МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1995

УДК 532.5.013.4 : 538.4

 Ю. Г. ГУБАРЕВ

К НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ МГД-ТЕЧЕНИЙ

Изучается задача линейной устойчивости вращательно-симметричных стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости в магнитном поле. Прямым методом Ляпунова [1, 2] получено необходимое и достаточное условие устойчивости этих течений по отношению к возмущениям того же типа симметрии, представляющее собой обобщение на магнитную гидродинамику известного критерия Рэлея [3, 4] о «центробежной» устойчивости вращающихся потоков. Выведены двусторонние экспоненциальные оценки роста возмущений. Выделен класс наиболее быстро растущих возмущений и найдены точные формулы для определения скорости их нарастания. Показатели соответствующих экспонент вычисляются по параметрам стационарных течений и начальным данным для полей возмущений.

С математической точки зрения результаты настоящей работы носят априорный характер, поскольку теоремы существования решений исследуемых задач не доказаны.

1. Точная задача. Рассматриваются трехмерные движения однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости, находящейся в магнитном поле. Жидкость полностью заполняет область τ с фиксированной идеально проводящей границей $\partial\tau$. Уравнения, описывающие эти движения, берутся в форме [5]

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -\nabla p - (4\pi)^{-1}\,[\mathbf{h}\operatorname{rot}\mathbf{h}] \tag{1.1}$$

$$\mathbf{h}_t = \operatorname{rot}\,[\mathbf{u}\mathbf{h}], \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{h} = 0$$

Здесь $\mathbf{u} = (u,\ v,\ w)$ — поле скорости, $\mathbf{h} = (h_1,\ h_2,\ h_3)$ — магнитное поле, p — поле давления, t — время, $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ — декартовы координаты. Индексами из независимых переменных обозначаются соответствующие частные производные. На границе $\partial\tau$ ставятся условия непротекания

$$\mathbf{u}\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{h}\mathbf{n} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{n} = (n_1,\ n_2,\ n_3)$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\tau$. Физический смысл второго из условий (1.2) заключается в том, что магнитное поле целиком сосредоточено внутри области τ и за ее пределы не проникает. Начальные данные для (1.1), (1.2) задаются в виде

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0\,(\mathbf{x}), \quad \mathbf{h}\,(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{h}_0\,(\mathbf{x}) \tag{1.3}$$

причем $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ и $\mathbf{h}_0(\mathbf{x})$ удовлетворяют соответственно третьему и четвертому уравнениям системы (1.1) в области τ и условиям (1.2) на ее границе $\partial\tau$. Предполагается, что все используемые функции обладают достаточной степенью гладкости.

Исследуем устойчивость вращательно-симметричных стационарных течений идеальной жидкости в тангенциальном магнитном поле относительно малых возмущений той же симметрии.

В цилиндрической системе координат r, φ, z уравнения (1.1) запишем в виде [6, 7]

$$Du = -p_r^* + \rho_1 g_1 + \rho_2 g_2, \quad Dw = -p_z^* \tag{1.4}$$

$$D\rho_1 = 0, \quad D\rho_2 = 0, \quad u_r + \frac{u}{r} + w_z = 0$$

$$p^* = p + \frac{h_2^2}{8\pi}, \quad \rho_1 = (rv)^2, \quad g_1 = r^{-3}, \quad \rho_2 = \frac{h_2^2}{4\pi r^2}$$

$$g_2 = -r, \quad D = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

Введем дополнительную скалярную функцию $q(r, z, t)$, значения которой сохраняются в каждой жидкой частице [7]

$$Dq = 0 \tag{1.5}$$

В качестве поля q можно рассматривать, например, одну из лагранжевых координат жидких частиц.

Будем рассматривать движения в фиксированной двусвязной области, границы которой обладают требуемой симметрией, т. е. задаются функциями двух переменных. Тогда граничные условия (1.2) примут вид

$$u\,(s_\alpha)_r + w\,(s_\alpha)_z = 0, \quad s_\alpha\,(r, z) = 0 \tag{1.6}$$

Здесь второе из соотношений (1.6) представляет собой уравнение границы $\partial\tau$, а значения $\alpha = 1, 2$ соответствуют ее внутренней и внешней компонентам.

Начальные данные для уравнений (1.4), (1.5) запишутся следующим образом:

$$u\,(r, z, 0) = u_0\,(r, z), \quad w\,(r, z, 0) = w_0\,(r, z) \tag{1.7}$$

$$\rho_1\,(r, z, 0) = \rho_{10}\,(r, z), \quad \rho_2\,(r, z, 0) = \rho_{20}\,(r, z)$$

$$q\,(r, z, 0) = q_0\,(r, z)$$

Предположение о наличии у магнитного поля только угловой составляющей согласуется с системой уравнений (1.4): если в начальный момент времени задать радиальную и осевую компоненты магнитного поля нулевыми, то они останутся таковыми и в любой следующий момент времени.

На решениях задачи (1.4)—(1.7) сохраняются энергия и функционал I, определяемый через произвольную функцию $\Phi(q)$

$$E_1 = T_1 + \Pi_1 + \Pi_2 = \text{const}, \quad 2T_1 = \int_\tau (u^2 + w^2)\, rdrdz \tag{1.8}$$

$$\Pi_1 = \int_\tau \rho_1 U_1 rdrdz, \quad U_1\,(r) = \frac{1}{2r^2} + C_1$$

$$\Pi_2 = \int_\tau \rho_2 U_2 rdrdz, \quad U_2\,(r) = \frac{r^2}{2} + C_2$$

$$I = \int_\tau \Phi\,(q)\, rdrdz = \text{const}$$

Здесь C_1 и C_2 — значения, принимаемые функциями U_1 и U_2 либо на внешней, либо на внутренней части границы $\partial\tau$.

Задача (1.4)—(1.7) имеет точные стационарные решения вида

$$u = w = 0, \quad \rho_1 = \rho_1^\circ\,(r), \quad \rho_2 = \rho_2^\circ\,(r) \tag{1.9}$$

$$p^* = P^*\,(r), \quad q = Q\,(r), \quad dP^*/dr = \rho_1^\circ g_1 + \rho_2^\circ g_2$$

Поле $Q(r)$ является произвольной функцией аргумента r.

Если $dQ/dr \neq 0$ в τ [8], то из соотношений (1.8), (1.9) вытекает

$$\rho_1^\circ = \rho_1^\circ\,(Q), \quad \rho_2^\circ = \rho_2^\circ\,(Q), \quad U_1 = U_1\,(Q), \quad U_2 = U_2\,(Q)$$

$$Q \in (Q^-, Q^+), \quad Q^- = \min Q\,(r), \quad Q^+ = \max Q\,(r), \quad r \in \tau$$

2. Линеаризованная задача. Линеаризация (1.4)—(1.6) на решениях (1.9) дает

$$u_t' = -p_r^{*\prime} + \rho_1' g_1 + \rho_2' g_2, \quad w_t' = -p_z^{*\prime} \tag{2.1}$$

$$\rho_{1t}' + u'\rho_{1r}^\circ = 0, \quad \rho_{2t}' + u'\rho_{2r}^\circ = 0$$

$$q_t' + u'Q_r = 0, \quad u_r' + u'/r + w_z' = 0$$

$$u'(s_\alpha)_r + w'(s_\alpha)_z = 0, \quad (z, r) \in \tau$$

где u', w', ρ_1', ρ_2', $p^{*\prime}$, q' — поля возмущений скорости, магнитного поля, давления и дополнительного скалярного поля. Начальные данные (1.7) в линейном приближении имеют вид

$$u'(r, z, 0) = u_0'(r, z), \quad w'(r, z, 0) = w_0'(r, z) \tag{2.2}$$

$$\rho_1'(r, z, 0) = \rho_{10}'(r, z), \quad \rho_2'(r, z, 0) = \rho_{20}'(r, z)$$

$$q'(r, z, 0) = q_0'(r, z)$$

Далее штрихи у полей возмущений, отличающие их от полных решений задачи (1.4)—(1.7), опускаются.

Для решений начально-краевой задачи (2.1), (2.2) справедлив аналог интеграла энергии

$$E = T + \Pi = \text{const}, \quad 2T = \int_\tau (u^2 + w^2)\, rdrdz \tag{2.3}$$

$$2\Pi = -\int_\tau \{[U_1'(Q)\rho_1^{\circ\prime}(Q) + U_2'(Q)\rho_2^{\circ\prime}(Q)]\, q^2\}\, rdrdz$$

Здесь и ниже штрихом сверху обозначается производная по аргументу.

Если во всей области τ течения выполнено условие

$$0 \le -[U_1'(Q)\rho_1^{\circ\prime}(Q) + U_2'(Q)\rho_2^{\circ\prime}(Q)] < +\infty \tag{2.4}$$

то из равенства $E(t) = E(0)$ (2.3) следует устойчивость точных стационарных решений (1.9) к бесконечно малым по амплитуде возмущениям (2.1), (2.2) [7].

3. Лагранжевы смещения и функционал Ляпунова. Дальнейшие исследования ограничиваются рассмотрением более узкого класса движений, в котором лагранжевы возмущения поля q (1.5), (2.1) равны нулю. Наиболее просто этот класс движений описывается с помощью поля лагранжевых смещений $\xi = \xi(r, z, t) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, такого, что $\xi_t = \mathbf{u}$ [9]. В результате соотношения (2.1) перепишутся следующим образом:

$$\xi_{1tt} = -p_r^* + \rho_1 g_1 + \rho_2 g_2, \quad \xi_{3tt} = -p_z^* \tag{3.1}$$

$$\rho_1 = -\xi_1\rho_{1r}^\circ, \quad \rho_2 = -\xi_1\rho_{2r}^\circ, \quad q = -\xi_1 Q_r$$

$$\xi_{1r} + \xi_1/r + \xi_{3z} = 0$$

$$\xi_1(s_\alpha)_r + \xi_3(s_\alpha)_z = 0, \quad (z, r) \in \tau$$

Начальные данные (2.2) для системы уравнений (3.1) преобразуются к виду

$$\xi(r, z, 0) = \xi_0(r, z), \quad \mathbf{u}(r, z, 0) = \mathbf{u}_0(r, z) \tag{3.2}$$

Аналог интеграла энергии E (2.3) сохраняется и на решениях задачи (3.1), (3.2), при этом функционал T останется прежним, а функционал Π примет форму

$$2\Pi = -\int_\tau \{[U_1'(r)\rho_1^{\circ\prime}(r) + U_2'(r)\rho_2^{\circ\prime}(r)]\, \xi_1^2\}\, rdrdz \tag{3.3}$$

Введем вспомогательный функционал

$$M = \int\limits_{\tau} (\xi_1^2 + \xi_3^2)\, rdrdz \qquad (3.4)$$

Дважды дифференцируя функционал M по времени, а затем проводя ряд преобразований с применением (2.3), (3.1), (3.3), получим

$$\ddot{M} = 4\,(T - \Pi) = 8T - 4E$$

которое называется вириальным равенством [9] (точкой сверху обозначена производная по времени). Умножая теперь это равенство на произвольный постоянный множитель λ и вычитая получившийся результат из (2.3), получим уравнение

$$\dot{E}_\lambda = 2\lambda E_\lambda - 4\lambda T_\lambda \qquad (3.5)$$

$$E_\lambda = T_\lambda + \Pi_\lambda, \quad 2\Pi_\lambda = 2\Pi + \lambda^2 M$$

$$2T_\lambda = 2T - \lambda\dot{M} + \lambda^2 M = \int\limits_{\tau} [(\xi_{1t} - \lambda\xi_1)^2 + (\xi_{3t} - \lambda\xi_3)^2]\, rdrdz$$

Пусть $\lambda > 0$, тогда из (3.5), в силу неотрицательности функционала T_λ, следует неравенство $\dot{E}_\lambda \leq 2\lambda E_\lambda$, интегрирование которого дает

$$E_\lambda(t) \leq E_\lambda(0)\exp(2\lambda t) \qquad (3.6)$$

Неравенство (3.6) справедливо для любых решений задачи (3.1), (3.2) и для любых положительных значений параметра λ. Кроме того, при выводе этого неравенства не требуется никаких ограничений на знак функционала Π.

Как видно из (3.6), функционал E_λ (3.5) изменяется с течением времени монотонно. Это дает возможность использовать его далее в качестве функционала Ляпунова [1, 2].

В последующих параграфах будет доказана неустойчивость решений (1.9) в случае, когда (2.4) не выполняется, т. е. при условии, что где-либо в области τ течения имеет место неравенство

$$U_1'(Q)\,\rho_1^{\circ\prime}(Q) + U_2'(Q)\,\rho_2^{\circ\prime}(Q) > 0 \qquad (3.7)$$

Кроме того, будут выведены оценки скорости нарастания возмущений и построен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

4. Оценки снизу и сверху. Пусть имеет место условие (3.7). Это означает, что можно выбирать такие начальные поля лагранжевых смещений ξ_0 (3.2), для которых $\Pi(0) < 0$. При этом в качестве начальных полей скорости рассматриваются функции $\mathbf{u}_0$ (3.2), обеспечивающие выполнение неравенства $T(0) < |\Pi(0)|$.

Из последних двух соотношений вытекает, что в соответствии с (3.5) функционал $E_\lambda(0)$ является полиномом второй степени от λ с положительным коэффициентом $M(0)$ (3.4) при λ^2 и отрицательным свободным членом $E(0)$ (2.3):

$$E_\lambda(0) = E(0) - (\lambda/2)\,\dot{M}(0) + \lambda^2 M(0) \qquad (4.1)$$

Полагая $\lambda > 0$, при помощи (4.1) можно показать, что на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda_1 = B + C^{1/2}, \quad B = \frac{\dot{M}(0)}{4M(0)}, \quad C = B^2 - \frac{E(0)}{M(0)} \qquad (4.2)$$

справедливо соотношение

$$E_\lambda(0) < 0 \qquad (4.3)$$

Из (3.6), (4.3) следует, что с течением времени решения задачи (3.1), (3.2) растут экспоненциально.

Если $\lambda = \Lambda_1 - \delta$ (с любым δ из интервала $]0, \Lambda_1[$), то соотношение (3.6) принимает вид

$$E_{\Lambda_1-\delta}(t) \le E_{\Lambda_1-\delta}(0) \exp[2(\Lambda_1 - \delta) t] \; (E_{\Lambda_1-\delta}(0) < 0) \tag{4.4}$$

Пользуясь определением функционалов T_λ и Π_λ (3.5), получим

$$E_\lambda(t) = T_\lambda(t) + \Pi_\lambda(t) > -\frac{1}{2}\int_\tau \{[U_1'(r)\rho_1^{\circ\prime}(r) + U_2'(r)\rho_2^{\circ\prime}(r)]\xi_1^2\} rdrdz$$

Отсюда и (4.4) имеем

$$\int_\tau \{[U_1'(r)\rho_1^{\circ\prime}(r) + U_2'(r)\rho_2^{\circ\prime}(r)]\xi_1^2\} rdrdz > 2|E_{\Lambda_1-\delta}(0)| \exp[2(\Lambda_1 - \delta) t] \tag{4.5}$$

Соотношение (4.5) показывает, что параметр $\Lambda_1 - \delta$ (4.2), (4.4) оценивает инкременты решений задачи (3.1), (3.2) снизу.

Оценку (4.5) можно существенно улучшить, если рассмотреть класс решений задачи (3.1), (3.2), для которого начальные поля скорости $\mathbf{u}_0(r, z)$ и лагранжевых смещений $\xi_0(r, z)$ связаны соотношениями $\mathbf{u}_0(r, z) = \lambda\xi_0(r, z)$. В этом случае из (3.5) вытекает, что

$$T_\lambda(0) = 0, \quad E_\lambda(0) = \Pi_\lambda(0) \tag{4.6}$$

Пусть вновь выполняется условие (3.7). Тогда, выбирая $\lambda > 0$, а начальные поля лагранжевых смещений ξ_0 (3.2) такими, чтобы опять имело место неравенство $\Pi(0) < 0$, в силу (3.5) легко получить, что на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda = \left(-\frac{2\Pi(0)}{M(0)}\right)^{1/2} \tag{4.7}$$

справедливо соотношение $\Pi_\lambda(0) < 0$. Считая $\lambda = \Lambda - \delta_1$ (с произвольным δ_1 из интервала $]0, \Lambda[$) и учитывая (4.6), неравенство (3.6) перепишем в форме

$$E_{\Lambda-\delta_1}(t) \le \Pi_{\Lambda-\delta_1}(0) \exp[2(\Lambda - \delta_1) t] \tag{4.8}$$

Отсюда следует оценка

$$\int_\tau \{[U_1'(r)\rho_1^{\circ\prime}(r) + U_2'(r)\rho_2^{\circ\prime}(r)]\xi_1^2\} rdrdz > 2|\Pi_{\Lambda-\delta_1}(0)| \exp[2(\Lambda - \delta_1) t] \tag{4.9}$$

которая говорит о том, что параметр $\Lambda - \delta_1$ (4.7), (4.8) оценивает снизу инкременты решений задачи (3.1), (3.2), (4.6).

Сопоставление оценок (4.5) и (4.9) свидетельствует о том, что решения задачи (3.1), (3.2), начальные данные для которых удовлетворяют условию (4.6), растут быстрее.

Ниже показывается, что возмущения из класса (4.6) — наиболее опасные в том смысле, что наибыстрейший рост решений задачи (3.1), (3.2) наблюдается при

$$\Lambda^+ = \sup_{\xi_0(r,z)} \Lambda \tag{4.10}$$

Пусть выполнено неравенство $\lambda > \Lambda^+$ (4.10). В этом случае для всех возможных начальных полей лагранжевых смещений ξ_0 (3.2) справедливо соотношение $\Pi_\lambda(0) > 0$. Следовательно, функционал E_λ (3.5) также положительно определен для всех возможных начальных полей лагранжевых смещений ξ_0 и скорости $\mathbf{u}_0$ (3.2).

Таким образом, при $\lambda = \Lambda^+ + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) из основного неравенства (3.6) вытекает оценка

$$E_{\Lambda^++\varepsilon}(t) \le E_{\Lambda^++\varepsilon}(0) \exp[2(\Lambda^+ + \varepsilon) t] \tag{4.11}$$

которая означает, что параметр $\Lambda^+ + \varepsilon$ (4.10), (4.11) оценивает инкременты решений задачи (3.1), (3.2) сверху.

Сравнение неравенств (4.9) и (4.11) позволяет сделать вывод о том, что параметр Λ^+ оценивает скорость нарастания решений задачи (3.1), (3.2), (4.6) как снизу, так и сверху

$$\Lambda^+ - \delta_1 \le \omega_* \le \Lambda^+ + \varepsilon \tag{4.12}$$

Оценка (4.12) показывает, что наиболее быстро растут те решения задачи (3.1), (3.2), у которых инкремент равен Λ^+ (4.10).

Итак, если имеет место условие (3.7), то, вычислив значение Λ^+ по формулам (4.7), (4.10), можно ответить на вопрос, за какое характерное время «испортятся» установившиеся вращательно-симметричные МГД-течения (1.9)?

5. Пример. Изучаются вращательно-симметричные стационарные течения идеальной несжимаемой жидкости в магнитном поле

$$\mathbf{u}^\circ = (0, v^\circ, 0), \quad \mathbf{h}^\circ = (0, h_2^\circ, 0) \tag{5.1}$$

$$v^\circ = c_1 r^{-1}, \quad h_2^\circ = c_2 r (\ln r)^{1/2}$$

Здесь c_1 и c_2 — произвольные положительные постоянные величины. Предполагается, что жидкость целиком заполняет двусвязный осесимметричный сосуд τ

$$\{r_1 < r < r_2,\ 0 < z < z_1\} \tag{5.2}$$

где r_1, r_2 и z_1— произвольные положительные константы.

Если в качестве функции Q (1.9) выбрать координату r, то, как показывают прямые вычисления, условие (3.7) будет справедливо для (5.1) повсюду в области τ (5.2).

В этом случае течения (5.1) будут неустойчивы, например, по отношению к таким полям лагранжевых смещений ξ (3.1) и возмущений скорости $\mathbf{u}$ (2.1), которые в начальный момент времени записываются следующим образом:

$$\xi_0 = (r^{-1}\psi_{1z},\ 0,\ -r^{-1}\psi_{1r}) \tag{5.3}$$

$$\mathbf{u}_0 = (r^{-1}\psi_{2z},\ 0,\ -r^{-1}\psi_{2r}), \quad \psi_1 = \sin^2\left(\frac{2\pi}{r_1} r\right)\sin^2\left(\frac{2\pi}{r_2} r\right)\sin^2\left(\frac{2\pi}{z_1} z\right)$$

$$\psi_2 = \sin^3\left(\frac{2\pi}{r_1} r\right)\sin^3\left(\frac{2\pi}{r_2} r\right)\sin^3\left(\frac{2\pi}{z_1} z\right)$$

Нетрудно убедиться, что векторные поля $\mathbf{u}_0$ и ξ_0 (5.3) являются бездивергентными в области τ (5.2), а также удовлетворяют условиям (2.1) и (3.1) соответственно на ее границе.

В результате для (5.1) при помощи (5.3) можно в явном виде выписать оценки скорости нарастания возмущений (4.5), (4.9) и (4.11), а по формулам (4.7), (4.10) определить инкремент Λ^+ наиболее быстро растущих возмущений.

В заключение обратим внимание на ряд моментов.

Принятое в разд. 3 ограничение на возможные возмущения не оказывает никакого влияния на общность полученных в работе результатов. Дело в том, что для доказательства неустойчивости достаточно указать хотя бы одно растущее возмущение. Именно такое возмущение и было обнаружено в пределах выделенного класса движений.

Если условие (3.7) переписать в форме

$$[Q'(r)]^{-2}\,[U_1'(r)\,\rho_1^{\circ\prime}(r) + U_2'(r)\,\rho_2^{\circ\prime}(r)] > 0 \tag{5.4}$$

то сразу же можно сделать вывод, что при выполнении (5.4) течения (1.9) неустойчивы по линейному приближению вне зависимости от выбора дополнительного скалярного поля q (1.5). Этот вывод подтверждается также тем, что в выражение для функционала Π (3.3) функция Q (1.9) вообще не входит. Однако в точной нелинейной постановке вопрос о том, будут ли течения (1.9) неустойчивы при любом возможном выборе поля q (1.5), остается открытым и требует дальнейшей проработки [7].

Если положить $\mathbf{h} = 0$, $Q = r$, то из (2.4) следует критерий Рэлея [3, 4] о «центробежной» устойчивости вращающихся потоков к вращательно-симметричным возмущениям. Таким образом, полученное в ходе данного исследования необходимое и достаточное условие линейной устойчивости вращательно-симметричных стационарных течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в магнитном поле представляет собой обобщение этого критерия на магнитную гидродинамику.

Автор благодарит Р. М. Гарипова, Б. А. Луговцова и В. В. Никулина за полезные обсуждения и ценные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 94-01-01219-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
3. *Линь Ц.-Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
4. *Moffatt H. K.* Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology. Pt 2. Stability considerations // J. Fluid Mech. 1986. V. 166. P. 359—378.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
6. *Владимиров В. А.* Условия нелинейной устойчивости течений идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1986. № 3. С. 70—78.
7. *Губарев Ю. Г.* К нелинейной устойчивости гидродинамических и МГД-течений // Материалы 28-й Всесоюз. науч. студенческой конф. «Студент и научно-технический прогресс». Физика. № 6. 1990. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1990. С. 85—91.
8. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1965. 479 с.
9. *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
22.VI.1994