

УДК 532.525.2.013.2

© 1995 г. А. В. КУЗНЕЦОВ

ЭФФЕКТ НЕЛИНЕЙНОСТИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ СТРУЙНОГО ОБТЕКАНИЯ ПРЕПЯТСТВИЯ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Задача исследуется в приближении теории малых возмущений. Показано, что нелинейность динамического граничного условия, связанная с учетом инерционных составляющих силы давления, является причиной возникновения разрывов скорости жидкости и, как следствие, бесконечнолистных спиральных завитков на свободных границах. Определяются момент возникновения и закон распространения разрыва. Для расчета гидродинамических сил могут быть использованы формулы, полученные на основе линейного приближения.

Для исследования неустановившихся слабо возмущенных течений со свободными границами разработаны эффективные методы, основанные на линеаризации и сносе граничных условий на границы стационарного течения [1]. Расчеты гидродинамических сил, действующих на колеблющиеся препятствия при струйном обтекании, выполненные разными методами, согласуются между собой и удовлетворительно во многих случаях соответствуют опытным данным.

В нелинейной постановке задачи оказываются трудными и имеется лишь небольшое число работ, в которых аналитические решения доведены до конца.

Определенные надежды связаны с применением численных методов. Однако и на этом пути встречаются непреодоленные до конца трудности, вызываемые разрушением первоначально гладких свободных границ.

Это явление обусловлено не спецификой и погрешностями методов, как первоначально представлялось, а самим процессом развития нелинейных течений. Так, сравнительно недавно было доказано [2, 3], что классическая задача Коши — Пуассона о гравитационных волнах разрешима в классе аналитических поверхностей лишь для конечных отрезков времени.

В [4] рассмотрена нелинейная задача о распространении малого возмущения скорости на границе невесомой жидкости.

Физическая задача интерпретируется так. По поверхности жидкости глассирует криволинейная пластина. В некоторый момент она мгновенно убирается. Далее рассматривается последующее развитие течения. Для одного частного случая начального возмущения построено решение, из которого следует, что скорость жидкости в некоторой точке на границе терпит разрыв, а сама граница в этой точке образует спиральный завиток типа двойного спирального «вихря» на конце каверны в кавитационной схеме Тулина [5].

В настоящей статье дано решение задачи о малых колебаниях препятствия, обтекаемого с отрывом струй, с нелинейным динамическим условием на границах струй, аналогичным использованному в [4]. Препятствие обтекается безграничным поступательным потоком с постоянной скоростью V_∞ на бесконечности. Вектор смещения точек контура L препятствия считаем известным в функции его дуговой абсциссы s и времени t .

Неустановившееся течение, так же как и установившееся, является потенциальным. Введем потенциал течения $w = \varphi + i\psi$ и функцию Жуковского

$\chi = \ln(V/V_\infty) - i\theta$, где V, θ — модуль и аргумент вектора скорости в физической плоскости переменного $z = x + iy$. Задачу неустановившегося течения будем решать в приближении теории малых возмущений. Параметры установившегося течения будем отмечать там, где это необходимо, индексом ноль внизу.

Положим, следуя Вудсу [6]

$$w(u, t) = w_0(u), \quad \chi(u, t) = \chi_0(u) + \omega(u, t), \quad u = u_0, \quad u_0 = u_1 + iu_2$$

где u_0 — параметрическое переменное в верхней полуплоскости. Контур L соответствуют точки действительной оси $u_1 \in (-1, 1)$, а свободным границам Γ — остальная часть этой оси. Функции $w_0(u)$ и $\chi_0(u)$ считаем известными. Для симметричного течения $w_0 = Qu^2$, где Q — действительная постоянная.

Таким образом, задача сводится к определению функции $\omega(u, t) = \mu - iv$, $\mu = \ln(V/V_0)$, $v = \theta - \theta_0$. Представим ее формулой, дающей решение смешанной краевой задачи по значениям $\text{Im } \omega$ при $u = u_1 \in (-1, 1)$ и $\text{Re } \omega$ при $u = u_2 \in (-\infty, -1; 1, \infty)$ в классе функций, ограниченных при $u_1 = \pm 1$. Для уменьшения числа неизвестных параметров ограничимся задачей симметричного нестационарного обтекания.

В этом случае

$$\omega(u, t) = \frac{2\sqrt{u^2 - 1}}{\pi i} \left[\int_1^\infty \frac{\xi \mu(\xi, t) d\xi}{(\xi^2 - u^2)\sqrt{\xi^2 - 1}} - \int_0^1 \frac{\xi v(\xi, t) d\xi}{(\xi^2 - u^2)\sqrt{1 - \xi^2}} \right] \quad (1)$$

Функция v в этой формуле известна. Она определяется заданным вектором деформации контура L [7].

Функция μ должна удовлетворять двум уравнениям.

Первое уравнение

$$\int_1^\infty \frac{\xi \mu(\xi, t) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = \int_0^1 \frac{\xi v(\xi, t) d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2)$$

обеспечивает обращение в нуль коэффициента при u^{-1} в разложении $\omega(u, t)$ в окрестности $u = \infty$. Необходимость этого условия следует из теоремы Кельвина о сохранении циркуляции. В рассматриваемом течении не должно быть дополнительного, обусловленного нестационарностью вихря на бесконечности.

Выполнение этого условия обеспечивает также ограниченность возмущений свободных границ на бесконечности в любой конечный момент времени.

Второе уравнение выражает динамическое условие на Γ . Используя интегралы Коши — Лагранжа и Эйлера соответственно для неустановившегося и установившегося течений, можем записать

$$p - p_0 = \frac{\rho}{2} V_0^2 \left[1 - \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 \right] \mp \rho \frac{\partial}{\partial t} \int V ds + C(t)$$

$$\pm V ds = \pm V_0 e^{\mu} ds = e^{\mu} d\varphi_0$$

Здесь p — давление, ρ — плотность жидкости, $\partial/\partial t$ — производная в фиксированной точке z , $V/V_0 = \exp \mu$, знаки « \mp » соответствуют значениям $s > s_0$ и $s < s_0$, где s_0 — значение s в точке разветвления потока, $C(t)$ — произвольная функция времени. Применим это уравнение к точкам свободной границы, на которой давление постоянно и $V_0 = V_\infty$. Дифференцируя обе части уравнения по φ_0 , получим

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + V_\infty^2 e^{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi_0} = 0 \quad (3)$$

Уравнение становится линейным и описывает стационарную волну $\mu = \mu(V_{\infty}^2 t - \varphi_0)$, если заменить в нем e^{μ} на 1. Линейное уравнение используется в методе Вудса.

При учете растяжения границ Γ и поправок, обязанных переносу условия на границу Γ_0 , в (3) появятся дополнительные члены [7], наименьший порядок величин из которых, сравнимый с порядком величин слагаемых в (3), имеет $V_{\infty}^2 e^{\mu} (\partial(x\eta)/\partial\varphi_0)$, где x — кривизна Γ_0 , η — отклонение по нормали границы Γ от Γ_0 . Так как последняя заранее неизвестна, необходимо привлекать кинематическое условие.

Уравнение (3) с учетом указанного члена аналогично граничному условию в теории гравитационных волн, но является более сложным, так как роль ускорения силы тяжести играет в нем переменная кривизна $\kappa(\varphi_0)$.

Но это свойство может служить основанием использовать упрощенное граничное условие в виде (3). Действительно, при струйном обтекании препятствия кривизна границ Γ_0 быстро убывает при удалении вниз по потоку и обращается в нуль на бесконечности. Поэтому дополнительное слагаемое в точках, достаточно удаленных от препятствия, будет по порядку величины меньше членов уравнения (3). Физически это означает, что на свободных границах не будут возникать колебания типа гравитационных волн. С другой стороны, как будет видно далее, нелинейность второго слагаемого в (3) может оказать существенное влияние на геометрию границ Γ лишь на некотором, обусловленном условиями задачи удалении от точек отрыва, т. е. там, где влияние кривизны Γ_0 незначительно.

В безразмерных переменных $s = \varphi_0/Q - 1$, $\tau = V_{\infty}^2 t/Q$ уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + e^{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial s} = 0 \quad (4)$$

Общее решение (4) представляет собой бегущую волну

$$\mu(s, \tau) = f(\sigma) U(\sigma), \quad \sigma = \tau - s \exp(-\mu) \quad (5)$$

где σ — фаза волны, $U(\sigma)$ — единичная функция. Функция $f(\sigma)$ является граничным значением $\mu(s, \tau)$, т. е. получается из $\mu(0, \tau)$ заменой τ на σ .

Преобразуем (2), используя (5) и обозначение

$$\lambda(\tau) = 2 \int_0^1 \frac{\xi v(\xi, \tau) d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (6)$$

Учитывая, что $s = \xi^2 - 1$ при $\xi > 1$, получим нелинейное уравнение

$$\int_0^{\tau} \frac{f(\sigma)}{\sqrt{\tau - \sigma}} d\sigma = \lambda(\tau) + F(\tau) \quad (7)$$

$$F(\tau) = \int_0^{\tau} f \left[1 - e^{\mu/2} - (\tau - \sigma) e^{-\mu/2} \frac{df}{d\sigma} \right] \frac{d\tau}{\tau - \sigma}$$

При малых $|\mu(0, \tau)| \sim |\mu_{\tau}(0, \tau)| \sim |\lambda(\tau)|$ функция $F(\tau)$ будет малой величиной не ниже второго порядка. Отбросив это слагаемое, получим интегральное уравнение Абеля, из которого найдем $f(\tau)$.

Нелинейное уравнение (7) можно решить методом итераций, рассматривая его как интегральное уравнение с известной правой частью, в которой на n -м шаге итерации $F^{(n)}(\tau) = F(f^{(n-1)}(\tau))$.

Для определения $\mu(s, \tau)$ остается решить нелинейное уравнение (5). Обсудим особенности решения. Характеристиками уравнения (5) служат прямые, на которых $\mu(s, \tau) = \mu(0, \tau) = \text{const}$. Если на некотором интервале τ $\mu_s(0, \tau) > 0$, то характеристики, несущие на себе разные значения μ , будут пересекаться в некоторой точке (s, τ) . Так как физически недопустимо, чтобы μ принимала разные значения в данной точке и была непрерывна, следует принять существование «слабого» решения с разрывом. Такие разрывы в газовой динамике представляют собой слабые ударные волны. Их существование связано с нелинейным уравнением Римана $u_t + uu_x = 0$. Оно является частным случаем уравнений Бюргерса и Кортевега де Фриза, которые встречаются при моделировании различных нелинейных процессов и интенсивно исследовались. Воспользуемся некоторыми результатами [8, 9]. Заметим, что простой заменой неизвестной (4) приводится к уравнению Римана.

Положение скачка функции $\mu(s, \tau)$ можно определить из уравнения

$$\int_0^{\infty} e^{\mu(s, \tau)} d\tau = \int_0^{\infty} e^{\mu(0, \tau)} d\tau = M \quad (8)$$

которое имеет место при $\mu(s, \infty) \neq \mu(s, 0) = 0$. Оно представляет собой закон сохранения, вытекающий из уравнения (4), записанного в дивергентной форме $\mu_\tau + (\exp \mu)_s = 0$. Действительно, интегрируя его по τ при указанных условиях, получим (8).

Заметим, что

$$\mu(s, \infty) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} f(\sigma) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mu(0, \tau), \quad \mu(s, 0) = \mu(0, 0)$$

Момент возникновения скачка может быть найден также из условия обращения в бесконечность производной

$$\mu_s = e^{-f'} (1 - se^{-f'})^{-1}$$

Так как $\sigma = \tau$ при $s = 0$, то это соотношение выражает наклон профиля μ в точке (s, τ) через наклон профиля при $s = 0$. Поэтому если $f' > 0$, то момент возникновения скачка τ_* и его положение s_* определяются из условия $s_* = ((\exp f)/f')_{\min}$ [9].

В точке $s = S(\tau)$ разрыва функции $\mu(s, \tau)$ сопряженная ей функция $v(s, \tau)$ имеет логарифмическую особенность

$$v(s, \tau) \sim -\frac{\Delta\mu}{\pi} \ln |s - S(\tau)|$$

где $\Delta\mu$ — скачок μ . Это означает, что свободная граница жидкости в этой точке образует бесконечный спиральный завиток.

Геометрические элементы течения находятся из уравнения

$$z(u, \tau) = \int_a^u \frac{dz_0}{du} e^{-\omega(u, \tau)} du + z(a, \tau)$$

Дальнейшие детали решения рассмотрим на примере. Зададим профиль волны $\mu(0, \tau)$ уравнением

$$f(\tau) = k \{ \tau [U(\tau) - U(\tau - a)] + a [U(\tau - a) - U(\tau - b)] + (a + b - \tau) \times [U(\tau - b) - U(\tau - b - a)] \}, \quad 0 \leq \tau < \infty \quad (9)$$

в котором k, a, b — положительные постоянные, причем k — малая величина.

Тогда, как видно из (5), $\mu(s, \tau)$ будет малой величиной того же порядка. Заменяя в уравнении (5) $\exp(-\mu)$ на $1 - \mu$, получим его приближенное решение в виде

$$\mu(s, \tau) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(s, \tau) [U(s - s_{i+1}) - U(s - s_i)] \quad (10)$$

$$\mu_1 = \frac{k(\tau - s)}{1 - ks}, \quad \mu_2 = ka, \quad \mu_3 = \frac{k(a + b + \tau - s)}{1 + ks}$$

$$s_1 = \tau, \quad s_2 = \frac{\tau - a}{1 - ka}, \quad s_3 = \frac{\tau - b}{1 - ka}, \quad s_4 = \tau - b - a$$

Однозначность μ нарушается в момент $\tau = \tau_* = 1/k$, когда s_2 становится равной s_1 , т. е. при $s_* = 1/k$. Производная μ_1 при подходе к $s = s_*$ обращается в $\pm \infty$, следовательно, точка (s_*, τ_*) — начальное положение скачка однозначной функции $\mu_*(s, \tau)$, которая должна быть взята вместо (10) в качестве физически приемлемого решения.

Положение скачка в последующие моменты времени найдем из (8), которое с учетом приближения $\exp \mu = 1 + \mu$ запишем в виде

$$\int_0^{\infty} \mu(s, \tau) d\tau = \int_0^{\infty} \mu(0, \tau) d\tau = M$$

Рассмотрим отдельно интервалы времени $\tau \in (\tau_*, \tau_{**})$, где $\tau_{**} = (2b - a)/ka + a - b$ — момент времени, когда $s_2 = s_3$ и $\tau > \tau_{**}$. Для первого интервала положение скачка $s = S_1(\tau)$ должно удовлетворять условию $S \in (s_3, s_2)$. Поэтому оно находится из уравнения

$$\int_{\tau}^{b+(1-ka)s} \mu_2(s, \tau) d\tau + \int_{b+(1-ka)s}^{b+as} \mu_3(s, \tau) d\tau = kab$$

Отсюда $S_1 = (\tau - a/2)(1 - ka/2)^{-1}$. Для второго интервала положение скачка $s = S_2(\tau)$ удовлетворяет условию $S_2 \leq s_3$ и находится из уравнения

$$\int_{\tau}^{s+b+a} \mu_3(s, \tau) d\tau = kab$$

Отсюда

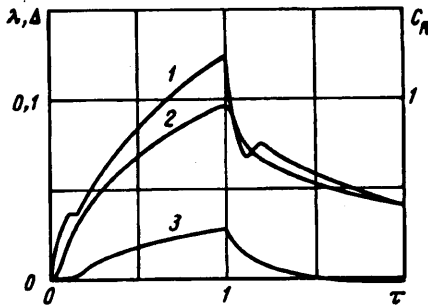
$$S_2 = \tau - a - b + kab + \sqrt{(kab)^2 + 2ab[1 - k(a + b - \tau)]}$$

Таким образом, в качестве однозначного решения нужно взять

$$\mu_*(s, \tau) =$$

$$= \begin{cases} \mu(s, \tau), & 0 < \tau < \tau_* \\ \mu_3(s, \tau) [U(s - s_4) - U(s - s_3)] + \mu_2(s, \tau) [U(s - s_3) - U(s - S_1)], & \tau_* < \tau < \tau_{**} \\ \mu_3(s, \tau) [U(s - s_4) - U(s - S_2)], & \tau > \tau_{**} \end{cases} \quad (11)$$

При $\tau \rightarrow \infty$ профиль волны в переменных μ_* , $T = a + b + s - \tau$ принимает форму треугольника $\mu_* = T/s$ со скачком в передней части профиля $\Delta = \sqrt{2kab/\tau}$ и длиной волны $l \sim \sqrt{2kab\tau}$, так что площадь треугольника равна $M = kab$. Этот результат находится в соответствии с асимптотическими свойствами решения уравнения Бюргерса [8].



Заданному профилю $\mu(0, \tau)$ отвечает, согласно уравнению (7) при $F(\tau) = 0$, функция $\lambda(\tau) = \lambda_0(\tau)$

$$\lambda_0(\tau) = \frac{4}{3} k \cdot [\tau^{3/2} U(\tau) - (\tau - a)^{3/2} U(\tau - a) - (\tau - b)^{3/2} U(\tau - b) + (\tau - a - b)^{3/2} U(\tau - a - b)], \quad 0 \leq \tau < \infty$$

С учетом $F(\tau)$ $\lambda = \lambda_0(\tau) + \Delta\lambda(\tau)$, причем с точностью $o(ka/2)$

$$\Delta\lambda(\tau) = -\frac{1}{4} \int_0^\tau \frac{\mu^2(0, \sigma)}{\sqrt{\tau - \sigma}} d\sigma - \frac{\mu^2(0, 0)}{2} \sqrt{\tau}$$

Рассмотрим течение, вызванное поступательным перемещением пластины, нормальной к скорости натекающего потока. Если считать нормальную составляющую скорости жидкости на пластине равной скорости $v(\tau)$ перемещения самой пластины, то на ней $v(s, \tau) = v(\tau)/V_0(s)$. Такое приближение допустимо, если смещение пластины достаточно мало, так что можно пренебречь приращением нормальной составляющей скорости жидкости на пластине, вызванным ее смещением в неоднородном стационарном потоке. Тогда из (6) получим

$$V_\infty \lambda(\tau) = (\pi + 2) v(\tau)$$

Функция $\lambda(\tau)$ и ее производная непрерывны на всем интервале изменения τ . Отсюда можно заключить, что образование разрывов функции μ и, как следствие, спиральных завитков на свободных границах происходит в отсутствие каких-либо особенностей во внешних условиях.

Единственным условием является положительность наклона профиля возмущенной скорости в точках схода струй с препятствия.

Разрыв, раз возникнув, не может так же внезапно исчезнуть, а перемещается вниз по потоку и затухает с ростом времени. Ситуация здесь сходна с явлением самопроизвольного возникновения ударной волны в звуковой волне в газе [10]. Адекватность явлений объясняется тем, что используемое здесь динамическое условие и одномерная звуковая волна описываются по сути одним и тем же нелинейным уравнением Римана.

Для вычисления сопротивления R воспользуемся формулами, полученными в [6]. На фигуре приведены графики коэффициента $C_R = 8(R - R_0)/[\pi(4 + \pi) \cdot \rho V_\infty^2 l k]$ для линейного динамического условия, где $2l$ — ширина пластины (кривая 1) графики величины $\Delta = 10(C_{R*} - C_R)$, где C_{R*} рассчитано по значениям μ_* из (11) (кривая 3), и функции $\lambda(\tau)$ (кривая 2) при $a = 0,1$, $b = 1$, $k = 0,5$.

Как видно, различие между C_R и C_{R*} не превышает величины $o((ka)^2)$, т. е. оказывается на порядок выше точности, принятой при выводе расчетной формулы для распределения нестационарного давления на пластине.

Немонотонность изменения C_R в окрестности $\tau = a$, так же как и резкое изменение этой величины в окрестности $\tau = b$, объясняется нарушением аналитичности функции $\lambda(\tau)$ в этих точках.

Расчеты выполнены Н. В. Сержантовой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
2. Налимов В. И., Пухначев В. В. Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1975. 173 с.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
4. Басин М. А., Завадовский Н. Ю. Модель двойного спирального вихря как предельная форма свободной поверхности нестационарного течения идеальной несжимаемой жидкости//Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. Вып. 22. С. 48—53.
5. Tulin M. P. Supercavitating flows—small—perturbation theory//Приложения теории функций в механике сплошной среды: Тр. Междунар. симпоз., Тбилиси, 1963. М.: Наука, 1965. Т. 2. С. 403—439.
6. Woods L. C. Unsteady plane flow past curved obstacles with infinite wakes//Proc. Roy. Soc. Ser. A., 1955. V. 229. № 1177. P. 152—180.
7. Кузнецов А. В. Нестационарные возмущения течений жидкости со свободными границами. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. 144 с.
8. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
9. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир, 1983, 136 с.
10. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.

Казань

Поступила в редакцию
13.XII.1993