

УДК 532.526.013.4 : 532.529

© 1995 г. Е. Б. ИСАКОВ, В. Я. РУДЯК

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВЗВЕСЕЙ И СУСПЕНЗИЙ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

В рамках линейной теории изучается устойчивость двумерного течения Пуазейля дисперсной среды. Построено численное решение соответствующего уравнения Орра — Зоммерфельда. Исследовано влияние на характер устойчивости течения массовой концентрации частиц, их размеров и времени релаксации.

Впервые задача об устойчивости плоскопараллельного течения гетерогенной жидкости, разреженной несжимаемой газозвеси, поставлена в [1]. Здесь было показано, что при равномерном распределении по пространству твердых частиц задача устойчивости течения газозвеси в линейном приближении сводится к решению уравнения Орра — Зоммерфельда с эффективным (комплексным) профилем скорости. При этом помимо традиционного числа Рейнольдса R течение описывается двумя дополнительными параметрами подобия: массовой концентрацией частиц f и временем релаксации S , которое определяется размерами частиц и отношением плотностей несущей жидкости и дисперсной фазы. Качественный анализ, проведенный в [1], показал, что добавление в среду мелких частиц дестабилизирует течение, а крупных — оказывает стабилизирующее действие. Эти выводы хорошо согласуются с физическими соображениями. Тем не менее рассчитанные в [2] асимптотическими методами кривые нейтральной устойчивости плоского течения Пуазейля противоречат им. Это заставило автора работы [2] высказать сомнение в надежности использованных асимптотик, которое впоследствии подтвердилось. Кроме того, в [2] кривые нейтральной устойчивости получены при фиксированных значениях параметра SR . Постоянство последнего при изменении числа Рейнольдса означает изменение S , а следовательно, различные точки такой нейтральной кривой соответствуют различным газозвесям. Полученные кривые поэтому лишены физического смысла. К сожалению, подобный подход применяется и в [3].

Актуальность задачи об устойчивости дисперсной среды и недостатки существующих работ заставляют вернуться к вопросу о линейной устойчивости течения Пуазейля газозвеси. Это и является целью настоящей работы.

1. Рассмотрим течение разреженной несжимаемой дисперсной среды, представляющей собой смесь жидкости или газа с твердыми сферическими частицами радиуса a . Будем далее считать континуум частиц столь разреженным, что можно пренебречь их взаимодействием друг с другом. Пусть, кроме того, сила межфазного взаимодействия описывается силой Стокса: $F_f = -F_p = 6\pi a \mu_p (u_p - u_f)$. Здесь и везде ниже индекс p указывает на переменные частиц, а индекс f — на переменные несущей жидкости. Таким образом, u_p и u_f — макроскопические скорости соответственно частиц и несущей жидкости, μ — коэффициент вязкости жидкости, n_p — число частиц в единице объема.

В безразмерных переменных

$$\rho_f' = 1, \quad \rho_p' = \frac{\rho_p}{\rho_f}, \quad V_p = \frac{u_p}{U_0}, \quad V_f = \frac{u_f}{U_0}, \quad r' = \frac{r}{L}, \quad t' = \frac{tU_0}{L}$$

где ρ_p и ρ_f — соответственно массовые плотности частиц и несущей жидкости, U_0 и L — характерные значения скорости и масштаба длины течения, уравнения движения фаз принимают вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V}_f &= 0, \quad \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_p \mathbf{V}_p) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} + (\mathbf{V}_f \nabla) \mathbf{V}_f &= -\nabla p + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{V}_f + \frac{\rho_p}{SR} (\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_f) \\ \frac{\partial \mathbf{V}_p}{\partial t} + (\mathbf{V}_p \nabla) \mathbf{V}_p &= \frac{1}{SR} (\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_p) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$R = \frac{U_0 L \rho_f}{\mu}, \quad S = \frac{2}{9} \left(\frac{a}{L} \right)^2 \left(\frac{\rho_p^*}{\rho_f} \right)$$

Здесь и везде ниже, где это не вызывает недоразумений, штрихи у безразмерных величин опущены, R — число Рейнольдса, S — время релаксации скорости частицы, p — давление среды, ρ_p^* — плотность материала частицы.

Пусть двухфазная среда совершает стационарное плоскопараллельное движение в плоскости xz , заданное профилями скоростей $\mathbf{V}_{j0}(y) = (V_{fx}, 0, V_{fz})$, $\mathbf{V}_{p0}(y) = (V_{px}, 0, V_{pz})$, профилем массовой концентрации частиц $f(y)$ и полем давлений $p_0(r)$. Нетрудно убедиться, что в такой постановке $\mathbf{V}_{j0} = \mathbf{V}_{p0}$, т. е. обе фазы обладают единым профилем скорости

$$\mathbf{V}_{j0} = \mathbf{V}_{p0} = \mathbf{V}(y) = (V_x(y), 0, V_z(y))$$

Исследуем устойчивость такого течения по отношению к бесконечно малому возмущающему движению в виде плоской волны с фазовой скоростью c , волновым числом α и частотой $\omega = \alpha c$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_f \\ \mathbf{V}_p \\ \rho_p \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}(y) \\ \mathbf{V}(y) \\ f(y) \\ p_0(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{V}_f(y) \\ \mathbf{V}_p(y) \\ f_1(y) \\ p_1(y) \end{pmatrix} \exp [i(\alpha x - \omega t)] \quad (1.2)$$

$$v_{p,f} \ll V, \quad f_1 \ll f, \quad p_1 \ll p_0$$

В результате подстановки величин (1.2) в уравнения (1.1) и отбрасывания членов высшего порядка малости образуется замкнутая система линеаризованных уравнений. Эта система содержит 8 скалярных уравнений, однако из нее можно выделить замкнутую подсистему 5 уравнений

$$i\alpha (V_x - c) v_{fx} + \frac{dV_x}{dy} v_{fy} = -i\alpha p_1 + \frac{\Delta_1 v_{fx}}{R} + \frac{f}{SR} (v_{px} - v_{fx}) \quad (1.3)$$

$$i\alpha (V_x - c) v_{fy} = -\frac{dp_1}{dy} + \frac{\Delta_1 v_{fy}}{R} + \frac{f}{SR} (v_{py} - v_{fy}) \quad (1.4)$$

$$i\alpha (V_x - c) v_x + \frac{dV_x}{dy} v_{py} = \frac{1}{SR} (v_{jx} - v_{px}) \quad (1.5)$$

$$i\alpha (V_x - c) v_{py} = \frac{1}{SR} (v_{jy} - v_{py}) \quad (1.6)$$

$$i\alpha v_{jx} + \frac{dv_{jy}}{dy} = 0, \quad \Delta_1 = \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \quad (1.7)$$

Система уравнений (1.3) — (1.7) не содержит компоненты скорости основного течения V_x , так что собственное число ω может быть найдено вне зависимости от ее вида. Простые рассуждения показывают, что для рассматриваемой дисперсной жидкости справедлива теорема Сквайра: возмущение, распространяющееся под углом θ к оси течения при числе Рейнольдса R_0 имеет такое же собственное число, что и возмущение, направленное вдоль оси течения при меньшем числе Рейнольдса $R_1 = R_0 \cos \theta$. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда направление распространения возмущений совпадает с осью потока: $V_z = 0$, $V_x(y) = U(y)$.

Уравнения (1.5) и (1.6) алгебраические и могут быть разрешены относительно v_{px} и v_{py}

$$v_{px} = \frac{1}{1 + i\alpha SR (U - c)} \left(v_{jx} - \frac{SR}{1 + i\alpha SR (U - c)} \frac{dU}{dy} v_{jy} \right) \quad (1.8)$$

$$v_{py} = \frac{1}{1 + i\alpha SR (U - c)} v_{jy}$$

Уравнение (1.7) интегрируется введением функции тока несущей среды $\varphi(y) \exp [i(\alpha x - \omega t)]$: $v_{jx} = d\varphi/dy$, $v_{jy} = -i\alpha\varphi$. Подставляя затем полученные решения в уравнения (1.3), (1.4) и исключая обычным способом давление p_1 , сводим систему (1.3) — (1.7) к уравнению

$$(W - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - W''\varphi + \frac{d}{dy} \left(\varphi J \frac{df}{dy} \right) = \frac{1}{i\alpha R} \Delta_1^2 \varphi \quad (1.9)$$

$$W(y) = U + fJ, \quad J = \frac{U - c}{1 + i\alpha SR (U - c)}$$

Если твердые частицы распределены равномерно по пространству ($f = \text{const}$), то уравнение (1.9) переходит в уравнение Орра — Зоммерфельда, полученное в [1]

$$(W - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - W''\varphi = \frac{1}{i\alpha R} \Delta_1^2 \varphi \quad (1.10)$$

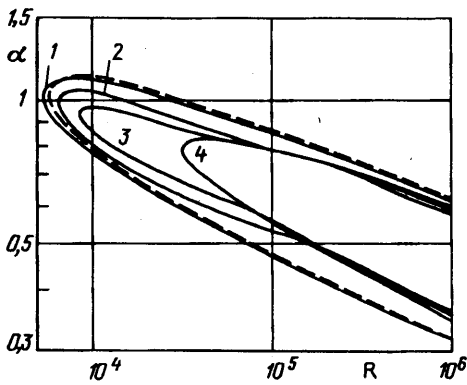
2. Рассмотрим течение двухфазной жидкости в плоском канале, ограниченном двумя твердыми поверхностями при $y = \pm 1$ со стационарным профилем скорости $U(y) = 1 - y^2$. Возмущения функции тока, возникающие в данном течении, удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\varphi'(1) = 0, \quad \varphi(1) = 0 \quad (2.1)$$

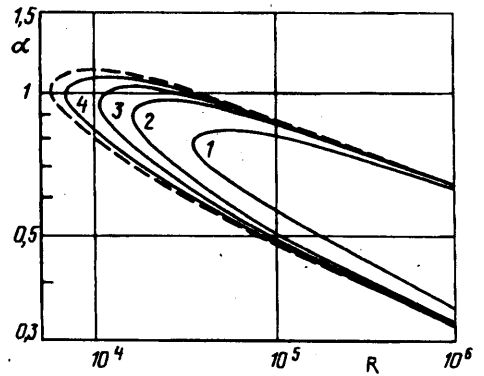
$$\varphi'(-1) = 0, \quad \varphi(-1) = 0 \quad (2.2)$$

Так как задача обладает симметрией относительно плоскости $y = 0$, возможны два разных типа решений: симметричный и антисимметричный. Для течений однородной жидкости возмущения с антисимметричной функцией тока имеют значительно меньшую скорость роста, нежели симметричные [4], а в течении Пуазейля вообще не порождают неустойчивости [5]. Поэтому имеет смысл в первую очередь исследовать именно симметричные решения. В этом случае граничное условие (2.2) заменяется на следующее:

$$\varphi'(0) = 0, \quad \varphi'''(0) = 0 \quad (2.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

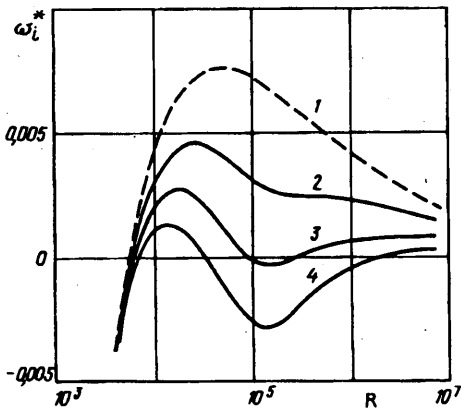
В настоящей работе численно исследовалась устойчивость плоского течения Пуазейля дисперсной жидкости с однородным распределением частиц. Таким образом, в этом случае задача сводится к решению уравнения (1.10) с граничными условиями (2.1), (2.3). Решение соответствующей спектральной задачи проводилось для действительных значений α и ω , что отвечает случаю нейтральных колебаний.

Для решения применялся метод численного интегрирования в комплексной плоскости (u_r, u_i) в обход особой точки $U_0 = c$. Для предотвращения потери точности использовалась процедура ортогонализации (см., например, [5]). Поиск собственных значений задачи осуществлялся с помощью итеративного алгоритма, сводящего к нулю невязку граничных условий. Тестирование схемы производилось на задаче о линейной устойчивости течения Пуазейля чистого газа и показало хорошее согласие результатов с данными [4].

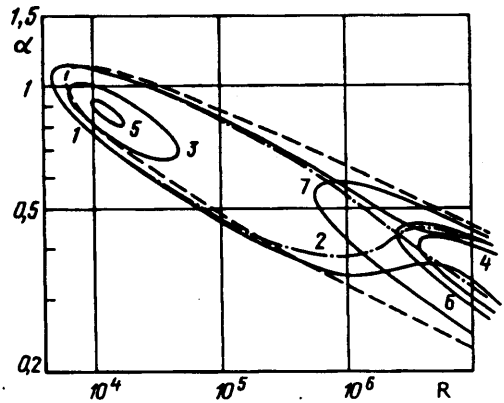
В результате проведенных расчетов получено семейство кривых нейтральной устойчивости для газозвеси, показанное на фиг. 1, 2. Массовая концентрация твердых частиц f для кривых, представленных на этих фигурах, составляет 0,1, а время релаксации S меняется от кривой к кривой. Для сравнения прерывистой линией дана кривая нейтральной устойчивости течения Пуазейля чистого газа.

Кривая 1 на фиг. 1 соответствует случаю мелкодисперсной газозвеси (время релаксации $S = 10^{-7}$). Смещение влево данной кривой относительно кривой устойчивости чистого газа означает дестабилизацию течения, вызванную увеличением эффективной плотности среды. Последовательность кривых 2—4, построенных для значений времени релаксации $S = 2 \cdot 10^{-5}$, $4 \cdot 10^{-5}$ и $8 \cdot 10^{-5}$, показывает, что с увеличением размера частиц (при постоянной массовой концентрации f) устойчивость течения растет. Стабилизация течения объясняется тем, что достаточно крупные частицы инертны. Они «не чувствуют» высокочастотных колебаний потока и, двигаясь со средней скоростью, демпфируют их. При этом видно, что подавление возмущений неодинаково при различных числах Рейнольдса. Так, кривые 2 и 3 имеют отчетливый прогиб при $R \approx 10^5$, означающий локальное более сильное демпфирование возмущений.

При некотором значении времени релаксации устойчивость течения становится максимальной (кривая 1 на фиг. 2, она соответствует времени релаксации $S = 10^{-4}$), а затем постепенно уменьшается вследствие того, что с ростом размера частиц при постоянной массовой концентрации падает их число в единице объема газозвеси. При очень больших временах релаксации силы межфазного взаимодействия становятся пренебрежимо малыми и характеристики устойчивости течения газозвеси стремятся к характеристикам устойчивости чистого газа. Кривые нейтральной устойчивости газозвеси при этом приближаются к нейтральной кривой чистого газа (кривые 2—4 — $S = 8 \cdot 10^{-4}$, $2 \cdot 10^{-3}$, 10^{-2} соответственно).



Фиг. 3



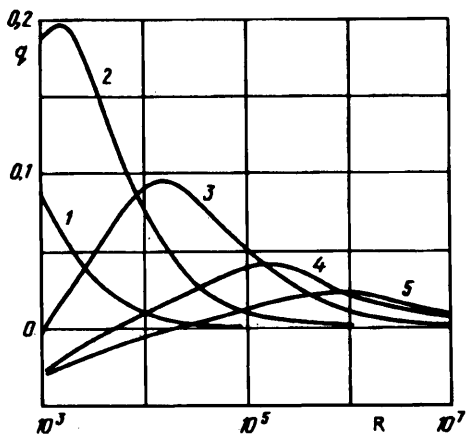
Фиг. 4

Характер устойчивости течений дисперсной жидкости с массовой концентрацией частиц $f < 0,1$ качественно подобен только что описанному.

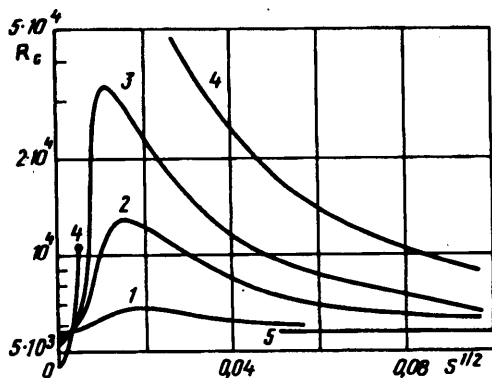
Для каждого фиксированного R можно указать волновое число α^* и частоту ω^* наиболее неустойчивой моды возмущений: $\omega_i^* = \max \omega_i$ (или наименее устойчивой, если $\omega_i < 0$). Здесь $\omega = \omega_r + i\omega_i$, где ω_r — частота возмущения, а ω_i — скорость его нарастания. Совокупность точек $\alpha^*(R)$ образует на плоскости (α, R) линию наиболее быстро растущих возмущений (см., например, [4]). На фиг. 3 показано, как изменяется скорость роста этих возмущений ω_i^* при добавлении в течение твердых частиц определенного размера ($S = 1,5 \cdot 10^{-5}$). Кривая 1 построена для чистого газа, кривые 2—4 — для газозвесей при $f = 0,1, 0,2, 0,3$ соответственно. Видно, что скорость роста возмущений в газозвеси почти везде меньше, причем прогиб кривых 2—4 ($R \sim 10^5$) указывает на существование области наибольшего подавления возмущений. При увеличении концентрации частиц величина прогиба растет и начиная с некоторого значения f возмущения в данной области становятся затухающими: $\omega_i^* < 0$ (кривые 3 и 4).

Описанный эффект можно наблюдать и на фиг. 4, где изображены нейтральные кривые для газозвесей с концентрацией частиц $f = 0,3$. Поведение мелкодисперсной газозвеси качественно остается таким же, как и при $f = 0,1$, поэтому соответствующие кривые опущены. Кривая 1 соответствует газозвеси с $S = 10^{-6}$ и ограничивает единую область неустойчивости течения. При увеличении S до значения $1,56 \cdot 10^{-6}$ происходит «перезамыкание» ветвей нейтральной кривой, как это показывает штрихпунктирная линия 2. Образуются две области нарастающих возмущений: область a , расположенная слева, и b — справа. Дальнейшее увеличение S ведет к «разбеганию» этих областей. Между ними возникает интервал, в котором течение устойчиво к возмущениям с любой длиной волны. Размеры области a при этом быстро уменьшаются (кривые 3 и 4 — $S = 1,5 \cdot 10^{-5}$, 5 и 6 — $S = 2,2 \cdot 10^{-5}$) и при $S \approx 2,4 \cdot 10^{-5}$ она сжимается в точку, соответствующую единственной нейтральной моде возмущений. При больших S и эта мода становится затухающей и область a исчезает. Нейтральная кривая, ограничивающая область неустойчивости b , с ростом S постепенно смещается влево (кривая 7, $S = 8 \cdot 10^{-5}$) и при достаточно больших временах релаксации стремится к нейтральной кривой чистого газа, как это имело место и при $f = 0,1$.

Разница между скоростями нарастания возмущений в чистом газе и в газозвеси $\Delta\omega_i$ характеризует вызванную наличием частиц стабилизацию течения. На фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 6

| S | f = 0,1 | | | f = 0,05 | | |
|----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | R _c | α _c | ω _c | R _c | α _c | ω _c |
| 2 · 10 ⁻⁵ | 6321,2 | 0,9852 | 0,24844 | 6032,9 | 1,0025 | 0,25868 |
| 10 ⁻⁴ | 33340,5 | 0,7830 | 0,12898 | 10202,8 | 0,9216 | 0,20853 |
| 2 · 10 ⁻⁴ | 30186,3 | 0,8019 | 0,13687 | 12857,8 | 0,9012 | 0,19270 |
| 2 · 10 ⁻³ | 10308,2 | 0,9487 | 0,21828 | 7986,5 | 0,9797 | 0,23952 |
| 10 ⁻² | 6768,3 | 1,0012 | 0,25480 | 6271,0 | 1,0105 | 0,26174 |

видно, что $\Delta\omega$ меняется почти линейно с f . Отклонение от линейной зависимости составляет около 15% при $0 < f < 0,3$ и меньше 4% при $f < 0,1$. Поэтому имеет смысл ввести отношение $q = \Delta\omega/f$ при малых значениях f . На фиг. 5 показано семейство линий $q(R)$, рассчитанных вдоль линии наиболее неустойчивых возмущений. Кривые 1—5 соответствуют следующим временам релаксации: $S = 10^{-2}$, 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} , 10^{-6} . Кривые имеют максимум при таком числе Рейнольдса, когда демпфирование возмущений наиболее эффективно. С уменьшением S этот максимум смещается вправо и уменьшается, вдоль линии максимумов $SR \sim 1,6$.

Важной характеристикой устойчивости служит критическое число Рейнольдса R_c , соответствующее скорости течения, при которой оно теряет устойчивость. На фиг. 6 приведена зависимость $R_c(S)$. Кривые 1—3 построены для концентраций $f = 0,01$, $0,05$, $0,1$ соответственно. Линия 5 обозначает критическое число Рейнольдса для чистого газа $R_0 \approx 5772$. Максимум кривой 3 соответствует $R_c \approx 33500$, что намного превосходит R_0 . Кривая 4 построена для массовой концентрации частиц $f = 0,3$ и имеет несколько отличный вид, что связано с изменением топологии области неустойчивости. Данная кривая имеет разрыв при $S \approx 2,4 \cdot 10^{-5}$, когда исчезает область a и критическое число Рейнольдса скачком возрастает до $\sim 2 \cdot 10^6$.

В заключение в таблице приведены рассчитанные значения R_c для некоторых типичных f и S . Параметры α_c и ω_c обозначают волновое число и частоту соответствующего (нейтрального) возмущения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saffman P. G.* On the stability of laminar flow of a dusty gas // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 13. № 1. P. 120—128.
2. *Michael D. H.* The stability of plane Poiseuille flow of a dusty gas // *J. Fluid Mech.* 1964. V. 18. № 1. P. 19—32.
3. *Нармуратов Ч. Б., Соловьев А. С.* О влиянии взвешенных частиц на устойчивость плоского течения Пуазейля // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1986. № 1. С. 46—53.
4. *Orszag S. A.* Accurate solution of the Orr — Sommerfeld stability equation // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 50. № 4. P. 689—703.
5. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
21.IV.1994