

УДК 533.69.04:533.6.011.55

© 1995 г. В. Н. ГОЛУБКИН

## НЕСУЩИЕ КРЫЛЬЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ В ВЯЗКОМ ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

С учетом структуры течения в тонком сжатом слое и состояния пограничного слоя приведены формулировка и численно-аналитическое решение вариационной задачи о форме крыла малого удлинения с максимальным аэродинамическим качеством в гиперзвуковом потоке вязкого газа. Получены характерные формы оптимальных крыльев и распределение давления по поверхности. Обнаружена бифуркация оптимального решения при изменении размаха. Показано, что вязкость, включенная в процедуру оптимизации, может вызывать изменение формы оптимального крыла, а также снижает максимальное качество, однако выигрыш по сравнению с предельным ньютоновским значением качества остается заметным.

На основе теории тонкого ударного слоя [1—3] в [4, 5] предложена методика оптимизации крыльев малого удлинения, обтекаемых гиперзвуковым потоком под углом атаки, с целью повышения аэродинамического качества. В результате рациональной формулировки и решения вариационной задачи при определенных дополнительных условиях и связях получены трехмерные поверхности крыльев оптимальной формы, имеющих существенно большее гиперзвуковое качество  $K$  по сравнению с плоским крылом. Задача рассматривалась в невязкой постановке. Последующий учет сопротивления трения (при обычном допущении, что коэффициент трения  $c_f = \text{const}$ ) дал некоторое снижение  $K$  [5]. Сходный эффект, сопровождающийся также изменением оптимальной формы крыла, обусловлен влиянием неравновесных реальных свойств воздуха, которые принимались во внимание уже на стадии постановки вариационной задачи [6].

Данная работа связана с более точным расчетом сопротивления ламинарного и турбулентного трения и включением его в процесс оптимизации, что позволяет учесть влияние вязкости на оптимальную форму. Ранее было установлено [7—10], что в случае обтекания волнолетов под малым углом атаки это влияние весьма существенно. Ниже для диапазона конечных углов атаки оказалось, что аналогично невязкому обтеканию [11] происходит бифуркация оптимального решения и вязкость не только снижает максимальное качество, но и вносит изменения в положение точки бифуркации (оптимальную форму), уровень которых зависит от состояния пограничного слоя и регулируется установленным критерием подобия.

1. Рассматривается задача определения формы нижней поверхности тонкого крыла малого удлинения, имеющего максимальное аэродинамическое качество  $K$  при обтекании гиперзвуковым потоком газа под конечным углом атаки  $\alpha$ . При отсутствии скольжения крыла имеем

$$K = \frac{Y \cos \alpha - X \sin \alpha}{Y \sin \alpha + X \cos \alpha} \quad (1.1)$$

где  $Y, X$  — подъемная сила и сила сопротивления в связанной с крылом декартовой системе координат  $x^{\circ}y^{\circ}z^{\circ}$ . Считая, что число Рейнольдса достаточно велико  $Re \gg 1$  (умеренные высоты полета), силу сопротивления  $X$  представим в виде суммы  $X = X_w + X_f$ , волновой составляющей  $X_w$ , обусловленной внешним невязким обтеканием, и сопротивления трения  $X_f$ , связанного с наличием тонкого пристеночного пограничного слоя. В гиперзвуковом диапазоне скоростей характерным

случаем примем тот, когда эти составляющие вносят соизмеримый вклад в полное сопротивление.

Для расчета внешнего невязкого обтекания нижней поверхности крыла, дающего основную часть сил  $Y, X_w$  [12], а также параметры течения на внешней границе пограничного слоя, используем метод тонкого ударного слоя [1—3]. Введем малый параметр  $\varepsilon$ , равный обратному отношению плотностей на плоском скачке уплотнения ( $y^* = 0$ ) с углом  $\alpha$  к набегающему гиперзвуковому потоку (число Маха  $M_\infty \gg 1$ )

$$\varepsilon = \frac{\kappa - 1}{(\kappa + 1) - 2\kappa/\Theta}, \quad \Theta = \kappa M_\infty^2 \sin^2 \alpha \sim 1, \quad \kappa \rightarrow 1, \quad M_\infty \rightarrow \infty$$

где  $\kappa$  — показатель адиабаты. Геометрическими параметрами подобия [2, 3] служат отношения полуразмаха крыла к длине  $L$  и углу Маха в сжатом слое  $\Omega = b/L\varepsilon^{1/2} \operatorname{tg} \alpha$  и толщины крыла к толщине слоя  $C = \tau/L\varepsilon \operatorname{tg} \alpha$ . Конические волнолеты в предельном случае  $\Omega \gg 1$  рассматривались в [13]. Общий случай  $\Omega, C \sim 1$  характеризуется тем, что головной скачок может быть как присоединенным к острой передней кромке крыла, так и отсоединенным от нее. Некоторые данные о величине  $K$  для несущих конфигураций, имеющих нижней поверхностью V-образное треугольное крыло с отсоединенным скачком; получены в [14]. Далее рассматриваем обтекание с присоединенным скачком и представляем координаты и искомые функции в виде

$$x^\circ = Lx, \quad y^\circ = \varepsilon Ly \operatorname{tg} \alpha, \quad z^\circ = \varepsilon^{1/2} Lz \operatorname{tg} \alpha \quad (1.2)$$

$$\frac{u^\circ}{u_\infty} = 1 + \varepsilon u \operatorname{tg}^2 \alpha + \dots, \quad \frac{v^\circ}{|v_\infty|} = \varepsilon v + \dots, \quad \frac{w^\circ}{|v_\infty|} = \varepsilon^{1/2} w + \dots$$

$$\frac{p^\circ - p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2} = 1 + \varepsilon p + \dots, \quad \frac{\rho_\infty}{\rho^\circ} = \varepsilon + \dots, \quad \frac{T^\circ}{T_\infty} = \Theta + \dots$$

$$u_\infty = V_\infty \cos \alpha, \quad v_\infty = -V_\infty \sin \alpha$$

Здесь  $u^\circ, v^\circ, w^\circ$  — компоненты вектора скорости,  $p^\circ, \rho^\circ, T^\circ$  — давление, плотность и температура, индекс « $\infty$ » относится к параметрам набегающего потока, все координаты и функции без индексов порядка единицы в невязком ударном слое. Тогда в следующем приближении к ньютоновскому имеем уравнения газовой динамики и граничные условия на скачке уплотнения  $y = S(x, z)$  и на поверхности крыла  $y = B(x, z)$

$$v_x + w_z = 0, \quad u_x + v u_x + w u_z = 0 \quad (1.3)$$

$$v_x + v v_x + w v_z = -p_y, \quad w_x + v w_x + w w_z = 0$$

$$u = -S_x, \quad v = S_x - S_x^2 - 1, \quad w = -S_z \quad (1.4)$$

$$p = 2S_x - S_x^2 - 1, \quad y = S(x, z)$$

$$v = B_x + w B_z, \quad y = B(x, z) \quad (1.5)$$

В случае обтекания с присоединенным к острой передней кромке  $z = z_*(x)$  скачком уплотнения замыкающее задачу граничное условие получается из решения локальной задачи о течении газа в окрестности передней кромки [15]

$$w = w_*(x) = \sqrt{2} [z_*' - B_x - \sqrt{(z_*' + B_x)^2 - 4}] \quad (1.6)$$

$$S(x, z) = B(x, z), \quad z = z_*(x)$$

Интегрируя уравнения (1.3) с учетом свойства сохранения поточной составляющей

завихренности  $w$ , вдоль линий тока [3] и удовлетворяя условиям (1.4) — (1.6), получим основное уравнение, связывающее формы поверхности скачка и крыла

$$S(x, z) = B(x, z) + \int_{\xi_b}^x \frac{d\xi}{1 - (x - \xi) S_{xx}(\xi, \zeta)} \quad (1.7)$$

$$\zeta = z + (x - \xi) S_z(\xi, \zeta), \quad z_s(\xi_b) = z - w_s(\xi_b)(x - \xi_b)$$

где  $\xi, \zeta$  — абсцисса и аппликата точки входа линии тока в ударный слой. В переменных  $x, \xi, z$  аналитические выражения газодинамических функций суть

$$u = -S_x(\xi, \zeta), \quad w = -S_z(\xi, \zeta), \quad y = B(x, z) + \int_{\xi_b}^{\xi} \zeta'_s d\xi' \quad (1.8)$$

$$v = B_x - S_z(\xi, \zeta) B_z + \int_{\xi_b}^{\xi} [\zeta_{xx}' - S_z(\xi, \zeta) \zeta_{zz}'] d\xi' - (\xi_b)_x + S_z(\xi, \zeta) (\xi_b)_z$$

$$p = 2S_x - S_z^2 - 1 + \int_{\xi}^x (v_x' - S_z' v_z') \zeta'_s d\xi'$$

$$v' = v(x, \xi', z), \quad \zeta' = \zeta(x, \xi', z)$$

Считая заднюю кромку прямой ( $x = 1$ ) и применяя интегральную теорему импульсов к объему, ограниченному головным скачком, крылом и плоскостью  $x = 1$ , выразим входящие в (1.1) силы  $X_w, Y$  через интегралы по площади кормового сечения ударного слоя  $\sigma$  [4, 5]. Далее с учетом (1.2) получим следующие разложения по  $\varepsilon$  ( $\sigma_s$  — приведенная площадь крыла в плане):

$$\frac{X_w}{\rho_\infty v_\infty^2 L^2} = \varepsilon^{3/2} \sigma_s Q_w \operatorname{tg}^2 \alpha + \dots \quad (1.9)$$

$$\frac{Y}{\rho_\infty v_\infty^2 L^2} = \varepsilon^{1/2} \sigma_s (1 + \varepsilon P) \operatorname{tg} \alpha + \dots$$

$$\sigma_s = 2 \int_0^{\alpha} [1 - x_s(z)] dz, \quad P, Q_w = O(1)$$

Здесь в получаемое по теореме импульсов интегральное выражение величины  $P$  входят функции не только первого, но и второго приближения к ньютоновскому, аналитическое определение которых при найденном весьма сложном функциональном виде первого приближения (1.8) представляется практически невозможным. Но интересно, что эта принципиальная трудность преодолевается, поскольку двучленное разложение по  $\varepsilon$  аэродинамического качества  $K$ , получаемое из (1.1) с помощью (1.9), содержит лишь функционал

$$Q_w = R_w - 1, \quad R_w = -\frac{1}{\sigma_s} \iint_{\sigma} u dy dz$$

полностью определяемый только первым приближением и зависящий от продольной составляющей скорости, которая сохраняется постоянной вдоль линии тока (1.3), (1.8). Кроме этого, из уравнения баланса расхода через выбранную контрольную поверхность следует

$$\sigma_s = \iint_{\sigma} dy dz = \sigma$$

С помощью аналитического решения (1.8) двойной интеграл в  $R_w$  приводится к однократному [4, 5]

$$R_w = \frac{2}{\sigma_r} \int_0^{\alpha} \{S(1, z) - S[x_e(z), z]\} dz$$

что позволяет анализировать задачу в обозримом виде.

2. Допущение о постоянстве коэффициента трения  $c_f$ , широко используется для качественных оценок. С целью уточнения результатов и учета переменности этой величины примем во внимание, что в рассматриваемом случае продольная кривизна крыла мала и каждое продольное сечение  $z = \text{const}$  будем рассматривать как плоскую пластину, обтекаемую потоком за базовым плоским скачком (индекс  $s$ ). Для расчета зависимости  $c_f$  от местного числа Рейнольдса  $Re_x$ , как и в [9, 10], используем метод определяющей температуры. Тогда при степенной зависимости вязкости от температуры  $\mu \sim T^n$  и ламинарном пограничном слое имеем

$$c_f = \frac{0,664}{Re_x^{1/2}} \left( \frac{T'}{T_s} \right)^{\frac{n-1}{2}}, \quad Re_x = \frac{\rho_s V_s [x - x_e(z)] L}{\mu_s} \quad (2.1)$$

$$T'/T_s = 1 + 0,032M_s^2 + 0,58 (T_w/T_s - 1) \quad (2.2)$$

где  $T_w$  — температура поверхности. В случае турбулентного погранслоя  $Re_x'$  вычисляется при определяющей температуре  $T'$  и

$$c_f = 0,0592 (Re_x')^{-1/3} \quad (2.3)$$

Используя (1.2) и приведя  $c_f$  к параметрам набегающего потока, после ряда преобразований получим универсальную формулу, справедливую как для ламинарного ( $\nu = 1/2$ ), так и для турбулентного ( $\nu = 1/3$ ) течения

$$c_f = 2\varepsilon \Lambda_v [x - x_e(z)]^{-\nu} \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha$$

$$\Lambda_v = \frac{C_v}{Re^{\nu}} A^{\nu(1+\omega)-1} \frac{\varepsilon^{\nu-2} \Theta^{\omega\nu}}{2 \sin^3 \alpha} (\cos \alpha)^{3-\nu}$$

$$A = 1 + 0,032M_{\infty}^2 \cos^2 \alpha + 0,58 (t_w/\Theta - 1)$$

$$C_{1/2} = 0,664, \quad C_{1/3} = 0,0592, \quad Re = \rho_{\infty} V_{\infty} L / \mu_{\infty}, \quad t_w = T_w / T_{\infty}$$

Результат интегрирования по поверхности крыла полученного таким образом коэффициента трения представим в виде разложения сопротивления трения  $X_f$ , аналогичного (1.9) для  $X_w$

$$\frac{X_f}{\rho_{\infty} v_{\infty}^2 L^2} = \varepsilon^{3/2} \sigma_f Q_f \operatorname{tg}^2 \alpha + \dots, \quad Q_f = \frac{2\Lambda_v}{\sigma_r (1-\nu)} \int_0^{\alpha} [1 - x_e(z)]^{1-\nu} dz \quad (2.4)$$

Как следует из (2.4), (1.9), величина  $\Lambda_v$ , содержащая малый параметр  $\varepsilon \ll 1$  и число  $Re \gg 1$ , служит критерием подобия и при  $\Lambda_v \sim 1$  волновое и вязкое сопротивление вносят одинаковый по порядку вклад в полное сопротивление  $X$ . Из (1.1), (1.9), (2.4) окончательно находим

$$K = \operatorname{ctg} \alpha - \frac{2\varepsilon}{\sin 2\alpha} Q + \dots, \quad Q = Q_w + Q_f \quad (2.5)$$

Таким образом, при фиксированных  $\alpha$ ,  $M_{\infty}$ ,  $\Lambda_v$  максимум качества в следующем приближении к ньютоновскому соответствует минимуму функционала  $R = R_w + Q_f$  или в развернутой форме

$$R = \frac{2}{\sigma_r} \int_0^{\alpha} \{S(1, z) - S[x_e(z), z] + \frac{\Lambda_v}{1-\nu} [1 - x_e(z)]^{1-\nu}\} dz \quad (2.6)$$

3. Вид этого функционала указывает на то, что можно решать частичную

задачу оптимизации, отыскивая при заданной форме скачка уплотнения  $y = S(x, z)$  такую форму передней кромки в плане  $x = x_e(z)$ , которая доставляет минимум  $R$ , и полную задачу оптимизации, когда определяются обе функции  $S(x, z)$ ,  $x_e(z)$ , минимизирующие  $R$ .

Рассмотрим сначала частичную оптимизацию. В качестве изопериметрических условий, необходимых для получения нетривиальных решений, можно использовать разные ограничения. В дальнейшем будем считать заданной площадь крыла в плане

$$\sigma_r = 2 \int_0^{\Omega} [1 - x_e(z)] dz = 2\sigma_0 \quad (3.1)$$

С одной стороны, это важная геометрическая характеристика, которая согласно (1.9) определяет в главном члене подъемную силу. В то же время это упрощает дальнейший анализ, так как знаменатель функционала (2.6) оказывается фиксированным. Экстремум функционала  $R$  при условии (3.1) соответствует безусловному экстремуму функционала  $R_1 = R + \lambda\sigma_r/2$  ( $\lambda$  — неопределенный множитель Лагранжа).

Обозначим через  $\delta x_e(z)$  произвольную малую вариацию формы кромки в плане и проварьируем  $R_1$ . Замечая, что множитель при  $\delta\Omega$  для присоединенного скачка и принятой зависимости вязкого сопротивления (2.4) обращается в нуль, получим

$$\delta R_1 = \frac{2}{\sigma_r} \int_0^{\Omega} \left\{ R - \frac{\lambda\sigma_r}{2} - S_x[x_e(z), z] - \frac{\Lambda_v}{[1 - x_e(z)]^v} \right\} \delta x_e(z) dz$$

Далее уравнение передней кромки целесообразно представить в виде  $z = z_e(x)$  и перейти к независимой переменной  $x$  путем замены  $z = z_e(x)$ . Варьируя тождество  $x_e[z_e(x)] = x$ , находим

$$\delta x_e(z) = -\delta z_e(x)/z_e'(x)$$

Вариация  $\delta R_1$  приобретает вид

$$\delta R_1 = \frac{2}{\sigma_r} \int_0^1 \left\{ S_x[x, z_e(x)] - \left( R - \frac{\lambda\sigma_r}{2} \right) + \frac{\Lambda_v}{(1-x)^v} \right\} \delta z_e(x) dx \quad (3.2)$$

Из условия экстремума  $\delta R_1 = 0$  при произвольной  $\delta z_e(x)$  следует

$$S_x[x, z_e(x)] = R - \lambda\sigma_0 - \frac{\Lambda_v}{(1-x)^v} \quad (3.3)$$

Пусть для определенности поверхность скачка задается степенной функцией  $S(x, z) = a(x)z^n$ ,  $n > 0$

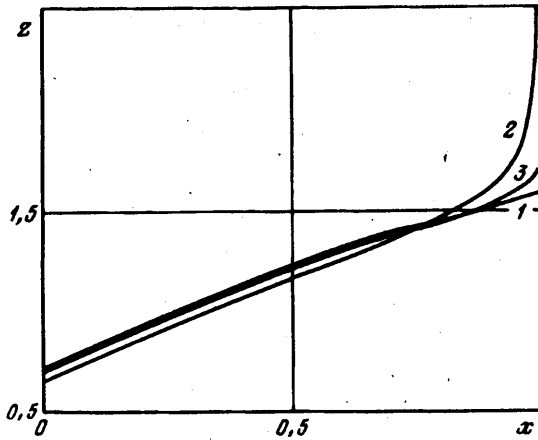
Из (3.1), (3.3), (3.4) получаем систему уравнений для определения  $z_e(x)$ ,  $\lambda$  и экстремального значения  $R_{\text{ext}}$

$$z_e(x) = \left\{ \frac{1}{a'(x)} \left[ R_{\text{ext}} - \lambda\sigma_0 - \frac{\Lambda_v}{(1-x)^v} \right] \right\}^{1/n} \quad (3.5)$$

$$nR_{\text{ext}} + \lambda\sigma_0 = \frac{n\Lambda_v}{\sigma_0} \int_0^1 \frac{z_e(x)}{(1-x)^v} dx, \quad \sigma_0 = \int_0^1 z_e(x) dx$$

Определяемая системой (3.5) экстремаль  $z = z_e(x)$  будет доставлять минимум функционалу  $R_{\text{ext}} = R_{\text{min}}$ , если получаемая из (3.2) вторая вариация положительна

$$\delta^2 R_1 = \delta^2 R = \int_0^1 S_{xx}[x, z_e(x)] [\delta z_e(x)]^2 dx \quad (3.6)$$



Фиг. 1

Конкретизируем вид функции  $a(x)$ , полагая

$$a(x) = k \ln(\delta + x), \quad \delta > 0 \quad (3.7)$$

Условие  $\delta^2 R_1 > 0$  выполняется, если  $k > 0$ . Однако видно, что при этом решение (3.5) не существует, поскольку при достаточно близких к единице значениях  $x$  (вблизи задней кромки) выражение в фигурных скобках становится отрицательным. Решение (3.5) может существовать при  $k < 0$ , поэтому далее рассмотрим именно этот случай, несмотря на то что при этом вторая вариация (3.6) отрицательна и функционал имеет максимум  $R_{\text{ext}} = R_{\text{max}}$ . Еще одна причина выбрать  $k < 0$  следующая. При невязком обтекании решение существует как для  $k > 0$  ( $R_{\text{min}} > 0$ ), так и для  $k < 0$  ( $R_{\text{max}} < 0$ ) [4]. Но если сравнивать решения независимых частных задач, то отрицательное максимальное значение  $R_{\text{max}}$  при  $k < 0$  оказывается меньше положительного минимального значения  $R_{\text{min}}$  при  $k > 0$ . Поэтому последующий поиск решения полной задачи оптимизации проводился в области  $k < 0$ , где, согласно (2.5), приращения качества наибольшие.

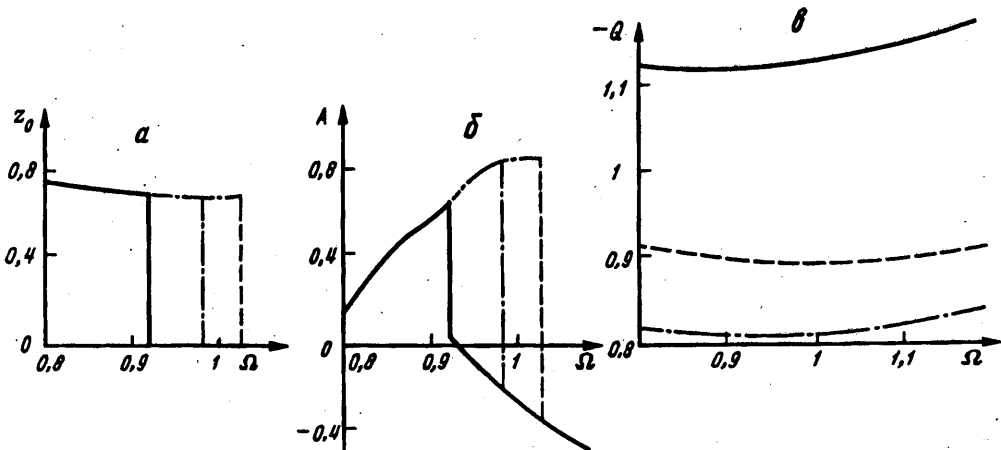
Поскольку производная  $a'(0)$  конечна, то частичная задача дает  $z_0 = z_e'(0) \neq 0$ .

Тогда на отрезке  $[0, z_0]$  нужно рассматривать вариационную задачу с закрепленными концами в точках  $(0, 0)$ ,  $(0, z_0)$ . Оказалось, что при любом виде кромки в плане, отличающейся от прямой  $x = 0$ , попытки решения задачи построения соответствующей поверхности крыла приводит к противоречию. Поэтому единственно приемлемой с этой точки зрения конфигурацией является крыло с плоским носовым срезом при  $0 \leq z \leq z_0$ .

Далее, как следует из (3.5), в вязком случае размах оптимального крыла стремится к бесконечности. Этот дефект связан с необходимостью уточнения формул (2.1), (2.3) для местного коэффициента трения при малых значениях разности  $x - x_e(z)$ .

Если в невязком случае частичная задача оптимизации допускает аналитическое решение [4], то при наличии вязкости соответствующая система уравнений (3.5) может быть решена только численно.

На фиг. 1 кривыми 1 — 3 показаны примеры полученных форм передней кромки в невязком потоке, при ламинарном ( $\Lambda_{1/2} = 0,09$ ) и турбулентном ( $\Lambda_{1/5} = 0,06$ ) пограничных слоях соответственно для фиксированных значений формпараметров скачка  $n = 2$ ,  $k = -0,35$ ,  $\delta = 0,25$ . Оказывается, что влияние вязкости сильнее



Фиг. 2

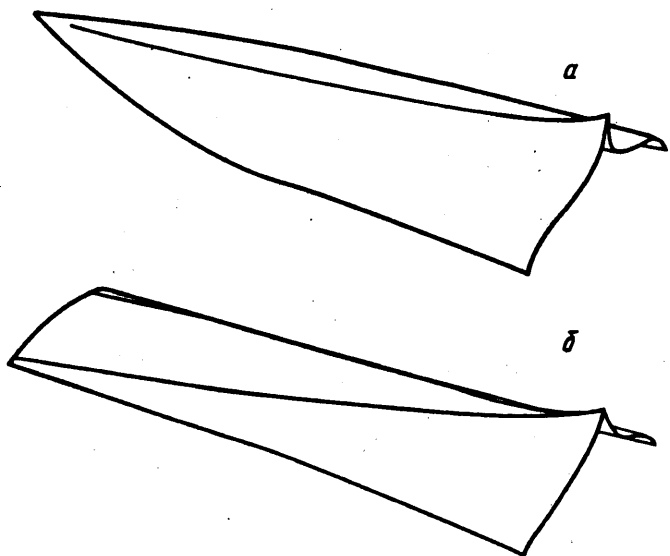
всего проявляется в концевой части крыла и, в частности, изменяет величину его размаха.

4. Перейдем теперь к полной задаче оптимизации, сохранив прежнее изопериметрическое условие (3.1). Из предыдущего ясно, что решение этой задачи следует искать в области  $k < 0$ . В функциональном классе поверхностей скачка (3.4), (3.7) при этом имеется возможность расположения проекции передней кромки на плоскость  $x = 1$  ниже сечения скачка этой плоскости, что дает отрицательные значения «волновой» составляющей (1.10) функционала (2.6)  $R_w < 0$  для крыльев с отогнутой вниз передней частью [4]. Существенно положительная «вязкая» добавка  $Q_v$  (2.4) снижает выигрыш в качестве и может также повлиять на оптимальную форму.

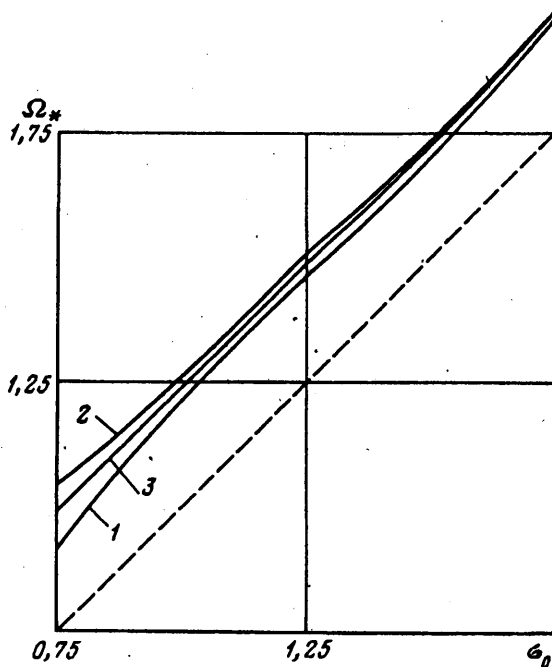
Поскольку при  $k < 0$  в частичной задаче оптимизации имеем  $Q_{\text{ext}} = Q_{\text{max}}$ , то любая форма кромки, отличная от полученной при решении этой задачи будет формально давать  $Q < Q_{\text{max}}$  и больший выигрыш в качестве. Однако необходимо принять во внимание следующее. Во-первых, размах получающихся крыльев может оказаться весьма значительным:  $\Omega \gg 1$ , что выводит за пределы применимости используемой асимптотической теории. Поэтому следует ограничить размах, задавая  $\Omega \sim 1$ . Во-вторых, после того как найдена оптимальная конфигурация передней кромки, форма поверхности оптимального крыла  $y = B(x, z)$  за присоединенным вдоль этой кромки скачком уплотнения определяется путем решения обратной задачи обтекания (1.7) с помощью алгоритма [4]. В этой связи наряду с условиями, уже поставленными выше при формулировке вариационной задачи, возникает дополнительное ограничение на форму кромки: она должна допускать непротиворечивое решение этой обратной задачи. Для этого потребуем, чтобы функция  $z_e(x)$  была монотонно возрастающей ( $z_e' > 0$ ).

Учитывая все упомянутые выше ограничения, представим искомую форму передней кромки крыла ( $z \geq 0$ ) с заданными значениями площади в плане и размаха в виде носового среза  $x = 0$ ,  $0 \leq z \leq z_0$  и кубической параболы, соединяющей точку  $x = 0$ ,  $z = z_0$  с точкой  $x = 1$ ,  $z = \Omega$  на задней кромке. Наряду с полушириной носового среза  $z_0$  тогда имеется еще один свободный формпараметр  $A$ , характеризующий максимальное отклонение параболы от прямой, проходящей через ее крайние точки. Полная задача оптимизации решалась путем независимой вариации формпараметров кромки  $z_0$ ,  $A$  и скачка  $k < 0$ ,  $n$ ,  $\delta$  и определения их комбинации, дающей минимальное значение функционала  $Q = R - 1$  из (2.5).

5. Как показали проведенные расчеты, обнаруженное в [11] бифуркационное



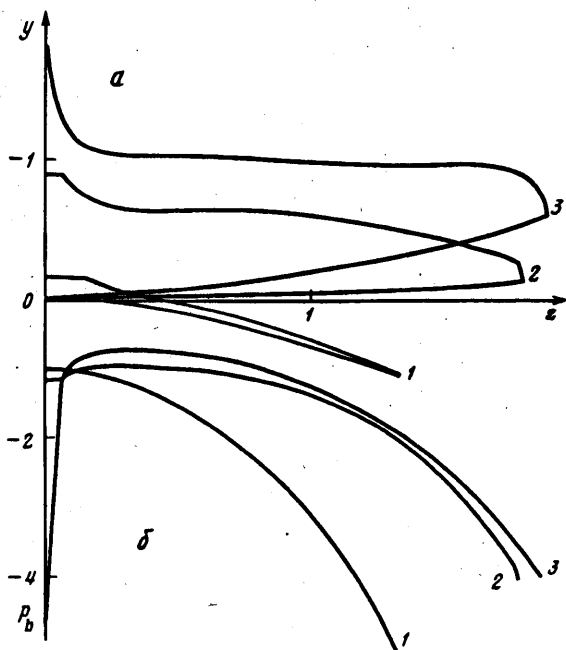
Фиг. 3



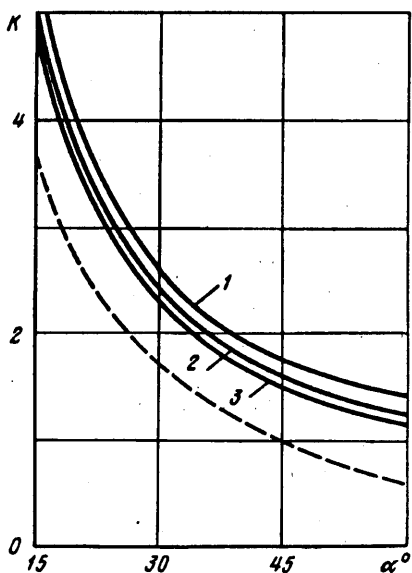
Фиг. 4

поведение оптимального решения при изменении размаха  $\Omega$  имеет место и в случае вязкого обтекания. Оно выражается в том, что по мере возрастания параметра  $\Omega$  итоговое минимальное значение функционала  $Q = Q_{\min}$  дается вначале первой ветвью решения, описывающей крыло с широким носовым срезом. Затем при определенном (бифуркационном) значении  $\Omega = \Omega_*$  происходит непрерывный по  $Q$ , но разрывный по остальным параметрам переход на вторую ветвь, которая дает  $Q = Q_{\min}$  при  $\Omega > \Omega_*$  и соответствует крылу с узким носовым срезом





Фиг. 5



Фиг. 6

или с заостренной вершиной ( $z_0 = 0$ ). На фиг. 2, а, б сплошными линиями показаны бифуркационные зависимости  $z_0(\Omega)$ ,  $A(\Omega)$  для случая невязкого обтекания ( $\sigma_0 = 0,75$ ,  $\Omega_{*1} = 0,921$ ). Влияние вязкости наиболее ярко выражено в окрестности точки бифуркации и приводит к смещению этой точки в сторону увеличения  $\Omega$ :  $\Omega_{*v} > \Omega_{*1}$ . Для ламинарного пограничного слоя ( $Re = 5 \cdot 10^5$ ,  $\Lambda_{1/2} = 0,09$ ,  $\Omega_* = 1,028$ , штриховая линия на фиг. 2, а) это смещение несколько больше, чем для турбулентного ( $Re = 5 \cdot 10^6$ ,  $\Lambda_{1/2} = 0,06$ ,  $\Omega_* = 0,987$ , штрихпунктирная линия). Помимо указанных значений чисел  $Re$  в расчетах использованы следующие величины введенных в разд. 1, 2 определяющих параметров:  $M_\infty = 20$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\chi = 1,4$  ( $\varepsilon = 0,175$ ),  $t_w = 3,6$ ,  $\omega = 0,75$ .

Таким образом, если  $\Omega$  заключено в пределах  $\Omega_{*1} < \Omega < \Omega_{*v}$  (например,  $\Omega = 1$  при  $\sigma_0 = 0,75$ ), то невязкое оптимальное решение располагается уже на второй ветви и дает крыло с заостренной вершиной (фиг. 3, а), тогда как вязкое ламинарное оптимальное решение остается на первой ветви и дает крыло с широким носовым срезом (фиг. 3, б). Здесь крылья изображены в масштабах исходных физических координат. Следовательно, несмотря на то что численные значения параметра подобия  $\Lambda_v$  достаточно малы, влияние вязкости на оптимальную форму может оказаться существенным.

Фигура 4 показывает, что при увеличении площади  $\sigma_0$  различие в бифуркационных значениях параметра  $\Omega_*$  для ламинарного (кривая 2) и турбулентного (кривая 3) погранслоя исчезает и величина  $\Omega_{*v}$  становится близкой к  $\Omega_{*1}$  для невязкого обтекания (кривая 1). В области параметров  $\sigma_0$ ,  $\Omega$  между биссектрисой первого квадранта (штриховая линия) и кривой  $\Omega_*(\sigma_0)$  реализуется первая ветвь оптимального решения, а выше кривой  $\Omega = \Omega_*(\sigma_0)$  — вторая ветвь.

Проведенная по методике [6] оптимизация с учетом неравновесных реальных свойств воздуха показала, что влияние неравновесности смещает точку бифуркации в противоположную сторону и тем самым частично компенсирует эффекты

вязкости. Что касается минимальной величины функционала  $Q$ , то вязкость обуславливает заметное ее повышение (фиг. 2, *в*), т. е. уменьшение максимального аэродинамического качества, особенно ярко выраженное для турбулентного течения. Если  $\Omega$  находится вне указанного выше интервала между  $\Omega_{*1}$  и  $\Omega_{*2}$ , то вязкость не оказывает влияния на форму оптимального крыла, а только снижает качество.

Например, при  $\sigma_0 = 1,6$ ,  $\Omega = 1,92$  вторая ветвь решения дает крыло с небольшим носовым срезом ( $z_0 = 0,17$ ), сечения поверхностей крыла и скачка уплотнения (соответственно верхняя и нижняя кривые 1, 2, 3) поперечными плоскостями  $x = 0,15; 0,7; 1$  показаны на фиг. 5, *а*.

Следует отметить, что найденные формы в плане присущи также интегральным компоновкам волнолета с гиперзвуковым прямооточным воздушно-реактивным двигателем (ГПВРД), опирающегося на конический скачок уплотнения [16]: конфигурации, оптимальные по аэродинамическому качеству, имеют форму в плане с носовым срезом, а компоновки, оптимальные по избытку тяги ( $F - X)/X$ , как правило, заостренные.

Численный алгоритм расчета давления  $p_b(x, z)$  на оптимальном крыле в соответствии с формулами (1.8) подробно изложен в [11]. На фиг. 5, *б* в качестве примера линиями 1—3 показано распределение давления по размаху для тех же поперечных сечений, что и на фиг. 5, *а*. Произведение  $\epsilon p_b(x, z)$  дает переменную поправку первого порядка к постоянному ньютоновскому значению давления. В итоге на поверхности крыла и на внешней границе погранслоя коэффициент давления определяется как

$$c_p = 2(1 + \epsilon p_b) \sin^2 \alpha$$

Согласно [11], уточненное значение аэродинамического качества получается из (1.1) после того, как входящая туда подъемная сила  $Y$  определяется путем интегрирования найденного распределения давления по оптимальному крылу, и в разложениях (1.9) величина  $P$  представляется альтернативной формулой

$$P = \frac{1}{\sigma_r} \iint_{\sigma_r} p_b dx dz + \frac{1}{\Theta}$$

Как показывает анализ форм поверхностей оптимальных крыльев, производная  $V_z$  на большей части крыла принимает пренебрежимо малые значения за исключением, быть может, локальных областей в кормовой части: гребнеобразная впадина вблизи плоскости симметрии, отгиб крыла вблизи передней кромки, отчетливо различимых на фиг. 5, *а*. Отметим, что при вязком обтекании такие узкие впадины могут оказаться полностью занятыми пограничным слоем, а это приведет к более плавному изменению давления вблизи плоскости симметрии, чем для кривой 3 на фиг. 5, *б*.

Зависимость максимального качества от угла атаки при  $M_\infty = 20$ ,  $\kappa = 1,4$  и фиксированных значениях приведенных параметров  $\sigma_0 = 1$ ,  $\Omega = 1,3$  с учетом  $P$  в (1.9) представлена на фиг. 6. Для рассмотренного диапазона больших углов атаки включение вязкости в процесс оптимизации несколько снижает качество по сравнению с невязким обтеканием, вследствие чего соответствующая идеальному газу кривая 1 расположена выше кривых 2, 3 для ламинарного и турбулентного течений. Тем не менее остается заметным выигрыш в качестве по сравнению с ньютоновской зависимостью  $K_N = \text{ctg } \alpha$  (штриховая линия). Одновременно с уменьшением  $K$  по мере роста угла атаки увеличивается относительное приращение качества  $\Delta K = K/K_N - 1$  при использовании пространственных крыльев оптимальных форм в следующем приближении к ньютоновскому.

Помимо генерации сопротивления трения вязкость может оказывать влияние и на давление вследствие гиперзвукового вязко-невязкого взаимодействия. Ввиду

того, что учет этого эффекта даже в рамках простейшей формулы касательного клина для давления приводит к существенным усложнениям формулировки, возможности решения соответствующих вариационных задач весьма ограничены. Тем не менее оптимизация при заданной форме в плане [17], как и приведенные выше результаты данной работы, дает оптимальные крылья с отогнутой вниз передней частью.

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить В. Я. Борового за полезное обсуждение результатов, а также В. В. Негоду и Д. С. Емелина за помощь в проведении расчетов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
2. Messiter A. F. Lift of slender delta wings according to Newtonian theory//AIAA Journal. 1963. V. 1. № 4. P. 794—802.
3. Голубкин В. Н. Пространственное обтекание крыльев гиперзвуковым потоком газа//Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 5. С. 148—161.
4. Голубкин В. Н., Негода В. В. Оптимизация пространственной формы несущих тел малого удлинения при гиперзвуковых скоростях//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31. № 12. С. 1858—1870.
5. Голубкин В. Н., Негода В. В. О повышении аэродинамического качества крыльев малого удлинения при гиперзвуковых скоростях//ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 392—403.
6. Голубкин В. Н., Негода В. В. Оптимальные формы крыльев в гиперзвуковом неравновесном потоке//ПМТФ. 1993. № 2. С. 66—72.
7. Майкнап Г. И. О наиболее выгодной форме несущих тел при гиперзвуковых скоростях//Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 2. С. 38—47.
8. Bowcutt K. G., Anderson J. D., Capriotti D. Viscous optimized hypersonic waveriders//AIAA Paper. 1987. № 272. 18 p.
9. Corda S., Anderson J. D. Viscous optimized hypersonic waveriders designed from axisymmetric flow fields//AIAA Paper. 1988. № 369. 13 p.
10. Anderson J. D., Lewis M. J., Kothari A. P., Corda S. Hypersonic waverides for planetary atmospheres//J. Spacecraft and Rockets. 1991. V. 28. № 4. P. 401—410.
11. Голубкин В. Н., Негода В. В. Оптимизация гиперзвуковых крыльев//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 3. С. 446—460.
12. Голубкин В. Н. Проблемы трансатмосферного полета в гиперзвуковой теории крыла//Аэротермодинамика воздушно-космических систем. М.: Изд-во ЦАГИ, 1992. Ч. 1. С. 87—103.
13. Hemdan H. T. Three-dimensional wings and waveriders with attached shock waves//AIAA Journal. 1992. V. 30. № 9. P. 2332—2334.
14. Остапенко Н. А. Аэродинамические характеристики V-образных крыльев с отогнутой ударной волной на передних кромках при гиперзвуковых скоростях полета//Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 145—154.
15. Голубкин В. Н. Об определении завихренности на крыле малого удлинения при гиперзвуковом обтекании//Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 5. С. 175—178.
16. O'Neil M. K., Lewis M. J. Optimized scramjet integration on a waverider//J. Aircraft. 1992. V. 29. № 6. P. 1114—1121.
17. Николаев В. С. Оптимальная форма треугольного крыла при заданной балансировке в вязком гиперзвуковом потоке//Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 47—55.