

УДК 532.516.5:532.526.75

© 1995 г. А. Э. ПРОСВИРОВ, Г. В. РЯБЧУК

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПО ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

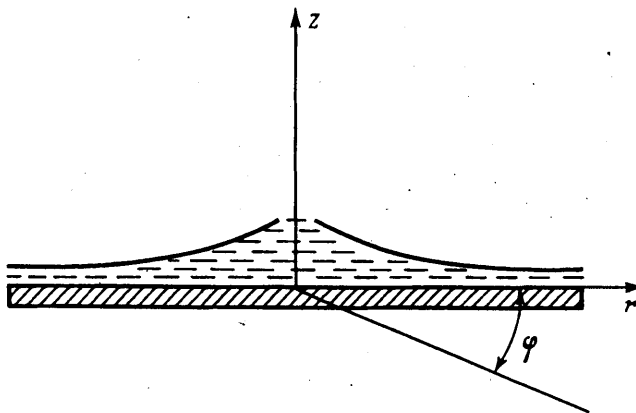
Рассматривается пленочное течение вязкой несжимаемой жидкости по поверхности вращающегося непроницаемого диска. Найдено точное автомодельное решение полной системы уравнений Навье — Стокса, определены поля скоростей и давления, а также зависимость толщины пленки жидкости от радиуса. Дана физическая интерпретация полученных результатов.

1. Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости по поверхности вращающегося непроницаемого диска. Геометрия задачи представлена на фиг. 1. В центре вращающегося с постоянной угловой скоростью ω плоского диска расположен точечный источник жидкости с постоянным объемным расходом q . При этом вдоль поверхности диска реализуется трехмерное пленочное течение при совместном действии сил инерции и вязкого трения. Рассмотрение производится в инерциальной цилиндрической системе координат (r, φ, z) , связанной с центром диска. Течение предполагается ламинарным, безволновым, стационарным, осесимметричным. Действием сил тяжести и поверхностного натяжения жидкости пренебрегается. Задача состоит в определении полей скоростей и давления в жидкости, а также в определении зависимости толщины пленки жидкости от расстояния от центра диска $h = h(r)$.

Рассматриваемое течение описывается следующей системой уравнений [1]:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad (1.1)$$

$$v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) \quad (1.2)$$



Фиг. 1

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (1.4)$$

Здесь v_r , v_φ , v_z — компоненты скорости жидкости в цилиндрической системе координат, p — давление жидкости, ρ — плотность жидкости, ν — кинематическая вязкость.

Граничные условия представляют собой классические условия «прилипания» и непротекания на границе с твердой поверхностью, равенства нулю касательных и нормальных напряжений и обычное кинематическое условие на свободной поверхности жидкости

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\varphi = \omega r \quad (z = 0) \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = 0, \quad p_0 = p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (z = h) \quad (1.6)$$

$$v_z = v_r \frac{\partial h}{\partial r} \quad (z = h) \quad (1.7)$$

Здесь p_0 — нормальное атмосферное давление, μ — динамическая вязкость.

Особенностью рассматриваемой задачи является наличие неизвестной функции — толщины пленки жидкости $h = h(r)$, вследствие чего система уравнений (1.1) — (1.4) и граничных условий (1.5) — (1.7) незамкнута. Для замыкания системы используется уравнение для объемного расхода жидкости в виде

$$q = 2\pi r \int_0^h v_r dz \quad (1.8)$$

являющееся не чем иным, как интегральным условием неразрывности течения.

2. В общем случае нелинейная система уравнений (1.1) — (1.4) не поддается интегрированию. Однако теоретико-групповой анализ [2—4] математической модели течения позволяет отыскать вид решения, сводящий систему уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (автомодельное решение). Решение исходной системы уравнений (1.1) — (1.4) ищется в виде

$$v_r = \omega r q_0 f'(\delta), \quad v_\varphi = \omega r q_0 \varphi(\delta), \quad v_z = \sqrt{\omega \nu q_0} G(\delta)$$

$$\frac{p - p_0}{\rho} = \omega^2 r^2 q_0^2 F(\delta)$$

$$\delta = z \sqrt{\frac{q_0 \omega}{\nu}}, \quad q_0 = \frac{q}{2\pi r^2 \sqrt{\omega \nu}}, \quad h_0 = h \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad (2.1)$$

Здесь δ — автомодельная переменная, h_0 — безразмерная толщина пленки, q_0 — безразмерный расход жидкости. f' , φ , G , F — безразмерные радиальная, тангенциальная, поперечная скорости и безразмерное давление. Здесь и далее штрих обозначает производную по δ .

Замена переменных (2.1) сводит исходную систему уравнений (1.1) — (1.4) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-f'^2 - \delta f' f'' + f' G' - \varphi^2 = 2F + \delta F' + f''' + \frac{1}{Q} (3\delta f'' + \delta^2 f''') \quad (2.2)$$

$$-\delta f' \varphi' + G \varphi' = \varphi'' + \frac{1}{Q} (3\delta \varphi' + \delta^2 \varphi'') \quad (2.3)$$

$$\delta_h = h_0 \sqrt{q_0}, \quad \bar{\sigma} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{3}{\omega}}$$

$$(2.8) \quad f = \sqrt{q_0} \quad (\delta = \delta_h)$$

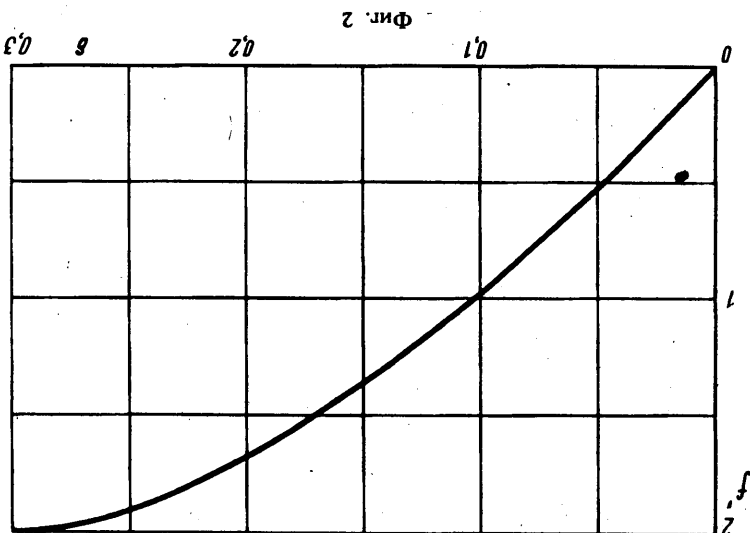
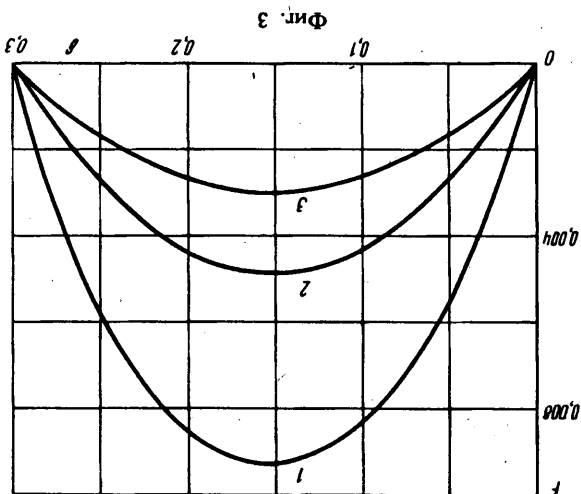
$$(2.70) \quad f' = \phi' = 0, \quad F = -\frac{\bar{\sigma}}{2} G', \quad G = -2f' q_0 \frac{dh_0}{dq_0} \quad (\delta = \delta_h)$$

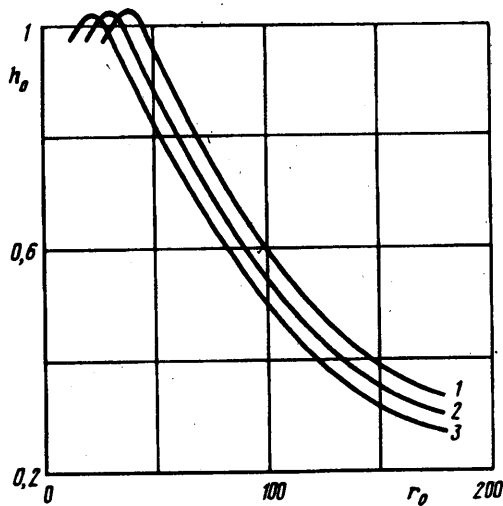
$$(2.6) \quad f = G = 0, \quad \phi = \frac{q_0}{1} \quad (\delta = 0)$$

Граничные условия (1.5)–(1.7) и уравнение (1.8) в новых переменных принимают вид

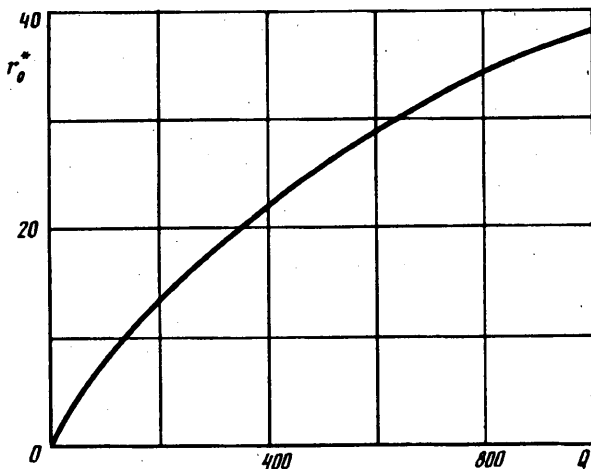
$$(2.5) \quad -\delta f'' + G' = 0$$

$$(2.4) \quad GG' - fG - \delta f'G' = -\bar{\sigma}G' + G'' + \frac{1}{f} (G + 3\delta G' + \delta^2 G'')$$





Фиг. 4



Фиг. 5

Безразмерный комплекс Q представляет собой критерий подобия, аналогичный критерию Рейнольдса, определяющему отношение инерционных и вязких сил в потоке жидкости. Действительно, выражение (1.8) может быть переписано в виде $q = 2\pi r h \langle v_r \rangle$. Толщина пленки жидкости, могущей быть вовлеченной во вращательное движение вследствие трения, $h \sim \sqrt{\nu/\omega}$ [5]. С учетом этого $Q \sim r \langle v_r \rangle / \nu$, а это выражение есть не что иное, как местный критерий Рейнольдса.

Система уравнений (2.2) — (2.5) с граничными условиями (2.6) — (2.8) интегрировалась численно на ПЭВМ методом редукции к задаче Коши с организацией итерационного процесса по методу Ньютона (метод «стрельбы») [6] для широкого диапазона значений Q .

3. Некоторые результаты численных расчетов приведены на фиг. 2—5. На фиг. 2 показано распределение безразмерной радиальной скорости f' по толщине пленки жидкости для $\delta_h = 0,3$, $Q = 100$. На фиг. 3 показано распределение безразмерного давления F по толщине пленки для $\delta_h = 0,3$ и различных значений

Q (кривые 1—3 соответствуют $Q = 100, 200, 300$). Фигура 4 показывает зависимость безразмерной толщины пленки жидкости $h_0 = h \sqrt{\omega/\nu}$ от безразмерного расстояния от центра диска $r_0 = r \sqrt{\omega/\nu}$ для $Q = 1000, 700, 500$ (кривые 1—3).

Анализ графиков показывает, что при приближении к центру диска толщина пленки жидкости монотонно возрастает, однако при достижении некоторого «критического» значения r_0^* достигает максимума и далее резко убывает. Обращает на себя внимание также тот факт, что предельная толщина пленки остается постоянной и не зависит от Q . На фиг. 5 приведена зависимость «критического» радиуса r_0^* от Q , построенная по результатам расчетов. Из графика можно сделать вывод, что в указанном диапазоне изменения аналога критерия Рейнольдса Q критический радиус r_0^* монотонно возрастает, причем $r_0^* \sim \sqrt{Q}$.

Исходя из физической модели течения, авторы предлагают следующую интерпретацию результатов численных расчетов. При достижении поступающей из источника жидкости поверхности вращающегося диска за счет совместного действия сил инерции и вязкого трения начинает формироваться пространственный пограничный слой. Однако на малых радиусах не вся поступающая жидкость может быть увлечена во вращательное движение. Участок от $r_0 = 0$ до $r_0 = r_0^*$ соответствует зоне формирования устойчивого движения жидкости. Течение в этой области носит предположительно «захлебывающийся» характер и требует отдельного исследования, выходящего за рамки данной работы.

С математической точки зрения существование этой области связано с тем, что вблизи оси симметрии не определена исходная краевая задача (1.1)—(1.8). В самом деле, хотя в этой области и справедливы полные уравнения Навье — Стокса для стационарного течения, однако не выполняются граничные условия (1.5). Действительно, на границе с твердой поверхностью должно выполняться условие $v_z = 0$ ($z = 0$), в то время как в непосредственной близости от источника это несправедливо. При $r_0 > r_0^*$ весь слой жидкости оказывается вовлеченным во вращательное движение и реализуются найденные в работе поля скоростей и давления, а также зависимость толщины пленки жидкости от расстояния от центра диска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Биркгоф Г. Гидродинамика, М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 244 с.
3. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 238 с.
4. Шульман Э. П. Конвективный перенос реологически сложных жидкостей. М.: Энергия, 1975. 352 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
6. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы высшей математики. Т. 2. Минск: Высшейш. шк., 1977. 399 с.

Волгоград

Поступила в редакцию
27.VI.1994