

УДК 532.51.013.4:532.135

© 1995 г. Е. С. ЛОСЕВ, Н. В. НЕТРЕБКО

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ КРОВИ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

На основе реологической модели крови, учитывающей как тиксотропные, связанные с агрегационной способностью эритроцитов, так и вязкоупругие свойства, рассматриваются вопросы моделирования ее течения при невысоких скоростях сдвига в нестационарных условиях. Полученные зависимости сдвигового напряжения от времени при одноразовых прямоугольных изменениях скорости сдвига и зависимости компонент комплексной вязкости от амплитуды колебаний скорости сдвига при осциллирующем течении демонстрируют хорошее качественное соответствие известным из литературы экспериментальным данным.

1. Большинство вискозиметрических экспериментов с кровью проведено в стационарных условиях. Результаты этих экспериментов, как правило, трактуются в рамках модели нелинейно-вязкой жидкости с реологическим соотношением

$$\tau_{ij} = 2\mu(I) e_{ij}, \quad I = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}} \quad (1.1)$$

где $\tau_{ij} e_{ij}$ — компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций, I — второй инвариант тензора скоростей деформаций, и для простых сдвиговых течений представляются в величинах «напряжение — скорость сдвига» или «эффективная (кажущаяся) вязкость — скорость сдвига»

$$\tau = \tau(I), \quad \mu_e = \mu_e(I) \quad (1.2)$$

Характерной особенностью крови, влияющей на ее реологическое поведение при невысоких скоростях сдвига, является способность эритроцитов образовывать агрегаты [3]. В связи с этим применение зависимостей типа (1.2) к нестационарным режимам течения крови возможно лишь в ситуации, когда изменения агрегационной структуры мгновенно следуют за изменением скорости сдвига, что заведомо непригодно для процессов с характерным временем, меньшим или порядка 1 с. Кроме того, в нестационарных течениях при низких скоростях сдвига проявляется эффективная вязкоупругость крови [9—11, 13—15], возникающая преимущественно за счет упругости эритроцитарных агрегатов. Указанные особенности могут быть учтены, если вместо (1.1) записать простейшее уравнение вязкоупругости (ради простоты нелинейными членами в относительных производных по времени будем пренебрегать)

$$\lambda_1 \frac{d\tau_{ij}}{dt} + \tau_{ij} = 2\mu \left(e_{ij} + \lambda_2 \frac{de_{ij}}{dt} \right) \quad (1.3)$$

и использовать модель крови как модель тиксотропной жидкости с учетом кинетики агрегации [3—7]. Эта модель включает предположение о зависимостях коэффициентов в (1.3) от числовой концентрации агрегатов N и уравнение кинетики агрегации

$$\mu = \mu(N), \quad \lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(N) \quad (1.4)$$

$$\frac{dN}{dt} = \Gamma^+(N, I) - \Gamma^-(N, I) \quad (1.5)$$

Здесь $\Gamma^+, \Gamma^- > 0$ — скорости распада и слипания агрегатов. При этом допущается, что зависимость (1.4) в отличие от (1.2) справедлива для любых, в том числе нестационарных, процессов.

Очевидно, что в стационарном случае ($dN/dt = 0$) уравнение (1.5) однозначно связывает значения N и I , поэтому поведение тиксотропной жидкости сводится к нелинейной вязкости, а подстановка зависимости $N = N(I)$ в (1.3), (1.4) приводит (в одномерной постановке) к соотношениям (1.2). Используем это соображение для того, чтобы из экспериментально определенного в стационарных условиях соотношения (1.2) и стационарного решения уравнения (1.5) восстановить зависимость (1.4), которая практически не поддается непосредственному экспериментальному определению.

К настоящему времени предложено множество почти эквивалентных эмпирических зависимостей типа (1.1) [2, 3]. Воспользуемся одной из них — формулой Кессона

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + k\sqrt{I} \quad (1.6)$$

где τ_0 — предельное напряжение сдвига и k — коэффициент, характеризующий вязкость. С учетом инвариантного обобщения (1.6) [3] выражение для эффективной вязкости можно представить в виде

$$\mu_e = \mu_\infty \left(1 + \frac{a}{\sqrt{I}}\right)^2, \quad a = \sqrt{\tau_0}, \quad \mu_\infty = k^2 \quad (1.7)$$

где μ_∞ — вязкость при больших скоростях сдвига, когда кровь полностью дезагрегирована.

Уравнение (1.5) для сдвиговых течений будем использовать в следующем виде [3—5]:

$$\frac{dZ}{dt} = -\alpha_1 I Z + \alpha_2 I (1 - Z) Z^{1-n} \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^m, \quad Z = \frac{N}{N_*} \quad (1.8)$$

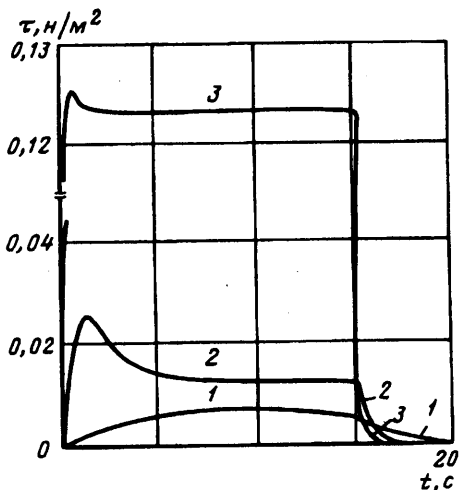
где Z — безразмерная числовая концентрация агрегатов; N_* — максимальное значение N ; σ — характерное напряжение, приводящее к разрушению агрегатов; m, n — эмпирические константы; α_1, α_2 — коэффициенты, характеризующие интенсивности соответственно слипания и распада агрегатов в сдвиговом течении. В стационарном случае подстановка выражения для скорости сдвига как функции концентрации из уравнения (1.8) в выражение (1.7) с учетом (1.3) дает

$$\mu = \frac{\mu_\infty}{(1 - a\sqrt{B})}, \quad B = \beta Z^{n/m} (1 - Z)^{1/m}, \quad \beta = \frac{\mu_\infty}{\sigma} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{1/m} \quad (1.9)$$

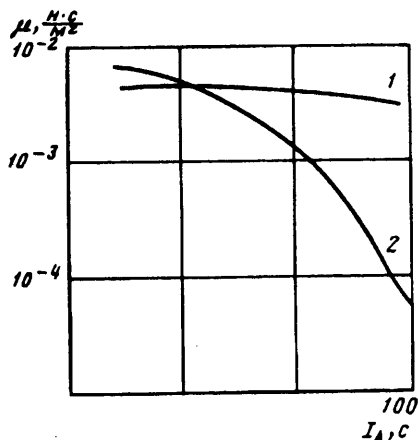
Согласно исходному допущению, принятому при формулировке модели (1.4), (1.5), соотношение (1.9) в отличие от (1.7) справедливо и для нестационарных сдвиговых течений. Кроме того, (1.9) имеет более универсальный характер по отношению к агрегационной способности эритроцитов: для стационарных течений охватывает целый класс зависимостей типа (1.2) или (1.7) при различных значениях параметров $\sigma, \alpha_1, \alpha_2$, отражающих агрегационные свойства. Область изменения Z в (1.9) ограничена снизу значением Z_{\min} , которое при $Z_{\min} \ll 1$ определяется формулой $Z_{\min} = (\beta a^2)^{-m/n}$. Учитывая результаты [1], положим в (1.3)

$$\lambda_1 = \frac{\mu}{E}, \quad \lambda_2 = \xi \lambda_1 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (1.10)$$

где E — модуль сдвиговой упругости. С физической точки зрения модуль E связан в первую очередь с упругостью эритроцитарных агрегатов как единой конструкции и потому существенно зависит как от объемной, так и числовой



Фиг. 1



Фиг. 2

концентрации эритроцитов. Полагая, что модуль упругости при полной дезагрегации ($Z = 1$), связанный с упругостью отдельных частиц, существенно превосходит модуль упругости при максимальной агрегации ($Z \rightarrow 0$), примем простейшее выражение

$$E = E_0 (1 + qZ^p) \quad (1.11)$$

где q, p — числовые коэффициенты, $q \gg 1$. Для однородного сдвигового течения уравнение (1.3) можно записать в виде

$$\lambda_1 \frac{d\tau}{dt} + \tau = \mu \left(I + \lambda_2 \frac{dI}{dt} \right) \quad (1.12)$$

2. Рассмотрим реологическое поведение крови при ступенчатом изменении скорости сдвига, основываясь на уравнениях (1.8), (1.12) с учетом соотношений (1.7), (1.9) — (1.11). Будем предполагать, что к моменту времени ($t = 0$), в который происходит скачкообразное изменение скорости сдвига от нуля до заданного значения I_m , кровь находится в состоянии покоя достаточно длительное время. Далее скорость сдвига поддерживается постоянной в течение промежутка времени t_0 с последующим скачкообразным падением до нуля. Начальные условия

$$\tau(0) = 0, \quad Z(0) = Z_0, \quad Z_{\min} < Z_0 < 1 \quad (2.1)$$

Значение Z_0 связано с агрегационными свойствами конкретного образца крови. Варьирование параметров, входящих в указанную систему уравнений, позволяет получить заметное разнообразие в поведении кривых зависимости сдвигового напряжения от времени при различных скоростях сдвига, в том числе получить хорошее качественное и разумное количественное соответствие экспериментальным данным. В частности, результаты численных расчетов, проведенные на фиг. 1, соответствуют данным [12] и получены при следующих значениях параметров:

$$n = 0,6; \quad m = 1; \quad p = 1; \quad q = 200; \quad \mu_\infty / E_0 = 0,1c \quad (2.2)$$

$$\alpha = 0,4; \quad \beta = 20 \text{ с}; \quad Z_0 = 1,9 \cdot 10^{-3}$$

Кривые 1—3 соответствуют значениям $I_m = 0,05; 1,0; 20 \text{ с}^{-1}$. Отметим, что при стремлении Z_0 к предельному значению Z_{\min} кривые решения рассматриваемой задачи стремятся к конечному предельному виду. Для значений параметров (2.2)

$Z_{\min} = 8,818 \cdot 10^{-4}$ и вид кривых остается практически неизменным при изменении Z_0 в диапазоне $2 \cdot 10^{-3} > Z_0 > Z_{\min}$. При варьировании Z_0 в более широких пределах зависимость сдвигового направления от времени может существенно изменяться в количественном и качественном отношении. Выбор конкретного значения Z_0 для сравнения теоретических расчетов с экспериментальными данными осложняется тем, что в отсутствие сдвига характерное время формирования стационарной структуры может быть весьма большим (во всяком случае сопоставимым с характерным временем оседания), в связи с чем в экспериментах, по-видимому, не удастся достичь стационарных значений Z_0 к моменту скачкообразного изменения скорости сдвига и Z_0 зависит от времени первоначальной выдержки образца крови в состоянии покоя.

3. Рассмотрим некоторые вопросы интерпретации колебательного режима для однородного сдвигового течения крови. Пусть скорость сдвига задается в виде $I(t) = I_A \sin \omega t$.

Рассмотрим наиболее интересный случай $t_* \omega \gg 1$. Поскольку при этом размер агрегатов не успевает существенно измениться в течение периода колебаний, естественно представить решение уравнения (1.8) в виде $Z(t) = \langle Z(t) \rangle + Z'(t)$, где $\langle \dots \rangle$ означает осреднение по периоду времени t_* , намного превосходящему $(1/\omega)$, $Z'(t)$ — быстро меняющаяся во времени составляющая $Z(t)$, причем

$$\frac{1}{t_*} \int_0^{t+t_*} Z'(\tau) d\tau \rightarrow 0 \quad (t_* \omega \rightarrow \infty)$$

Предположим, что значения I_A не слишком велики, так что можно считать $Z'(t) \ll Z_s$, где $Z_s = \text{const}$ — стационарное значение $\langle Z(t) \rangle$. Тогда при установившемся (в том смысле, что $\langle Z(t) \rangle = Z_s$) колебательном режиме для коэффициентов вязкости и упругости, входящих в систему (1.3), (1.8) и представленных в виде $\mu = \langle \mu \rangle + \mu'$, $E = \langle E \rangle + E'$, справедливы соотношения $\langle \mu(Z) \rangle = \mu(Z_s)$, $\langle E(Z) \rangle = E(Z_s)$, $\mu' \ll \langle \mu \rangle$, $E' \ll \langle E \rangle$. Согласно (1.8), Z_s можно определить из уравнения ($m = 1$)

$$0 = -Z_s I_A \left(\frac{1}{t_*} \int_0^{t+t_*} |\sin \omega \tau| d\tau \right) + \beta Z_s^{1-n} (1 - Z_s) \frac{\mu(Z_s)}{\mu_\infty} I_A^2 \left(\frac{1}{t_*} \int_0^{t+t_*} \sin^2 \omega \tau d\tau \right)$$

При $t_* \omega \ll 1$ после интегрирования получим

$$Z_s^n (1 - Z_s) \mu(Z_s) = \frac{4\mu_\infty}{\pi \beta I_A} \quad (3.1)$$

С учетом (1.9) это соотношение можно переписать в виде следующего уравнения для Z_s :

$$\frac{Z_s^n}{(1 - Z_s)} = q, \quad q = \beta \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi I_A} + a \right)^2$$

В частности, для $n = 1/2$ получаем

$$Z_s = \frac{(\sqrt{1 + 4q^2} - 1)^2}{4q^2}$$

Подстановка (3.1) в (1.9) дает следующую зависимость осредненного значения вязкости от амплитуды скорости сдвига:

$$\langle \mu \rangle = \mu_\infty \left[1 + a \sqrt{\frac{4}{\pi I_A}} \right]^2 \quad (3.2)$$

Для установившегося (в указанном выше смысле) колебательного режима осредненную комплексную вязкость, согласно уравнению (1.12), можно представить в виде

$$\langle \mu^* \rangle = \mu' - i\mu'', \quad \mu' = \langle \mu \rangle \frac{1 + \langle \lambda_1 \rangle \langle \lambda_2 \rangle \omega^2}{1 + \langle \lambda_1 \rangle^2 \omega^2} \quad (3.3)$$

$$\mu'' = \langle \mu \rangle \frac{(\langle \lambda_1 \rangle - \langle \lambda_2 \rangle) \omega^2}{1 + \langle \lambda_1 \rangle^2 \omega^2}$$

где μ' , μ'' — соответственно вязкая и упругая составляющие комплексной вязкости. Характерные зависимости этих составляющих от амплитуды скорости сдвига I_A , рассчитанные согласно (3.2), (3.3), приведены на фиг. 2 (для расчета выбраны значения (2.2), а также $\omega = 12,5 \text{ с}^{-1}$). Качественное поведение кривых соответствует экспериментальным данным [15].

В заключение отметим, что требование удовлетворительного количественного согласования теоретических расчетов на основе системы (1.8), (1.12) и экспериментальных данных для различных реологических ситуаций, в которых существенна агрегация эритроцитов, ставят довольно жесткие требования к эмпирическим константам и функциям, входящим в эту систему. Это обстоятельство позволяет надеяться, что дальнейшее сопоставление теоретических расчетов с экспериментальными данными позволит более детально конкретизировать предложенную модель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы механики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
2. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. М.: Мир, 1981. 624 с.
3. Леатов В. А., Регирер С. А., Шадрина Н. Х. Реология крови. М.: Медицина, 1982. 270 с.
4. Лосев Е. С., Нетребко Н. В., Орлова И. В. Гравитационное оседание агрегирующих частиц в сдвиговом потоке//Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 2. С. 95—98.
5. Нетребко Н. В., Орлова И. В., Регирер С. А. Квазистационарное пульсирующее течение тиксотропной жидкости в цилиндрической трубке//Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 3—9.
6. Регирер С. А., Шадрина Н. Х. О моделях тиксотропных жидкостей//ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 856—865.
7. Шадрина Н. Х. О сдвиговых течениях тиксотропной жидкости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 3—12.
8. Charara J., Aurengo A., Lelievre J. C., Lacombe C. Quantitative characterization of blood rheological behavior in transient flow with a model including a structure parameter//Biorheology. 1985. V. 22. № 6. P. 509—520.
9. Chien S., King R. G., Skalak R. et al. Visco-elastic properties of human-blood and red-cell suspensions//Biorheology. 1975. V. 12. № 6. P. 341—346.
10. Copley A. L., King R. G., Chien S. et al. Microscopic observations of viscoelasticity of human-blood in steady and oscillatory shear//Biorheology. 1975. V. 12. № 5. P. 257—263.
11. McMillan D. E., Utterback N. Maxwell fluid behavior of blood at low shear rate//Biorheology. 1980. V. 17. № 4. P. 343—354.
12. Quemada D. Towards a unified model of elasto-thixotropy of biofluids//Biorheology. 1984. V. 21. № 4. P. 423—436.
13. Riha P. The unified description of viscoelastic and thixotropic properties of human blood//Rheol. Acta. 1982. V. 21. № 4/5. P. 650—652.
14. Stoltz J. G., Lucius M. Viscoelasticity and thixotropy of human blood//Biorheology. 1981. V. 18. № 3/6. P. 453—473.
15. Thurston G. B. Viscoelasticity of human blood//Biophys. Journal. 1972. V. 12. № 8. P. 1205—1217.
16. Thurston G. B. Rheological parameters for the viscosity, viscoelasticity and thixotropy of blood//Biorheology. 1979. V. 16. № 3. P. 149—162.