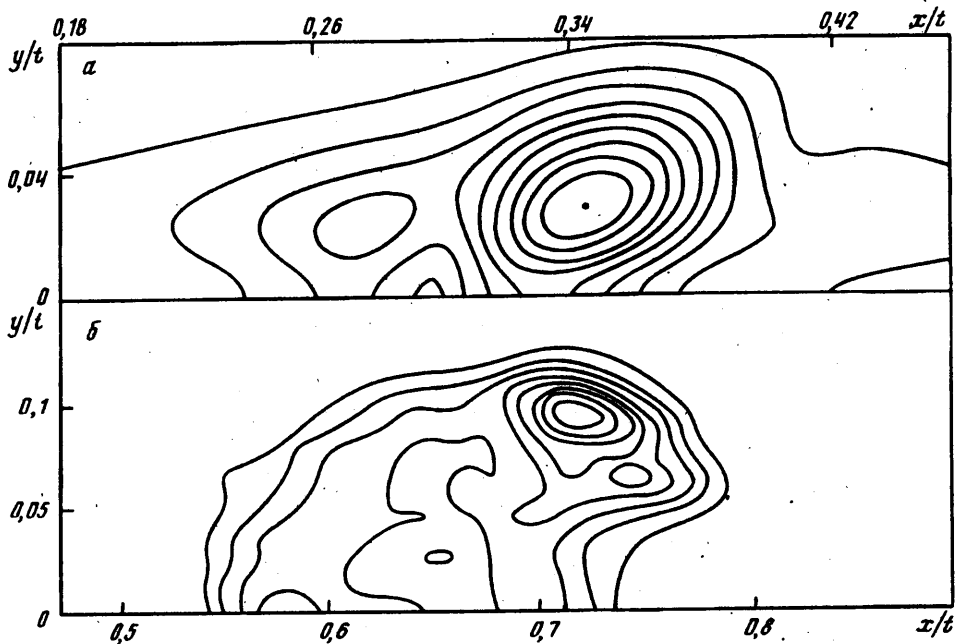
Для сравнения в углу фиг. 2 помещен эскиз турбулентного пятна, взятый из экспериментальной работы [3], в углу фиг. 3 — контур пятна в пограничном слое, полученный методом прямого численного моделирования в [4]. Из фиг. 2 и 3 видно, что форма пакетов вторичных возмущений в канале и пограничном слое качественно соответствует внешнему виду пятен в этих течениях. На картине вторичных возмущений в канале хорошо видны косые волны большой амплитуды, наблюдаемые по бокам турбулентного пятна в этом течении. Гребни и впадины этих волн показаны жирными сплошными и штриховыми прямыми на фиг. 2. Угол наклона гребней волн, найденный из этой фигуры, составляет около 50° , что попадает в диапазон значений от 40 до 60° , наблюдаемых в экспериментах. Вторичные возмущения в пограничном слое распадаются на два пакета: основной, соответствующий собственно турбулентному пятну, и слабый вторичный пакет, расположенный сзади основного. Вторичный пакет, образующийся за основным пятном в пограничном слое, наблюдался в эксперименте [5].

Найденный из фиг. 2 и 3 угол полураствора клина, заметаемого пакетом вторичных возмущений, составляет 12° для течения в канале и 8° для пограничного слоя. Аналогичный угол для пятен в течении Пуазейля составляет $8-15^\circ$ (в зависимости от R) и около 10° в пограничном слое.

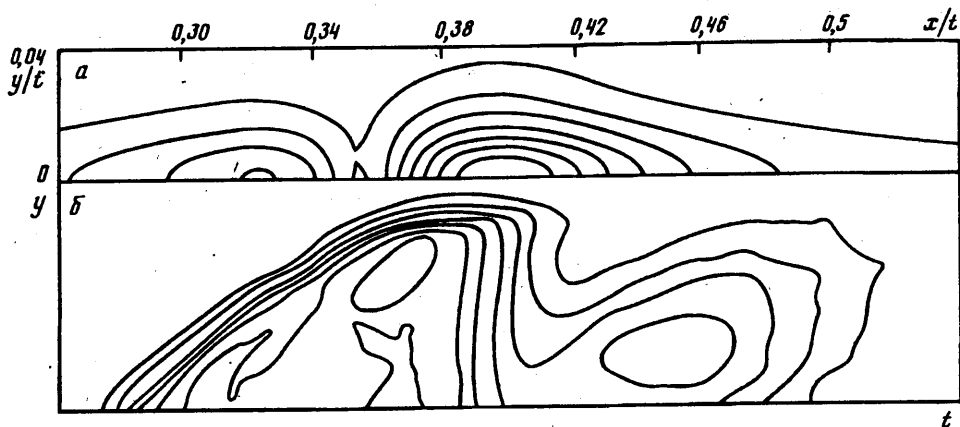
Скорость распространения пакетов вторичных возмущений значительно меньше скорости турбулентных пятен. Это расхождение может быть объяснено следующим образом. Центр пакета вторичных возмущений распространяется с групповой скоростью мод вторичной неустойчивости, которая определяется фазовой скоростью первичной волны, равной $\sim 0,3 u_\infty$. Как показало прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода [6], обратное влияние на основную волну вторичных возмущений, достигших большой амплитуды, приводит к увеличению фазовой скорости последней до $0,5-0,6 u_\infty$. Это в свою очередь должно вызвать рост групповой скорости вторичных возмущений и, следовательно, увеличение скорости распространения их пакета до величины, сравнимой со скоростью движения турбулентного пятна.

Для количественного сравнения с данными эксперимента и результатами прямого численного моделирования необходимы осредненные характеристики пакета, представляющие собой гладкие функции x и y . В качестве таких характеристик использовались амплитуды пульсаций компонент скорости, сглаженные с помощью гауссова фильтра

$$\{\langle u \rangle, \langle v \rangle, \langle w \rangle\}(x, y) = \frac{1}{\pi \Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \{|u_{+1}|, |v_{+1}|, |w_{+1}|\}(x, y') e^{-(y-y')^2/\Delta^2} dy'$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Ширина фильтра Δ выбиралась из условия сглаживания мелкомасштабных колебаний. Линии уровня $\langle w \rangle$ в плоскости x, y при $z=1$ и $t=300$ для течения в канале показаны на фиг. 4, а. На фиг. 4, б показаны аналогичные результаты, найденные из прямого численного моделирования [7].

Для течения в пограничном слое на фиг. 5, а представлены линии уровня $\langle u \rangle$ при $z=1,43$ и $t=1200$; на фиг. 5, б изображены аналогичные результаты эксперимента [5]. В эксперименте измерения проводились зондом, расположенным в сечении $x = \text{const}$, и вместо продольной координаты измерялось время прохождения возмущений t , которое отложено по оси абсцисс на фиг. 5, б. Поэтому при сравнении фиг. 5, а и б необходимо учитывать, что передний фронт пятна на фиг. 5, б расположен слева (при малых t), а задний — справа (при больших t).

Из фиг. 4 и 5 видно, что хотя распределения амплитуд пульсаций в пакетах вторичных возмущений и турбулентных пятнах схожи, между ними имеются значительные различия. В реальных пятнах зоны максимальных пульсаций смещены к границам пятна, а в его центральной области уровень пульсаций несколько меньше. Это расхождение, вероятно, объясняется влиянием мелкомасштабной турбулентности на крупномасштабные возмущения, формирующие пятно. Отток энергии от крупномасштабного движения к мелкомасштабному, по-видимому, снижает общий уровень пульсаций в центральной части пятна.

В целом простая модель пакета вторичных возмущений достаточно хорошо описывает крупномасштабную структуру течения в турбулентных пятнах. Аналогичный подход, возможно, будет полезен и для моделирования других когерентных структур, возникающих в переходной области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Herbert T.* Secondary instability of plane channel flow to subharmonic three-dimensional disturbances//*Phys. Fluids*. 1983. V. 26. № 4. P. 871—874.
2. *Herbert T., Bartlotti F. P., Santos G. R.* Eloquent analysis of secondary instability in shear flows//*Stability of Time-Dependent and Spatially Varying Flows*/Ed. D. L. Dwoyer, M. Y. Hussaini. N. Y.: Springer, 1987. P. 43—57.
3. *Henningson D. S., Alfredsson P. H.* The wave structure of turbulent spots in plane Poiseuille flow//*J. Fluid Mech.* 1987. V. 178. P. 405—421.
4. *Henningson D. S., Spalart P., Kim J.* Numerical simulations of turbulent spots in plane Poiseuille and boundary layer flow//*Phys. Fluids*. 1987. V. 30. № 10. P. 2914—2917.
5. *Glezer A., Katz Y., Wignanski I.* On the breakdown of the wave packet trailing turbulent spot in a laminar boundary layer//*J. Fluid Mech.* 1989. V. 198. P. 1—26.
6. *Устинов М. В.* Исследование субгармонического перехода в плоском канале методом прямого численного моделирования//*Изв. РАН. МЖГ*. 1993. № 3. С. 46—53.
7. *Henningson D. S., Kim J.* On turbulent spots in plane Poiseuille flow//*J. Fluid Mech.* 1991. V. 228. P. 183—205.

Москва

Поступила в редакцию
14.X.1994