МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1995

УДК 532.62.013.4 : 536.423.4

© 1995 г. В. С. АЖАЕВ, С. Г. ЧЕРКАСОВ

РАЗВИТИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПЛЕНОЧНОЙ КОНДЕНСАЦИИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБКЕ В НЕВЕСОМОСТИ

Эволюция малых возмущений свободной поверхности при пленочной конденсации на трубке теплообменника в невесомости определяется не только капиллярными силами, но также и характером тепло- и массообмена в системе жидкость — пар. В данной работе показано, что одновременный учет всех этих факторов даже в рамках простейших моделей приводит к результатам, качественно отличным от известных формул для случая теплового равновесия. Получены аналитические формулы в предположении квазистационарного профиля скорости, а также поправки к ним, связанные с нестационарным членом в уравнении движения.

Рассматривается течение в тонкой цилиндрически симметричной пленке жидкости, конденсирующейся на прямолинейной трубке радиуса R_0 в условиях идеальной невесомости. Для таких течений уравнение неразрывности удобно записать в следующей интегральной форме:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{R_0}^{R} r v_z dr = \frac{m_t}{2\pi\rho R} = \frac{q_n}{\alpha\rho} \tag{1}$$

Здесь r, z — цилиндрические координаты, R — радиальная координата свободной поверхности, зависящая только от z и от времени t, v_z — проекция скорости на ось z, ρ — плотность жидкости, m_t — приток массы на единицу длины трубки за счет конденсации, α — удельная теплота фазового перехода, q_n — нормальная компонента теплового потока. Предполагается, что течения не нарушают цилиндрическую симметрию пленки.

Профиль скорости v_z в общем случае для аксиально-симметричных течений определяется из следующих уравнений движения [1]:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

Здесь P — давление, конвективные члены в линейной теории развития неустойчивости можно не учитывать, в невозмущенном состоянии жидкость находится в покое. Решение системы (2) вместе с уравнением неразрывности в случае без конденсации приводит к довольно громоздким неявным формулам [2]; ясно, что попытка учета теплообмена в рамках той же модели еще более усложнила бы результаты. Однако в рассматриваемой задаче о конденсации на трубке теплообменника нет необходимости искать общее решение системы (2) — можно ограничиться случаем малой толщины пленки δ, т. е. считать δ малой по сравнению с характерным масштабом изменения толщины пленки по оси z. Тогда можно пренебречь поперечными градиентами давления и последним членом во втором уравнении (2). В рамках такой модели в [3] был получен следующий «квазистационарный» профиль скорости т. е. решение уравнения движения без учета нестационарного члена:

$$v_z = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\left[r^2 - R_0^2 - 2R^2 \ln\frac{r}{R_0}\right] \qquad (3)$$

Здесь μ — динамическая вязкость, p — избыточное давление в пленке, обусловленное капиллярными силами. Подставив выражение (3) в уравнение неразрывности (1), получим

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{1}{4\mu R}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{3R^4 + R_0^4}{4} - R_0^2R^2 - R^2\ln\frac{R}{R_0}\right)\right\} = \frac{q_n}{\alpha\rho} \qquad (4)$$

Определим теперь конкретный вид функции $p(z)$. В рамках линейной теории развития неустойчивости решение задачи для произвольного аксиально-симметричного возмущения свободной поверхности может быть представлено в виде суперпозиции решений для отдельных гармонических возмущений. Везде ниже будет рассматриваться малое гармоническое возмущение формы свободной поверхности с длиной волны λ, записанное в комплексной форме (т. е. фурье-компонента произвольного малого возмущения)

$$R - R_s = \zeta e^{ikz}, \; k = 2\pi/\lambda$$

Здесь R_s — радиус невозмущенной свободной поверхности. Будем считать, что R_s мало меняется в течение характерного времени развития возмущений; количественный критерий сформулирован ниже. Вместо R_s будем использовать символ R в тех случаях, когда различие двух радиусов приводит к квадратичным по ζ поправкам. Изменение давления при гармоническом возмущении

$$p - \frac{\sigma}{R} = -\sigma\zeta e^{ikz}\left(\frac{1}{R^2} - k^2\right) \qquad (5)$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения. Подставив теперь выражение (5) в уравнение (4) и линеаризуя последнее по ζ, получим

$$\left[\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \frac{\sigma k^2\zeta}{4\mu R}(R^{-2} - k^2)\left(\frac{3R^4 + R_0^4}{4} - R_0R - R^4\ln\frac{R}{R_0}\right)\right] e^{ikz} = \frac{\delta q}{\alpha\rho} \qquad (6)$$

Здесь δq — малое изменение потока, связанное с возникновением возмущения свободной поверхности. Формула (6) справедлива в рамках рассматриваемой модели развития неустойчивости независимо от конкретного вида выражений для тепловых потоков. Рассмотрим простейшую модель теплообмена. Будем считать, что температура вдоль всей длины трубки неизменна и равна T_0, температура T_s на свободной поверхности также постоянна, а q_n описывается формулой для стационарного теплового потока через цилиндрическую прослойку [4]

$$q_n = -\frac{\varkappa(T_s - T_0)}{R\ln(R/R_0)} \qquad (7)$$

где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности жидкости. Формула (7) справедлива при условии, что характерное время τ установления стационарного профиля температур мало по сравнению с характерным временем изменения R за счет конденсации и неустойчивости. Время τ можно оценить из условия [4] $\equiv$ Fo: $\equiv a\tau/R^2 \sim 1$, где Fo — число Фурье, $a = \varkappa/\rho c_p$ — коэффициент температуропроводности, c_p — теплоемкость жидкости. Подставим теперь выражение (7) в формулу (6); получим

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \frac{\sigma k^2}{4\mu R}\left(\frac{1}{R^2} - k^2\right)\left(\frac{3R^4 + R_0^4}{4} - R_0^2R^2 - R^4\ln\frac{R}{R_0}\right)\zeta = \frac{\varkappa(T_s - T_0)\,\zeta}{\alpha\rho(R\ln(R/R_0))^2} \quad (8)$$

Решение этого уравнения для возмущения с начальной амплитудой ζ_0

$$\zeta = \zeta_0 e^{-\gamma t},\ \gamma = \frac{\varkappa(T_s - T_0)}{\alpha\rho\,(R\ln(R/R_0))^2} -$$

$$- \frac{\sigma k^2}{4\mu R}(R^{-2} - k^2)\left(\frac{3R^4 + R_0^4}{4} - R_0^2R^2 - R^4\ln\frac{R}{R_0}\right) \quad (9)$$

Условие устойчивости свободной поверхности эквивалентно условию экспоненциального затухания возмущений, т. е. $\gamma > 0$. Отметим, что из-за конденсации здесь неприменимо классическое условие затухания возмущений ($\lambda < 2\pi R$), полученное еще Рэлеем и впоследствии использованное в различных моделях развития неустойчивости. Кроме того, в отличие от случая без конденсации здесь могут оказаться затухающими возмущения с любыми длинами волн. Действительно, показатель экспоненты является, согласно формуле (9), квадратичной функцией от квадрата волнового вектора: эта функция положительна для любых длин волн при условии

$$\frac{\varkappa(T_s - T_0)}{\alpha\rho\,(\ln(R/R_0))^2} > \frac{\sigma}{16\mu R}\left(\frac{3R^4 + R_0^4}{4} - R_0^2R^2 - R^4\ln\frac{R}{R_0}\right)$$

Если это условие не выполнено, т. е. неустойчивость развивается, то формула (9) позволяет оценить характерное время этого процесса: оно порядка γ^{-1}. Условие малости этой величины по сравнению с τ из формулы $a\tau \sim R^2$ определяет границы применимости полученного выражения для γ.

При переходе от (4) к (9) использовалось условие медленности изменения радиуса невозмущенной поверхности R_s. Полученное выражение для γ позволяет сформулировать количественный критерий: относительное изменение R_s за время γ^{-1} должно быть малым.

Формула (8) была получена в предположении, что толщина пленки мала по сравнению с длиной волны возмущения свободной поверхности. Если, кроме того, толщина пленки много меньше радиуса трубки, то выражение для γ можно разложить в ряд по степеням δ/R. Тогда формула (9) примет более простой вид

$$\gamma = \frac{\varkappa(T_s - T_0)}{\alpha\rho\delta^2} - \frac{\sigma\delta^3}{3\mu}k^2(R^{-2} - k^2)$$

Использованный при выводе формулы (9) профиль скорости (5) был получен в [3] при условии малости нестационарного члена в уравнении движения. В рамках линейной теории развития неустойчивости выражение для γ можно уточнить, отбросив это предположение, т. е. записав уравнение движения в виде

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \quad (10)$$

Выражение для v_z в линейной теории можно записать в виде $v_z = ve^{-\gamma t + ikz}$, где v зависит только от радиальной координаты. Подставив это выражение вместе с формулой (5) для избыточного давления в (10), получим уравнение

$$\nu\left(v'' + \frac{1}{r}v'\right) - \left(\frac{1}{R^2} - k^2\right)\frac{ik\zeta_0}{\rho} + \gamma v = 0$$

Штрихом здесь обозначено дифференцирование по r. Решение полученного уравнения — сумма частного решения (v_1) и общего решения однородного; последнее представляет собой уравнение Бесселя, поэтому

$$v = -\frac{ik\zeta_0}{\rho\gamma}\left(\frac{1}{R^2} - k^2\right) + AJ_0(br) + BY_0(br) \tag{11}$$

Здесь $J_0(x)$, $Y_0(x)$ — функции Бесселя и Неймана нулевого порядка, $b = (\gamma/\nu)^{1/2}$, A и B — коэффициенты, определяемые из граничных условий. Использование условий прилипания и отсутствия тангенциальных напряжений на свободной поверхности приводит к следующей системе линейных уравнений для коэффициентов A и B:

$$AJ_0(bR_0) + BY_0(bR_0) = -v_1,\quad AJ_0'(bR) + BY_0'(bR) = 0$$

Решение системы запишется в виде

$$A = v_1 Y_1(bR)\,\Delta^{-1},\quad B = -v_1 J_1(bR)\,\Delta^{-1} \tag{12}$$

$$\Delta = J_0(bR_0)\,Y_0'(bR) - Y_0(bR_0)\,J_0'(bR)$$

Здесь использованы формулы, связывающие производные функций Бесселя и Неймана нулевого порядка с теми же функциями первого порядка [5]: $J_0'(x) = -J_1(x)$, $Y_0'(x) = -Y_1(x)$.

Подставим теперь выражение (11) с коэффициентами A и B, определяемыми формулами (12), в уравнение неразрывности (1); в результате получим

$$\left[\gamma - \frac{k^2\sigma}{\rho\gamma R}(R^{-2} - k^2)\, I\right]\zeta e^{ikz} = -\frac{\delta q}{\alpha\rho} \tag{13}$$

$$I = \int\limits_{R_0}^{R}\left[1 + (Y_1(bR)\,J_0(br) - J_1(bR)\,Y_0(br))\,\Delta^{-1}\right] r\,dr$$

Интегралы от функций Бесселя и Неймана нулевого порядка могут быть выражены через те же функции первого порядка [5]

$$\int\limits_0^y J_0(x)\,dx = yJ_1(y),\quad \int\limits_0^y Y_0(x)\,dx = yY_1(y)$$

Подстановка этих формул в выражение для интеграла I приводит к формуле

$$I = \frac{R^2 - R_0^2}{2} + \frac{R_0}{b\Delta}\left[J_1(bR)\,Y_1(bR_0) - Y_1(bR)\,J_1(bR_0)\right] \tag{14}$$

В случае, когда параметр b может считаться малым по сравнению с R^{-1}, формулы (13), (14) позволяют получить приближенное аналитическое выражение, уточняющее формулу (9). Для этого разложим числитель и знаменатель в формуле (14) по степеням bR, bR_0, сохраняя члены до четвертого порядка включительно, а затем разделим числитель на знаменатель по правилам деления многочленов, сохранив опять члены до четвертого порядка. Разложение по степеням в знаменателе проводится с использованием следующих формул [5]:

$$Y_1(br) = \frac{2}{\pi}J_1(br)\left[\ln\frac{br}{2} + C\right] - \frac{2}{\pi br} - \frac{br}{2\pi} + \frac{5\,(br)^3}{32\pi} + \ldots$$

$$J_1(br) = \frac{br}{2} - \frac{(br)^3}{16} + \frac{1}{12}\cdot\frac{(br)^5}{32} + \ldots$$

Здесь C — постоянная Эйлера. Аналогичные формулы справедливы и для цилиндрических функций нулевого порядка:

$$Y_0(br) = \frac{2}{\pi} J_0(br) \left[\ln \frac{br}{2} + C\right] + \frac{(br)^2}{2\pi} - \frac{3\,(br)^4}{64} + \ldots$$

$$J_0(br) = 1 - \frac{(br)^2}{4} + \frac{(br)^4}{64} + \ldots$$

Для удобства записи формул введем новые обозначения: γ_0 для декремента затухания возмущений, определяемого по формуле (9), и γ_1 для уточненного значения той же величины, найденного по описанному выше алгоритму с помощью формул (13)—(14). Тогда окончательное выражение для декремента затухания возмущений:

$$\gamma_1 = \gamma_0 \Big(1 + \frac{k^2 \sigma \rho R_0^3}{192 \mu^2} (1 - (kR)^2)\,(24 s^6 (\ln s)^2 -$$

$$- 12 s^4 \ln s\,(3s^2 - 2) - 30 s^4 + 17 s^6 + 15 s^2 - 2\Big) \tag{15}$$

$$s = R/R_0$$

Несмотря на громоздкий вид формула (15) — явная, в отличие от формул (13), (14). Вывод формулы (15) фактически представляет собой предельный переход от общих выражений (13)—(14) к случаю $R_0 \sqrt{\gamma/\nu} \ll 1$ при $\delta \lessapprox R_0$.

Предложенный метод учета нестационарного члена в уравнении движения может быть использован также и для исследования неустойчивости тонких пленок в случае теплового равновесия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. *Goren S. L.* The instability of an annular thread of fluid//J. Fluid Mech. 1962. V. 12. Pt 2. P. 309—319.
3. *Carroll B. J., Lucassen J.* Effect of surface dynamics on the process of droplet formation from supported and free liquid cylinders//J. Chem. Soc. Faraday Trans. I. 1974. V. 70. № 7. P. 1228—1239.
4. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967. 599 с.
5. *Кузнецов Д. С.* Специальные функции. М.: Высш. шк., 1962. 248 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.VI.1994