

УДК 532.528+533.692

© 1995 г. Д. В. МАКЛАКОВ, М. В. НАБОРОВА

## КАВИТАЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

В точной нелинейной постановке исследована задача обтекания профиля произвольной формы в режиме развитой кавитации плоским стационарным потоком идеальной несжимаемой жидкости.

При анализе рассматриваемой задачи в качестве кавитационной схемы используется схема Тулина — Терентьева [1, 2]. Точка отрыва потока на верхней омываемой части профиля либо фиксирована, либо определяется из условия Бриллюэна. Путем конформного отображения области течения на полукруг единичного радиуса задача сводится к нелинейному интегральному уравнению и пяти функциональным соотношениям для определения параметров.

Решение полученной системы уравнений классическим методом Леви — Чивиты сопряжено со значительными вычислительными трудностями, связанными с наличием на профиле участка большой кривизны вблизи носика. Это приводит к необходимости отыскивать большое количество коэффициентов плохо сходящихся рядов Фурье. Анализ ошибок, возникающих при применении метода Леви — Чивиты к препятствиям с участками большой кривизны, посвящена работа [3].

В данной статье система уравнений решается методом дискретизации с аппроксимацией входящих в нее линейных операторов матрицами с фиксированными коэффициентами. Аналогичный способ дискретизации был использован ранее в [4] при расчете течения невесомой жидкости со свободной границей над неровным дном. Следует заметить, что дополнительная система функциональных соотношений, необходимая для определения параметров, в задаче работы [4] не возникает. Кроме того, в настоящей работе якобиан системы на каждом шаге итераций при применении метода Ньютона вычисляется аналитически. Этот прием является основным ресурсом экономии машинного времени и позволяет производить вычисления с высокой точностью на персональном компьютере.

1. Постановка задачи и сведение ее к нелинейному интегральному уравнению. Пусть профиль  $L$  обтекается в режиме развитой кавитации плоским установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости по схеме Тулина — Терентьева [1, 2]. Предполагается, что острая выходная кромка профиля совпадает с точкой отрыва потока  $B$ . Вторая точка отрыва  $A$  либо фиксирована (посредством задания длины дуги  $l$  омываемой части профиля), либо определяется из условия отрыва Бриллюэна. Вектор скорости невозмущенного потока на бесконечности направлен вдоль положительного направления оси  $x$ . Число кавитации  $Q = V_0^2/V_\infty^2 - 1$ , где  $V_0$ ,  $V_\infty$  — скорости на границе каверны и на бесконечности соответственно. Форма профиля задается уравнением  $\alpha = F(s)$ , где  $\alpha$  — угол наклона касательной к профилю  $L$ ,  $s$  — длина дуги, отсчитываемая от точки  $B$ .

Области изменения комплексного потенциала  $W(z)$  и функции Жуковского  $\omega = i \ln(dW/dz) - i \ln V_0$  отобразим на единичный полукруг в плоскости вспомогательного переменного  $t = \xi + i\eta$  ( $|t| \leq 1$ ,  $\text{Im}(t) \geq 0$ ) так, что бы омываемая часть профиля  $L$  перешла в полукружность, а свободная поверхность — в ее

диаметр. Точке разветвления потока  $D$  соответствует  $t_* = \exp(i\sigma_*)$ , точке замыкания каверны  $C - t = 0$ . Бесконечно удаленная точка переходит в некоторую внутреннюю точку  $t_\infty = \rho_\infty \exp(i\sigma_\infty)$ .

Функция  $dW/dt$  строится по особенностям

$$\frac{dW}{dt} = \frac{kV_0}{\rho_\infty^2} \frac{t(t^2 - 1)(t^2 - 2t \cos \sigma_* + 1)}{(t - t_\infty)^2 (t - \bar{t}_\infty)^2 (t - 1/t_\infty)^2 (t - 1/\bar{t}_\infty)^2} = kV_0 f(t) \quad (1.1)$$

где  $k$  — постоянная, имеющая размерность длины.

Функцию Жуковского представим в виде суммы [5]

$$\omega(t) = \omega_0(t) + M(t^2 - 1)/t + \Omega(t) \quad (1.2)$$

$$\omega_0 = \alpha_0 - \pi + i \ln \frac{t - \exp(i\sigma_*)}{1 - t \exp(i\sigma_*)}, \quad \alpha_0 = F(0) \quad (1.3)$$

Здесь  $\omega_0$  — функция Жуковского для пластины, обтекаемой по схеме Кирхгофа,  $\Omega(t)$  — аналитическая в полукруге, непрерывная вплоть до границы функция.

В соответствии с выбранной схемой кавитационного обтекания в точке  $t = 0$  функция Жуковского должна иметь полюс первого порядка [5], что и приводит к появлению члена  $M(t^2 - 1)/t$  в сумме (1.2), где  $M$  — действительная постоянная.

Пусть  $\Omega(e^{i\sigma}) = \lambda(\sigma) + i\mu(\sigma)$ . В силу того что на границах каверны скорость постоянна и равна  $V_0$ ,  $\text{Im } \Omega(\xi) = 0$  на диаметре полукруга в параметрической плоскости. Тогда [5]

$$\Omega(t) = \frac{1 - t^2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\lambda(\sigma) d\sigma}{(1 - 2t \cos \sigma + t^2)} \quad (1.4)$$

С помощью формул (1.1)–(1.4) все характеристики данного потока могут быть выражены через функцию  $\lambda(\sigma)$  и параметры  $k, M, \sigma_*, t_\infty = \rho_\infty \exp(i\sigma_\infty)$ . В частности

$$z(t) = k \int_0^t e^{i\omega(\tau)} f(\tau) d\tau \quad (1.5)$$

Таким образом, гидродинамическая задача сводится к отысканию функции  $\lambda(\sigma)$  и параметров  $k, M, \sigma_*, t_\infty$ .

Из (1.1)–(1.5) стандартными приемами [4] выводится нелинейное интегральное уравнение для определения функции  $\lambda(\sigma)$

$$\lambda(\sigma) = F(s(\sigma)) - \alpha_0 \quad (1.6)$$

$$s(\sigma) = kS(g(\gamma) \exp(-C\lambda - 2M \sin \gamma))$$

$$g(\gamma) = \frac{4\rho_\infty^2 |\sin \gamma| (1 - \cos(\gamma + \sigma_*))}{(1 + \rho_\infty^2 - 2\rho_\infty \cos(\gamma - \sigma_\infty))^2 (1 + \rho_\infty^2 - 2\rho_\infty \cos(\gamma + \sigma_\infty))^2}$$

$$S\lambda = \int_0^\sigma \lambda(\gamma) d\gamma$$

$$C\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\lambda(\varepsilon) - \lambda(\gamma)) \left( \text{ctg} \left( \frac{\varepsilon + \gamma}{2} \right) - \text{ctg} \left( \frac{\varepsilon - \gamma}{2} \right) \right) d\varepsilon$$

Для определения параметров  $k, M, \sigma_*, \rho_\infty, \sigma_\infty$  необходимо получить пять дополнительных соотношений.

Задание длины дуги  $l$  омываемой части профиля приводит к уравнению вида

$$kJ_0(g(\gamma) \exp(-C\lambda - 2M \sin \gamma)) = l, \quad J_0\lambda = \int_0^\pi \lambda(\gamma) d\gamma \quad (1.7)$$

Здесь же рассмотрим требование выполнения условия Бриллюэна в верхней точке отрыва потока  $A$ , которое в рассматриваемой задаче принимает вид

$$\pi \operatorname{tg} \frac{\sigma_*}{2} + J\lambda = 2\pi M, \quad J\lambda = \int_0^\pi \lambda'(\gamma) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} d\gamma \quad (1.8)$$

В зависимости от постановки задачи при решении используется либо уравнение (1.7), либо (1.8).

Задание числа кавитации  $Q$  и направления скорости на бесконечности приводит к условию

$$\Omega(t_\infty) + \omega_0(t_\infty) + M \frac{t_\infty^2 - 1}{t_\infty} + i \ln(\sqrt{Q+1}) = 0 \quad (1.9)$$

которое при разделении действительной и мнимой частей дает два вещественных соотношения.

В соответствии с принятой схемой кавитационного обтекания необходимо выполнить условие однозначности отображающей функции

$$\oint \frac{dz}{dt} dt = 0$$

(интеграл берется по любому пути, охватывающему точку  $t_\infty$ ). С помощью теории вычетов находим

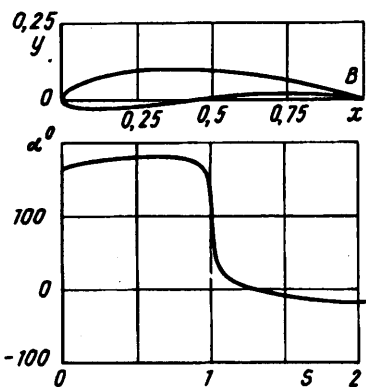
$$i\Omega'(t_\infty) + iM \left(1 + \frac{1}{t_\infty^2}\right) + \frac{1}{t_\infty} + \frac{2}{t_\infty - \exp(-i\sigma_*)} + \frac{i}{\rho_\infty \sin \sigma_\infty} - \frac{2\bar{t}_\infty}{\rho_\infty^2 - 1} = 0 \quad (1.10)$$

Условие (1.10), как и (1.9), после разделения действительной и мнимой частей дает два дополнительных действительных соотношения.

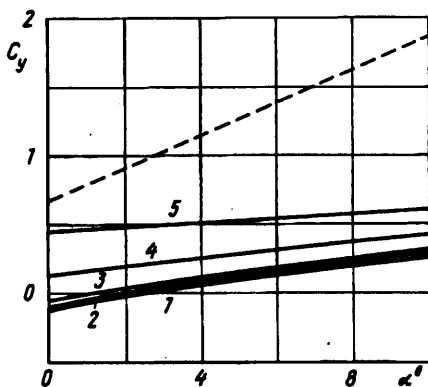
Полученная система (1.6)–(1.10) представляет собой замкнутую систему соотношений для определения функции  $\lambda(\sigma)$  и пяти неизвестных параметров  $k$ ,  $M$ ,  $\sigma_*$ ,  $\rho_\infty$ ,  $\sigma_\infty$  при заданных  $F(s)$ ,  $Q$ ,  $l$ . Последний параметр  $l$  не входит в число определяющих параметров задачи, если используется условие отрыва Бриллюэна.

Задача решается методом дискретизации системы с аппроксимацией линейных операторов матрицами с фиксированными коэффициентами. Решения полученной системы находятся методом Ньютона, при этом на каждом шаге итерационного процесса якобиан системы вычисляется аналитически, что значительно сокращает время вычислений. Созданный алгоритм реализован в виде программы на языке Фортран 77, работающей в диалоговом режиме и позволяющей задать форму обтекаемого профиля в виде массива точек, а также число кавитации, угол атаки и положение точки отрыва. Нулевое приближение при расчетах выбиралось при малых  $l$ ,  $Q$  по способу определения нулевого приближения для слабо наклоненной плоской пластины [5]. При хорошем нулевом приближении решение с точностью  $10^{-5}$  достигалось за 4–5 итераций. Время расчета одной итерации при  $N=60$  на IBM PC/AT-286 около 35 с.

**2. Результаты исследования.** Для проверки эффективности метода был выполнен тестовый расчет обтекания кругового цилиндра. В монографии [5] приведены результаты расчетов Н. А. Гладковой и А. Г. Терентьева симметричного обтекания кругового цилиндра с определением точек отрыва из условия Бриллюэна. При тестовом расчете нижняя точка отрыва  $B$  на цилиндре выбиралась согласно данным [5], а верхняя точка отрыва  $A$  определялась из условия Бриллюэна. В результате получалось симметричное течение как для схемы Кирхгофа, так и



Фиг. 1



Фиг. 2

для схемы Тулина — Терентьева. Коэффициенты сопротивления и длины каверн совпали с данными [5] с точностью до  $10^{-4}$ .

Систематические числовые расчеты были выполнены для профиля Жуковского. Форма профиля и функция  $\alpha(s)$  показаны на фиг. 1. Если принять хорду профиля за единицу, то геометрические характеристики его такие: толщина  $\kappa = 11,82\%$ , радиус кривизны в носике  $r = 0,016$ , периметр  $P = 2,053$ . При безотрывном обтекании коэффициент подъемной силы профиля определен формулой

$$C_y(\alpha) = K \sin(\alpha - \alpha_m) \quad (2.1)$$

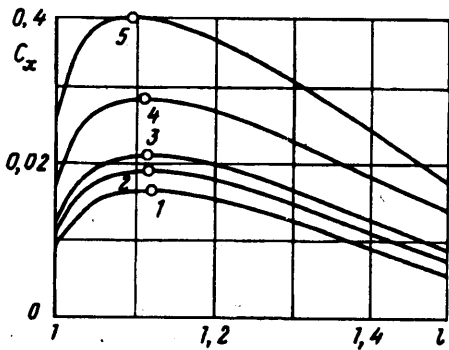
Для рассматриваемого профиля  $\alpha_m = -5,613^\circ$  и, если  $C_y$  отнесен к хорде,  $K = 6,885$ .

С целью определения влияния развития кавитации на подъемную силу был проведен расчет коэффициента  $C_y$  при различных числах кавитации и углах атаки. Результаты расчета показаны на фиг. 2. Кривые 1—5 построены при  $Q = 0; 0,1; 0,15; 0,3; 0,5$ . Штриховой линией показан коэффициент подъемной силы при безотрывном обтекании, вычисленный по формуле (2.1). Из этих графиков следует, что линейный характер зависимостей  $C_y(\alpha)$  сохраняется и при кавитационном обтекании, однако падение подъемной силы по сравнению с безотрывным обтеканием весьма значительно, причем с уменьшением роста чисел кавитации и увеличением углов атаки это падение усиливается.

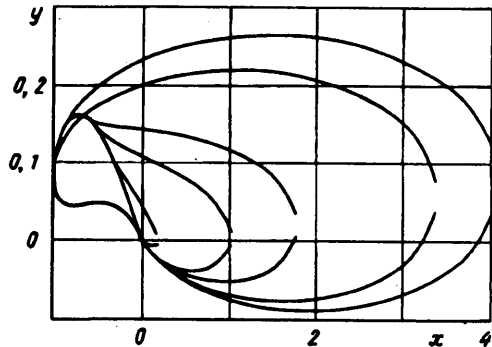
На фиг. 3 представлены зависимости  $C_x(l)$  при  $\alpha = 5^\circ$ , где  $C_x$  — коэффициент сопротивления, отнесенный к хорде,  $l$  — длина дуги омываемой части профиля. Кривые 1—5 построены для  $Q = 0; 0,1; 0,15; 0,3; 0,5$ . Точками обозначены значения  $C_x$  при выполнении условия Бриллюэна. Из анализа графиков следует, что течения, удовлетворяющие в точке отрыва условию Бриллюэна, обладают наибольшим сопротивлением. Этот факт, указанный Г. Ю. Степановым, наблюдался ранее при расчетах кавитационного обтекания кругового цилиндра (см. [5, 6]). Расчеты, проведенные для данного профиля при углах атаки, отличных от  $5^\circ$ , а также для других профилей Жуковского, подтвердили, что этот факт справедлив для профилей произвольной формы. Кроме того, замечено, что в случае отрыва по Бриллюэну подъемная сила минимальна, а каверна имеет максимальную длину.

На фиг. 4 приведены картины течения (формы профиля и каверн), полученные при  $Q = 0,15$  и  $l = 1,03; 1,117; 1,45; 1,55; 1,75$ . Пока длина дуги омываемой части меньше той, где происходит отрыв по Бриллюэну, каверна растет с ростом  $l$ , а свободная граница пересекает профиль. После отрыва по Бриллюэну при увеличении  $l$  длина каверны уменьшается. Течение, удовлетворяющее в точке отрыва условию Бриллюэна, имеет максимальную длину каверны.

В заключение отметим, что рассматриваемую кавитационную схему, как и



Фиг. 3



Фиг. 4

любую кавитационную схему, можно трактовать как модель течения со следом при отрывном обтекании [5, 6] и, в частности, как модель отрывного обтекания крыла летательного аппарата.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01763).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tulin M. P. Supercavitating flows — small perturbation theory//J. Ship Res. 1964. V. 7. № 3. P. 16—37.
2. Терентьев А. Г. К нелинейной теории кавитационного обтекания препятствий//Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 1. С. 158—161.
3. Birkhoff G., Goldstine H., Zarantonello E. Calculation of plane cavity flows past curved obstacles//Rend. Seminar. Mat. Univ. Politec. Torino. 1953. V. 13. P. 205—224.
4. King A. C., Bloor M. I. G. Free streamline flow over curved topography//Quart. Appl. Math. 1990. V. 48. № 2. P. 281—293.
5. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
6. Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю. Отрывные и кавитационные течения. М.: Наука, 1990, 382 с.

Казань

Поступила в редакцию  
12.IV.1994