

УДК 532.516

© 1995 г. Ю. Я. БОЛДЫРЕВ, С. В. ЛУПУЛЯК, Ю. К. ШИНДЕР

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ РЭЛЕЯ ТЕОРИИ ГАЗОВОЙ СМАЗКИ

Рассматривается пространственная вариационная задача об оптимизации формы микрогеометрии подшипника с газовой смазкой по критерию максимума подъемной силы. Поле давления в газовом слое определяется с помощью краевой задачи Дирихле для уравнения Рейнольдса газовой смазки. Приведены результаты численного решения вариационной задачи, основанного на рассмотрении первой вариации функционала. Результаты вычислений приведены для широкого диапазона параметров задачи.

Начало исследованиям вариационных задач теории смазки положила статья Рэлея [1], опубликованная в 1918 г. Используя методы вариационного исчисления, Рэлей показал, что в одномерном случае для несжимаемой смазки максимальную подъемную силу обеспечивает подшипник с профилем, имеющим кусочно-постоянную форму с одной ступенькой. Его результаты были подтверждены Мэдеем в работах [2, 3], где также приведено решение одномерной вариационной задачи, отвечающей сжимаемой газовой смазке. Вместе с тем пространственные вариационные задачи, имеющие большую практическую значимость, долгое время не находили своего разрешения. По-видимому, первой работой, где пространственная задача изучалась с использованием методов вариационного исчисления, была работа [4]. Здесь с помощью качественного анализа системы необходимых условий экстремума функционала найдено решение задачи Рэлея для случая несжимаемого газа, которому отвечает линейное уравнение Рейнольдса. Эта задача исследовалась и в [5]. Заметим, что качественный характер найденных в указанных работах решений был предсказан еще Рэлеем в упомянутой выше статье [1].

В настоящей работе рассматривается двумерная вариационная задача Рэлея для случая сжимаемой газовой смазки, отвечающего нелинейному уравнению Рейнольдса.

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — открытая прямоугольная область с границей $\partial\Omega: \Omega = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1, |x_2| < 0,5\}$. Смазываемая поверхность, лежащая в плоскости x_1, x_2 прямоугольных декартовых координат, скользит в направлении оси x_1 с постоянной скоростью. Поле давления в смазочном слое, находящемся между неподвижной и подвижной поверхностями, описывается уравнением Рейнольдса теории газовой смазки [6]

$$\operatorname{div}(h^3 p \nabla p - \Lambda h p v) = 0 \quad (1.1)$$

$$\Lambda = \frac{6\mu U_0 L_1}{\rho_a h_0^2}$$

где $p(x_1, x_2)$ и $h(x_1, x_2)$ — безразмерные давление газа и величина смазочного слоя, нормированные по давлению среды p_a и минимальному зазору h_0 соответственно. Другие обозначения в (1.1): Λ — так называемое число сжимаемости (физический критерий подобия), в котором U_0 и L_1 — характерные скорость и размер смазываемой поверхности, μ — вязкость газа. Двумерные операторы div и ∇ определены вдоль поверхности смазочного слоя и нормированы по масштабу

L_1 , v — вектор скорости скольжения, отнесенной к величине U_0 . Граничным условием к уравнению (1.1) является равенство давления на границе области давлению окружающей среды

$$p|_{\partial\Omega} = 1 \quad (1.2)$$

На функцию h наложены ограничения

$$1 = h_{\min} \leq h \leq h_{\max} \quad (1.3)$$

первое из которых является следствием нормировки, а второе обусловлено технологическими соображениями.

В случае малых чисел сжимаемости Λ , отвечающих несжимаемой смазке, уравнение Рейнольдса может быть линеаризовано путем введения избыточного давления с помощью соотношения $p = 1 + \Lambda p' + O(\Lambda^2)$, после чего краевая задача (1.1), (1.2) принимает вид

$$\operatorname{div}(h^3 \nabla p' - h v) = 0 \quad (1.4)$$

$$p'|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1.5)$$

Как видим, уравнение Рейнольдса принципиально упростилось и, в частности, поэтому вариационные задачи, связанные с несжимаемой смазкой, рассматривались ранее. Например, в [4, 7] именно благодаря линейности уравнения Рейнольдса удалось достаточно далеко продвинуться в качественном анализе системы необходимых условий вариационной задачи.

В качестве функционала вариационной задачи, следуя Рэлею, выберем подъемную силу смазочного слоя

$$W = \int_{\Omega} (p - 1) d\Omega \quad (1.6)$$

Итак, необходимо разыскать такую форму профиля неподвижной поверхности $h(x_1, x_2)$, которая обеспечит создание поля давления $p(x_1, x_2)$, дающего максимум функционалу (1.6). При этом отметим, что функция профиля h , входящая в коэффициенты уравнения (1.1), существенным образом влияет на характер поля давления.

Запишем уравнение (1.1) в виде системы уравнений

$$\operatorname{div} Q = 0, \quad Q = -h^3 p \nabla p + \Lambda h p v \quad (1.7)$$

и удовлетворим первому из них, определив непрерывную функцию M с помощью соотношения $Q = \operatorname{rot}(M i_3)$ (где i_3 — орт оси x_3 ортогональных координат x_1, x_2, x_3). Условие (1.3) перепишем в форме равенства, введя вспомогательную функцию $v(x_1, x_2)$

$$\Phi \equiv (h_{\max} - h)(h - h_{\min}) - v^2 = 0 \quad (1.8)$$

Следуя подходам вариационного исчисления, будем разыскивать минимум расширенного функционала I , полученного присоединением к функционалу (1.6), взятому со знаком минус, ограничений (1.7) и (1.8) с помощью векторных множителей Лагранжа $\xi(x_1, x_2)$, $\lambda(x_1, x_2)$ и скалярного множителя $\mu(x_1, x_2)$

$$I = - \int_{\Omega} [(p - 1) + (\xi, Q - \operatorname{rot}(M i_3)) + (\lambda, Q + h^3 p \nabla p - \Lambda h p v) + \mu \Phi] d\Omega \quad (1.9)$$

Отметим, что при удовлетворении всех ограничений задачи поиск максимума функционала (1.6) эквивалентен поиску минимума функционала (1.9). Итак, требуется найти такую пару p и h , которые обеспечивают минимум функционалу I , определяемому формулой (1.9). Перейдем к рассмотрению первой вариации

функционала I и выпишем отвечающую ей систему необходимых условий экстремума.

2. Первая вариация функционала I и система необходимых условий экстремума. Рассмотрим первую вариацию функционала I , получающуюся при варьировании функций p , h , Q и v . Из необходимого условия экстремума функционала

$$\delta I = 0$$

имеем следующую систему уравнений Эйлера — Лагранжа:

$$\xi + \lambda = 0, \quad (i_3, \text{rot } \xi) = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{div} (h^3 p \lambda) - (h^3 \nabla p - \Lambda h v, \lambda) + 1 = 0 \quad (2.2)$$

$$-(3h^2 p \nabla p - \Lambda p v, \lambda) + \mu (h_{\max} + h_{\min} - 2h) = 0, \quad \mu v = 0 \quad (2.3)$$

В силу неподвижности границ области и краевого условия (1.2) условия трансверсальности сводятся к соотношению $(\lambda_i \delta M) = 0$ на $\partial \Omega$. Удовлетворим последнему соотношению, положив

$$\lambda_i = 0 \quad \text{на } \partial \Omega. \quad (2.4)$$

Второе уравнение (2.1) может быть удовлетворено с помощью соотношения $\xi = -\nabla \eta$. Таким образом, из (2.1) имеем $\lambda = -\xi = \nabla \eta$. Тогда условие (2.4) принимает вид $\lambda_i = \partial \eta / \partial \tau = 0$, откуда находим $\eta = \text{const}$ на $\partial \Omega$. Выбирая $\text{const} = 0$, получим

$$\eta|_{\partial \Omega} = 0 \quad (2.5)$$

Перепишем уравнение (2.2), используя функцию η

$$\text{div} (h^3 p \nabla \eta) - (h^3 \nabla p - \Lambda h v, \nabla \eta) + 1 = 0 \quad (2.6)$$

Условия Эрдмана — Вейерштрасса могут быть эффективно использованы в численных алгоритмах при построении линии разрыва функции h , если вариационная задача имеет кусочно-гладкое решение. Выпишем эти условия в окончательной форме, отсылая за деталями к работе [7]

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right]_{-}^{+} = 0, \quad \left[\frac{\partial \eta}{\partial n} p h^3 \right]_{-}^{+} = 0 \quad \text{на } x \quad (2.7)$$

$$\left[-(p-1) + \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \frac{\partial M}{\partial n} - h^3 p \frac{\partial \eta}{\partial n} \frac{\partial p}{\partial n} \right]_{-}^{+} \delta n = 0 \quad \text{на } x \quad (2.8)$$

Здесь x — проекция линии разрыва h на плоскость x_1, x_2 , $\partial / \partial n$ и $\partial / \partial \tau$ — производные по нормали и по касательной к x соответственно, δn — вариация нормали к линии разрыва.

Введем локальные координаты n, τ, i_3 вдоль линии разрыва функции h , тогда непрерывность $\partial \eta / \partial \tau$ в этих координатах, согласно (2.7), означает непрерывность функции — множителя Лагранжа η при переходе через линию разрыва h

$$[\eta]_{-}^{+} = 0 \quad (2.9)$$

В дополнение к условиям (2.7), (2.8) выпишем также соотношения на линии разрыва функции h , связанные с непрерывностью функций p и M

$$\left[\frac{\partial p}{\partial \tau} \right]_{-}^{+} = 0, \quad \left[\frac{\partial M}{\partial \tau} \right]_{-}^{+} = 0 \quad (2.10)$$

а также, в согласии с определением функции M , выражения для компонент вектора Q в координатах n, τ, i_3

$$Q_n = \frac{\partial M}{\partial \tau}, \quad Q_\tau = -\frac{\partial M}{\partial n} \quad (2.11)$$

В [7] приведен подробный вывод неравенства Вейерштрасса сильного экстремума функционала для вариационной задачи, связанной с линейным уравнением Рейнольдса. Вывод для нелинейного случая не содержит принципиально новых моментов и, так же как и в [7], сводится к рассмотрению предельного перехода на области малой меры с исключением на ее границе разрывных величин с помощью соотношений (2.7), (2.8) и (2.10), (2.11). Окончательное выражение для функции Вейерштрасса имеет вид

$$E = (H - h) ((\nabla \eta, R(h, H)) - m \frac{\partial \eta}{\partial n} R_n(h, H)) > 0 \quad (2.12)$$

$$m = \frac{H^3 - h^3}{H^3}, \quad R(h, H) = p(H^2 + Hh + h^2) \nabla p - \Lambda p v$$

Здесь H — допустимое в рамках неравенств (1.3) значение функции профиля, причем p и η вычисляются на экстремальном профиле h . Неравенство (2.12) должно выполняться поточечно в Ω .

На основе выписанной системы необходимых условий удается сделать некоторые заключения о качественном характере решения вариационной задачи. Действительно, из неравенства Вейерштрасса (2.12) следует

$$(\nabla \eta, R(h_{\min}, H)) - m_{\min} \frac{\partial \eta}{\partial n} R_n(h_{\min}, H) > 0, \quad h = h_{\min} \quad (2.13)$$

$$(\nabla \eta, R(h_{\max}, H)) - m_{\max} \frac{\partial \eta}{\partial n} R_n(h_{\max}, H) < 0, \quad h = h_{\max}$$

$$(\nabla \eta, R(h, h)) = 0, \quad h_{\min} < h < h_{\max}$$

$$m_{\min} = \frac{H^3 - h_{\min}^3}{H^3}, \quad m_{\max} = \frac{H^3 - h_{\max}^3}{H^3}$$

Поэтому

$$(\nabla \eta, R(h_{\min}, h_{\min})) > 0, \quad (\nabla \eta, R(h_{\max}, h_{\max})) < 0 \quad (2.14)$$

Также из неравенства Вейерштрасса (2.12) при локальной ориентации области варьирования малой меры так, что $\partial \eta / \partial n = 0$, имеем

$$E = (H - h) (\nabla \eta, R(h, h)) + 3h(H - h)^2 p (\nabla \eta, \nabla p) + (H - h)^3 p (\nabla \eta, \nabla p) > 0$$

Откуда находим, что неравенство Вейерштрасса не нарушится, если

$$H - h > 0, \quad h = h_{\max}, \quad p (\nabla \eta, \nabla p) > 0$$

$$H - h < 0, \quad h = h_{\min}, \quad p (\nabla \eta, \nabla p) > 0$$

а также, для произвольного значения величины $H - h$, т. е. если

$$h_{\min} < h < h_{\max}, \quad p (\nabla \eta, \nabla p) > 0.$$

Итак, при $h_{\min} \leq h \leq h_{\max}$ имеем

$$p (\nabla \eta, \nabla p) > 0 \quad (2.15)$$

Неравенство (2.15) наличием множителя p отличается от аналогичного неравенства в случае линейного уравнения Рейнольдса, отвечающего несжимаемой

смазке [7]. При этом неравенству (2.15) с учетом естественного для газовой смазки условия $p > 0$ в Ω соответствует неравенство

$$(\nabla\eta, \nabla p) > 0 \quad (2.16)$$

которое в совокупности с уравнениями Эйлера — Лагранжа (2.3) позволяет также определить и знак произведения $(\nabla\eta, \mathbf{v})$ в каждом из случаев (2.14), а также для промежуточного режима $h_{\min} < h < h_{\max}$ из формул (2.13). Действительно, согласно второму уравнению (2.3), имеем следующие возможности:

$$\begin{aligned} \mu = 0, \quad \mathbf{v} \neq 0, \quad h_{\min} < h < h_{\max} \\ \mu \neq 0, \quad \mathbf{v} = 0, \quad h = h_{\min}, \quad h = h_{\max} \\ \mu = 0, \quad \mathbf{v} = 0, \quad h_{\min} \leq h \leq h_{\max} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Отбрасывая последний случай как тривиальный и не позволяющий подключить ограничение (1.6) на множестве полной меры в Ω , получаем из первой группы условий (2.17) и из первого уравнения (2.3) с учетом $p > 0$

$$3h^2 = \frac{(\nabla\eta, \mathbf{v})}{(\nabla p, \nabla\eta)} \quad (2.18)$$

Отсюда в согласии с (2.16) при $h_{\min} < h < h_{\max}$ имеем

$$(\nabla\eta, \mathbf{v}) > 0 \quad (2.19)$$

Аналогично для случаев, отвечающих второй группе условий (2.17), неравенства (2.14) будут заведомо выполняться, если

$$(\nabla\eta, \mathbf{v}) \leq 0, \quad h = h_{\min} \quad (2.20)$$

$$(\nabla\eta, \mathbf{v}) \geq 0, \quad h = h_{\max} \quad (2.21)$$

Таким образом, как и в линейной вариационной задаче для несжимаемой смазки, в задаче для газовой смазки неравенства (2.19)—(2.21) определяют характер оптимального профиля h . Поэтому попытаемся аналогично [7] определить знаки скалярного произведения $(\nabla\eta, \mathbf{v})$ в Ω и на ее границе $\partial\Omega$, воспользовавшись некоторыми свойствами решений дифференциальных уравнений (1.1) и (2.6). При этом решение уравнения Рейнольдса (1.1) разыскиваем среди непрерывных функций, исходя из физических соображений, а на непрерывность решения уравнения (2.6) указывают условия Эрдмана — Вейерштрасса (2.9).

Принципиальным моментом является то обстоятельство, что мы будем исходить из существования в данной задаче классического, т. е. кусочно-непрерывного оптимального профиля h в Ω . Иначе говоря, считаем, что Ω состоит из конечного числа подобластей, в каждой из которых имеется дифференцируемое требуемое число раз решение уравнений (1.1) и (2.6). В таком случае решение краевой задачи для η (2.5), (2.6) удовлетворяет на $\partial\Omega$ условию $\partial\eta/\partial l > 0$, где l — любое направление, выходящее из произвольной точки контура и такое, что $\cos(l, \mathbf{n}) < 0$ (\mathbf{n} — вектор внешней нормали к контуру $\partial\Omega$) [8]. Также будем разыскивать такое решение p задачи (1.1), (1.2) в Ω , которое удовлетворяет на $\partial\Omega$ неравенству Вейерштрасса (2.16), тогда наряду с $\partial\eta/\partial l > 0$ имеем на $\partial\Omega$ $\partial p/\partial l > 0$. Последнее неравенство согласуется с условием $p > 1$ в Ω , которое означает отсутствие разрывов в окрестности границы области и служит критерием отбора допустимых функций p , удовлетворяющих необходимым условиям вариационной задачи. Итак, на границе $\partial\Omega$ области Ω имеем

$$\partial\eta/\partial l > 0, \quad \partial p/\partial l > 0 \quad (2.22)$$

Λ	$\gamma=0,0$	0,1	0,5	1,0
1	0,0344	0,0323	0,0269	0,0208
5	0,16488	0,1558	0,1319	0,1048
10	0,3042	0,2890	0,2500	0,2037
50	0,9561	0,9190	0,8417	0,7463
100	1,4384	1,3860	1,2971	1,1865

Тогда в силу постоянства вектора v имеем из первого условия (2.22)

$$(\nabla\eta, v) > 0 \quad (x_1 = 0, |x_2| < 0,5)$$

$$(\nabla\eta, v) < 0 \quad (x_1 = 1, |x_2| < 0,5) \quad (2.23)$$

$$(\nabla\eta, v) = 0 \quad (0 < x_1 < 1, |x_2| = 0,5)$$

Откуда аналогично [7] имеем всюду на боковых границах $h = h_{\min}$, исключая переднюю кромку ($x_1 = 0, |x_2| < 0,5$) области, где $h = h_{\max}$ или $h_{\min} < h < h_{\max}$. Продолжая по непрерывности $h = h_{\min}$ от границ внутрь области Ω , заметим, что здесь уравнение Рейнольдса вырождается в уравнение, удовлетворяющее неравенству вида

$$p\Delta p - \Lambda \frac{\partial p}{\partial x_1} = -(\nabla p)^2 \leq 0$$

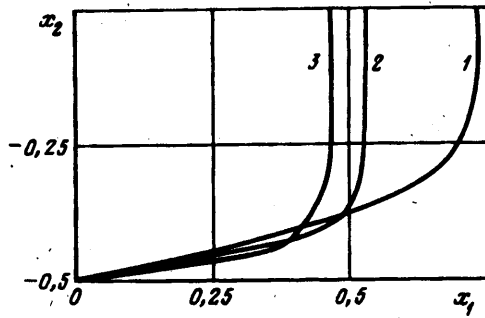
Но из этого неравенства, согласно свойствам эллиптических уравнений [9], следует, что p может достигать максимального значения только на внутренней границе подобласти с $h = h_{\min} = 1$.

Совершенно аналогично обстоит дело и в области, примыкающей к передней кромке, если там $h = h_{\max}$. В том случае, если к передней кромке примыкает область промежуточных значений h , т. е. если $h_{\min} < h < h_{\max}$, в согласии с (2.18) и по ограниченности h вектор ∇p не может обратиться в нуль в этой области, что следует и из (2.16). Таким образом, p не может принимать здесь максимальных значений, которые могут достигаться только на внутренней границе, где функция профиля переходит от промежуточного режима $h_{\min} < h < h_{\max}$ к значению $h = h_{\min}$ или $h = h_{\max}$.

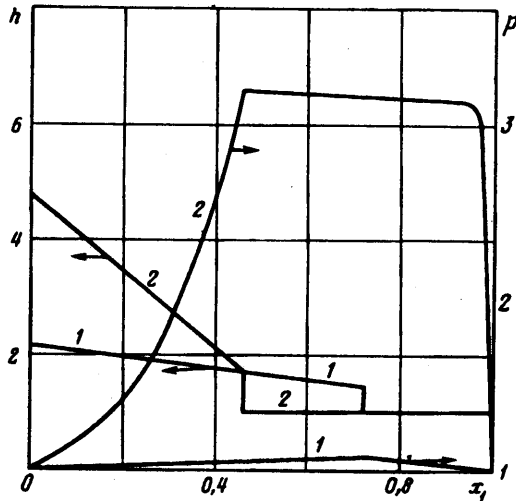
Из этих рассуждений следует, что в передней части Ω , отвечающей $h > h_{\min}$, происходит повышение давления газа, тогда как в области с $h = h_{\min}$, выходящей на боковые границы и заднюю кромку, давление газа выравнивается до атмосферного. Отсюда приходим к выводу о существовании одной линии разрыва в данной задаче. В согласии с (2.23) она выходит на границу в точках $(x_1 = 0, x_2 = 0,5)$; $(x_1 = 0, x_2 = -0,5)$.

3. Численный анализ и результаты. После установления качественного характера оптимального решения можно строить различные алгоритмы для уточнения экстремальной функции h_* и отвечающего ей поля давления p_* . В частности, следуя [7], можно уточнить линию разрыва функции h с использованием последнего из условий Эрдмана — Вейерштрасса (2.8), которое должно быть удовлетворено в пределе, а значения h в области «кармана» определять с использованием первого уравнения (2.3). Можно использовать градиентный метод, связанный с первой вариацией функционала I , частично удовлетворяя выписанной в разд. 2 системе необходимых условий минимума. При этом первая вариация δI может быть записана в виде

$$\delta I = \int_{\Omega} \{[-(3h^2 p \nabla p - \Lambda p v, \nabla \eta) + \mu (h_{\max} + h_{\min} - 2h)] \delta h + 2\mu v \delta v\} d\Omega \quad (3.1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Последовательность шагов алгоритма включает в себя решение краевых задач (1.1), (1.2) и (2.5), (2.6) и вычисление вариации $\delta h(x_1, x_2)$ с использованием формул (2.3). При этом аппроксимация искомой функции $h(x_1, x_2)$ производится непрерывными функциями на каждой из итераций. Для решения краевых задач здесь использовались вариационно-разностные методы (методы конечных элементов).

Перейдем к обсуждению результатов вычислений, которые проводились для различных значений параметров задачи — числа сжимаемости Λ и удлинения $\gamma = L_1/L_2$ (здесь L_2 — размер области по x_2).

В таблице приведены значения величины подъемной силы W для рассматриваемого диапазона параметров Λ и γ . Естественно сравнить найденные решения при малых γ , отвечающих протяженной поперек направления скольжения области Ω , с результатами решения одномерной задачи [3], которым соответствует $\gamma = 0$.

На фиг. 1 приведены проекции линии разрыва профилей на плоскости x_1, x_2 для различных значений параметра Λ при $\gamma = 1$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют $\Lambda = 1, 50, 100$. На фиг. 2 приведены сечения профилей плоскостью $x_2 = 0$ для различных Λ . Кривые 1, 2 соответствуют $\Lambda = 1, 100$.

Качественный характер найденных решений полностью согласуется как с результатами решения одномерных задач [1–3], так и с решениями пространственной задачи для несжимаемой смазки [4, 5]. Близкими оказываются и величины подъемной силы. Так, для $\gamma = 0,1, 0,5, 1,0$, согласно [4], имеем соответственно следующие значения подъемной силы: $W = 0,0328\Lambda, 0,0266\Lambda,$

0,0199 Λ . В рассматриваемом случае для $\Lambda = 1$ имеем соответственно $W = 0,0323, 0,0269, 0,0208$.

Важную роль играет то обстоятельство, что численный алгоритм сходится к единственной функции h_* из различных начальных приближений для всего набора параметров Λ и γ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh*. Notes on the theory of lubrication//Phil. Mag. 1918. V. 35. P. 1—12.
2. *Maday C. J.* A bounded variable approach to the optimum slider bearing//Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol. 1968. V. 90. № 1. P. 240—242.
3. *Maday C. J.* The one-dimensional optimum hydrodynamics gas slider bearing//Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol. 1968. V. 90. № 1. P. 281—284.
4. *Болдырев Ю. Я., Троицкий В. А.* Одна пространственная вариационная задача газодинамической теории смазки//Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 34—39.
5. *Rohde S. M., McAllister G. T.* On the optimization of fluid film bearings//Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1976. V. 351. № 1667. P. 481—497.
6. *Константинеску В. Н.* Газовая смазка. М.: Машиностроение, 1968. 718 с.
7. *Болдырев Ю. Я., Борисов Ю. В.* Упорный секторный подшипник с газовой смазкой, имеющий максимальную несущую способность//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 35—42.
8. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 203 с.
9. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
27.VII.1994