

УДК 532.59

© 1995 г. И. М. МИНДЛИН

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ТЯЖЕЛОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ПРОТЯЖЕННЫМ НАЧАЛЬНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА: ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

Предлагаемая заметка является продолжением статьи [1]. Принятые в [1] предположения и обозначения здесь сохраняются. В первом приближении граница раздела между различными по плотности однородными фракциями идеальной несжимаемой жидкости описывается параметрическими уравнениями [1]

$$x = c \cos^3 \theta V_0(\theta, t), \quad y = (x - f) \operatorname{tg} \theta \quad (1)$$

$$V_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(t) (2k+1) P_k(\cos 2\theta), \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

Здесь $f < 0$ — выбирается произвольно, $\mu = c/f$ — малый параметр, $P_k(x)$ — полином Лежандра степени k . Функции $b_k(t)$ ($k=1, 2, \dots$) являются решением задачи Коши для счетной системы дифференциальных уравнений (t — время)

$$b_k''(t) + \frac{\varepsilon_*}{2|f|} [kb_{k-1} + (2k+1)b_k + (k+1)b_{k+1}] = 0 \quad (2)$$

$$b_k(0) = \beta_k, \quad b_k'(0) = 0, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} |\beta_k| (2k+1) < +\infty$$

Ряд (1) сходится абсолютно и равномерно в любом прямоугольнике $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq t \leq T$, где T назначается произвольно [1]. Ниже исследуется поведение функций $b_k(t)$ на полуоси $t > T \geq 0$.

Исходным для исследования является утверждение: точное решение задачи (2) на полуоси $t \geq 0$ дается формулами

$$b_k(t) = (-1)^k \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{-u} L_k(u) [\varphi(u) - j\omega(u)] e^{i\sqrt{u}} du$$

$$\varphi(u) = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i L_i(u), \quad \alpha_i = (-1)^i b_i(0) \quad (3)$$

$$\omega(u) \sqrt{u} = \sum_{i=0}^{+\infty} \gamma_i L_i(u), \quad \gamma_i = (-1)^i b_i'(0) = 0, \quad \tau = t \sqrt{\frac{\varepsilon_*}{2|f|}}$$

Здесь $j^2 = -1$, $\operatorname{Re}(x + jy) = x$, $L_k(u)$ — полином Лагерра степени k , $L_0(u) = 1$, $L_i(u) = 1 - u$. Справедливость утверждения проверяется подстановкой (3) в (2). Ряд

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i e^{-u} L_k(u) L_i(u) = e^{-u} L_k'(u) \varphi(u)$$

сходится абсолютно и равномерно на полуплоскости $u > 0$ плоскости (u, τ) , так что возможно почленное интегрирование, и, следовательно,

$$b_k(t) = (-1)^k \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i M_{ki}(\tau)$$

$$\mu_{ki}(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} L_k(x^2) L_i(x^2) \cos(\tau x) dx \quad (4)$$

$$\mu_{k,k}(0) = 1, \quad k \neq i, \quad \mu_{k,i}(0) = 0$$

Функции $\mu_{ki}(\tau)$ не зависят ни от физических параметров жидкости, ни от начальных условий. Из (4) в силу свойств полиномов Лагерра [2] следуют соотношения

$$\begin{aligned} \mu_{ki}(\tau) &= \mu_{ik}(\tau), \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\mu_{0,0} - 1}{\tau} \right) = -\frac{1}{2} \mu_{0,0} \\ 2\mu_{1,0}(\tau) &= 1 - (1 - \frac{1}{2}\tau^2) \mu_{0,0}(\tau) \\ 8\mu_{2,0}(\tau) &= 1 + \frac{1}{2}\tau^2 + [(1 - \frac{1}{2}\tau^2)^2 - 2] \mu_{0,0}(\tau) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} k \geq 2, \quad 2(k+1)(\mu_{k+1,0} - \mu_{k,0}) &= \\ = (2k - 3 + \frac{1}{2}\tau^2)(\mu_{k,0} - \mu_{k-1,0}) - \frac{1}{2}\tau^2(\mu_{k-1,0} - \mu_{k-2,0}) \end{aligned}$$

$$\mu_{k,1} = k\mu_{k-1,0} - 2k\mu_{k,0} + (k+1)\mu_{k+1,0}$$

$$k\mu_{k-1,i} - (2k+1)\mu_{k,i} + (k+1)\mu_{k+1,i} = i\mu_{k,i-1} - (2i+1)\mu_{k,i} + (i+1)\mu_{k,i+1}$$

Введем функцию

$$\epsilon(S) = \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos(Sx) dx = \mu_{0,0}(\sqrt{2} S)$$

Из соотношений (4), (5), следует

$$S \frac{d\epsilon}{dS} = -1 + (1 - S^2) \epsilon, \quad \epsilon(0) = 1 \quad (6)$$

Решение задачи (6) отыскивается в квадратурах

$$\epsilon(S) = 1 - S \int_0^S e^{-\frac{1}{2}(s^2 - S_0^2)} ds_1 \quad (7)$$

Качественно поведение функции $\epsilon(S)$ на полуоси $S \geq 0$ легко выясняется методом изоклин. На отрезке $0 \leq S \leq S_0$, $S_0 > 1$ функция $\epsilon(S)$ монотонно убывает до значения $\epsilon(S_0) = 1/(1 - S_0^2) < 0$; далее с неограниченным ростом S функция $\epsilon(S)$ монотонно растет до нуля. Численное решение дает значение $S_0 = 2,12411$. При численном решении используется представление функции $\epsilon(S)$ степенным рядом (эффективно на отрезке $0 \leq S \leq 5$). При больших значениях аргумента используется формула (7).

Приведем двусторонние оценки для функции $\epsilon(S)$. Определим функцию $\varphi_n(S)$ равенством

$$\epsilon(S) = \sum_{i=1}^n \frac{g_i}{S^{2i}} + \varphi_n(S)$$

$$g_i = -1, \quad g_{i+1} = (2i+1)g_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

Здесь n выбирается произвольно. Пусть $v_* < 1$ выбирается произвольно $S_*^2 = (2n+1)/v_*$, $\varphi_n(S_*)$ может быть вычислено. На полуоси $S \geq S_*$ имеют место оценки

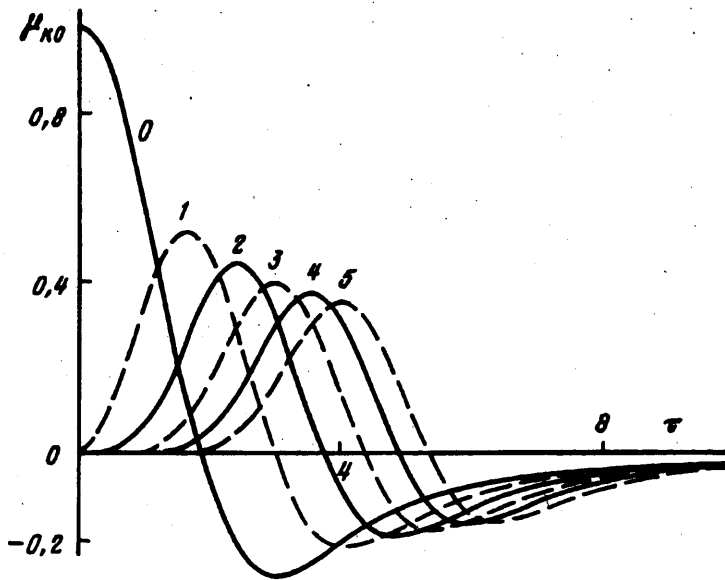
$$-M_n \leq \varphi_n(S) - \varphi_n(S_*) \alpha(S) \leq -m_n$$

$$\alpha(S) = \frac{S}{S_*} e^{-\frac{1}{2}(S^2 - S_*^2)}, \quad m_n = l_n \left[1 - \left(\frac{S_*}{S} \right)^{2n} \right] \alpha(S)$$

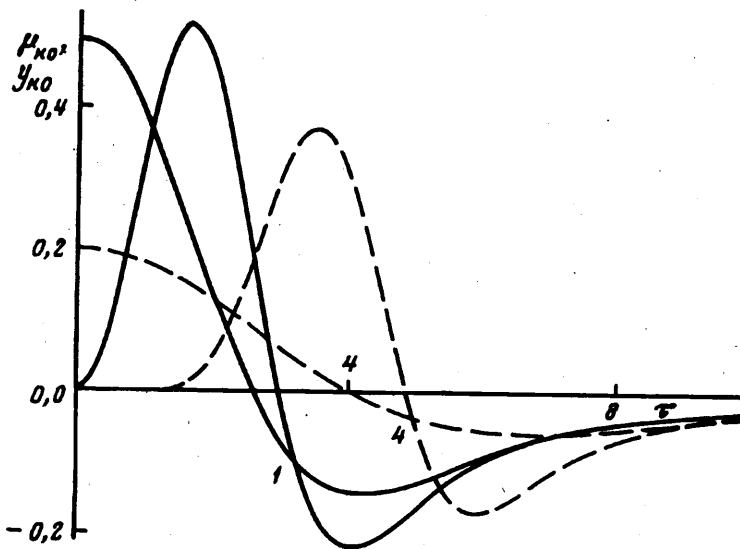
$$M_n = l_n \frac{n}{n+1} \frac{v_*}{1-v_*} \left[\left(\frac{S_*}{S} \right)^{2n+1} - \alpha(S) \right]$$

$$l_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2n(2n+2)^{n-1}} \left(\frac{v_*}{2n+2} \right)^{1/2} v_*^{n-1}$$

Эти оценки следуют после интегрирования дифференциального уравнения для функции $\varphi_n(S)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Особая роль функции $\epsilon(s)$ подчеркивается асимптотической формулой

$$\mu_k(\tau) \approx y_k(\tau) = \frac{1}{k+i+1} \epsilon\left(\frac{\tau}{\sqrt{2(k+i+1)}}\right)$$

если τ достаточно велико. Эта формула получена методом Лапласа для оценки интегралов [3, гл. 4] с учетом свойств полиномов Лагерра. На фиг. 1 представлены графики функций $\mu_{k,0}(\tau)$ (значения $k=0-5$ указаны около соответствующих кривых). На фиг. 2 представлены графики двух пар функций $\mu_{k,0}(\tau)$, $y_{k,0}(\tau)$ ($k=1$ — сплошные линии, $k=4$ — пунктирные линии). Сопоставляя графики, приходим к заключению, что функции $y_{k,0}(\tau)$ правильно отражают поведение функций $\mu_{k,0}(\tau)$ на полуоси $\tau > T > 0$. Тем самым получено некоторое представление о качестве асимптотической формулы.

В силу (4) очевидно, что четные относительно τ функции $\mu_k(\tau)$ стремятся к нулю с неограниченным

ростом τ . Полученные оценки подтверждают, что эти функции убывают как $1/\tau^2$ и, следовательно, $b_k(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Это согласуется с интуитивным представлением о том, что с течением времени начальное возмущение «рассасывается» по всему неограниченному пространству и, следовательно, амплитуда возмущения убывает. С другой стороны, на решениях задачи (2) остается постоянным положительно определенный квадратичный функционал

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k'^2(t) + \frac{1}{4} \frac{\epsilon_*}{|f|} G = \text{const}$$

$$G = \sum_{k=0}^{+\infty} [(2k+1)b_k^2 + 2kb_{k-1}b_k]$$

Эти равенства выражают закон сохранения механической энергии. Сохранение энергии означает, что происходит ее перераспределение между пространственными формами — составляющими ряда (1). «Рассасывание» возмущения означает, что энергия «перекачивается» от «крупномасштабного» движения к «мелкомасштабному». Полученные результаты дают количественное описание процесса перераспределения энергии. На любом конечном интервале времени только конечное число функций $\mu_k(\tau)$ достигает локального максимума модуля и выходит на режим монотонного убывания до нуля. Модули всех функций с достаточно большими номерами k растут, но с ростом номера скорость роста функции падает, время достижения правого (последнего по времени) максимума модуля имеет порядок $\sqrt{k+i}$ и этот максимум имеет порядок $1/(k+i)$. Остается отметить, что «мелкомасштабные» составляющие отвечают большим значениям номера k . Для сравнения отметим, что в рамках линейной теории «рассасывание» возмущения описывается «расползанием» составляющих возмущение гармонических волн — дисперсией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миндлин И. М. Нелинейные волны в тяжелой двухслойной жидкости, порождаемые начальным возмущением горизонтальной границы раздела // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 135—143.
2. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 327 с.
3. Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 247 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
31.VIII.1994