МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1995

УДК 532.525.013.3:537.84

© 1995 г. К. В. БРУШЛИНСКИЙ, Т. А. РАТНИКОВА

ЭФФЕКТ ХОЛЛА В МГД-МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ В КАНАЛАХ

В расчетах осесимметричного течения плазмы в коаксиальном канале с собственным азимутальным магнитным полем, проведенных в МГД-модели с учетом эффекта Холла, получен стационарный режим течения с квазирадиальным электрическим током и неэквипотенциальными границами. В канале современного квазистационарного сильноточного плазменного ускорителя найденный режим описывает течение в ядре потока вне тонких приэлектродных слоев. Даны оценки холловских поправок, относящихся к этим слоям.

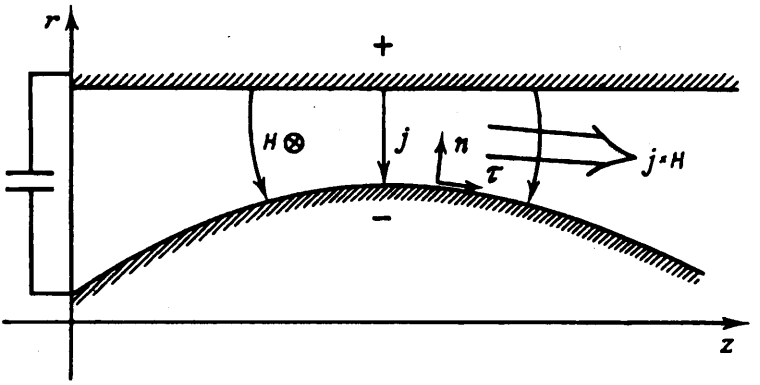
Теория, математическое моделирование и расчет течений плотной горячей плазмы в каналах типа сопла [1—4] играют существенную роль в разработке современного варианта квазистационарного сильноточного плазменного ускорителя [5—9].

На фиг. 1 представлена схема ускорителя, геометрия которого соответствует существующим установкам [7, 8]. Канал образован двумя коаксиальными электродами, ток между которыми создает азимутальное магнитное поле и, взаимодействуя с ним, ускоряет плазму в направлении оси Z. Течение плазмы в канале можно считать осесимметричным и стационарным, так как время разряда на 1—2 порядка превосходит пролетное время системы.

Свойства течений исследованы главным образом в приближении магнитной газодинамики. Некоторые общие положения и оценки, лежащие в основе теории магнитоплазменного сопла Лаваля [1, 2, 10], получены аналитически (или в квадратурах) с помощью приближенных моделей — квазиодномерной или «плавного канала». Значительная же часть результатов, содержащих, в частности, и количественные закономерности, зависимость от параметров, анализ картины течения в целом, получены в процессе численного решения двумерных уравнений МГД в области (r, z), соответствующей сечению канала плоскостью $\varphi = \text{const}$ (фиг. 1) [2, 4, 9]. Постановка задачи предполагает обычно непроницаемые эквипотенциальные электроды, т. е. обращение в нуль нормальной скорости и касательного электрического поля $v_n = 0$, $E_\tau = 0$. На входе в канал ($z = 0$) заданы плотность (или массовый расход) и давление втекающей плазмы, а также напряженность магнитного поля, соответствующая постоянной величине полного электрического тока J через систему.

Решение задачи о стационарном течении плазмы обычно находится методом установления.

Задача в такой постановке хорошо описывает течение в так называемом ядре потока [9] и в то же время не может служить моделью процессов в узких приэлектродных слоях. Более того, уравнения МГД не способны различить полярность электродов, так как они не меняются при одновременном изменении знаков магнитного поля $\mathbf{H}$ и тока $\mathbf{j}$ [1]. На этом основании часть исследований течения плазмы в канале опирается на более полную математическую модель, которая учитывает эффект Холла и по этой причине иногда называется холловской магнитной газодинамикой. Ее теоретические основы изложены в монографии [11] (см. также [3, 12]), постановка задачи о течениях плазмы с учетом эффекта Холла и первые результаты расчетов — в обзоре [2].



Фиг. 1

В расчетах хорошо видно, как ток отклоняется от радиального направления и по мере возрастания параметра обмена ξ, количественно характеризующего эффект Холла, стремится к скольжению вдоль электродов. В случаях, когда параметр ξ играет более заметную роль, чем магнитная вязкость $\nu = 1/\mathrm{R}e_m$, течения вообще не устанавливаются, в расчетах наблюдается неустойчивость взрывного характера вблизи анода («анодные взрывы») [2]. В связи с этим результатом показано, что система двумерных МГД-уравнений с эффектом Холла в поперечном магнитном поле в случае бесконечной проводимости ($\xi \neq 0$, $\nu = 0$) при некоторых условиях может быть неэволюционной [2]. В работе [4] исследована роль граничных условий на электродах в формировании свойств течений: если вместо традиционного требования $v_n = 0$ разрешить плазме протекать сквозь электроды, то, управляя этим протеканием, можно влиять на направление электрического тока в канале. Расчеты показали, что дополнительное втекание плазмы через анод и вытекание через катод оказывает действие, противоположное эффекту Холла, и потому в некоторых пределах может поддерживать квазирадиальное направление тока в холловских течениях. Этот результат лежит в основе концепции переноса электрического тока в канале ионами [1, 3].

Вопросы, оставшиеся открытыми после указанных работ и интересующие авторов в настоящее время, относятся к двум направлениям исследований: дальнейшие вариации и анализ граничных условий на электродах и соотношение классической и холловской МГД-моделей течения плазмы в канале и его отдельных частях. Следующим за этими исследованиями вопросом или, точнее, перекликающимся с ними является тщательное моделирование тонких приэлектродных слоев, в котором возможны выходы за пределы гидродинамики или квазинейтральности. Отдельные работы на эту тему уже делались [13, 14].

В настоящей работе изложена МГД-модель плазмы с учетом эффекта Холла в применении к осесимметричным течениям в поперечном собственном магнитном поле в коаксиальном канале. В отличие от [4] в граничных условиях сохранена непроницаемость, а вместо эквипотенциальности требуется ортогональное распределение тока на стенках: $j_\tau = 0$. При этом подходе удается рассчитать стационарные течения с квазирадиальным током при конечных значениях параметра обмена ξ и большой и даже бесконечной проводимости, однако боковые стенки канала при этом неэквипотенциальны. Такая модель имеет смысл при исследовании течений в каналах с секционированными электродами [3, 12], а в применении к современным плазменным ускорителям [5—9] описывает основную часть («ядро») потока плазмы в канале вне узких приэлектродных слоев. Указано расположение ядра потока относительно электродов и найдены поправки к основным интегральным характеристикам плазменного потока. Результаты расчетов и их сопоставление с экспериментами [7, 8] подтверждают вывод о том, что в

современном ускорителе холловские поправки малы и служат лишь для уточнения картины, полученной в традиционных МГД-расчетах.

1. МГД с учетом эффекта Холла. Рассматриваемая модель плазмы основана на модифицированных МГД-уравнениях [2, 4, 6], которые в безразмерной форме имеют вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{H}$$

$$\rho \frac{de}{dt} + p\nabla \mathbf{v} = \nu j^2 + \frac{\xi}{2} e(\mathbf{j}, \nabla S) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \nabla \times (\nu \mathbf{j}) - \nabla \times \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{H} - \nabla p_e}{\rho}$$

$$p = (\gamma - 1)\rho e = \frac{\beta}{2}\rho T = \frac{\beta}{2}\rho^{\gamma} e^{S}; \; p_e = \frac{p}{2}; \; \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H}; \; \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)$$

$$\beta_0 = \frac{8\pi p_0}{H_0^2}, \quad \xi = \frac{c}{er_0}\frac{m_i}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad \nu = \frac{c^2}{4\pi\sigma r_0 v_{A0}} = \nu_0 T^{-3/2}, \; v_{A0}^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}$$

Единицы измерения составлены из заданных на входе характерных значений плотности $\rho_0 = m_i n_0$, температуры T_0, магнитного поля $H_0 = 2J/cr_0$ и среднего значения радиуса входного сечения канала r_0. Здесь J — полный разрядный ток.

Уравнения (1.1) содержат безразмерные параметры β — отношение газового давления на входе к магнитному и ξ, который количественно характеризует роль эффекта Холла в рассматриваемой модели. Он назван параметром обмена [2] локальным или модифицированным по аналогии с интегральным параметром обмена ξ_{tot} — отношением разрядного тока J к массовому расходу $J_{\dot{M}}$, выраженному в токовых единицах [1, 3]. Связь между ними, а также с известным безразмерным параметром $\omega_e\tau_e$ [11, 12, 2] устанавливается формулами

$$\xi_{tot} = \frac{2\pi\xi}{\dot{M}}, \quad \dot{M} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho v_z r dr, \quad \omega_e\tau_e = \frac{\xi}{\nu}\frac{H}{\rho} \tag{1.2}$$

где $\dot{M}$ — безразмерный массовый расход, а интеграл берется по отрезку $r_1 \le r \le r_2$ между электродами. В модели участвует также конечная проводимость σ, а ее количественной характеристикой в уравнениях (1.1) является безразмерный коэффициент магнитной вязкости $\nu = 1/\mathrm{R}e_m$.

Отличие холловской МГД-модели от классической — в третьем и четвертом уравнениях (1.1). Уравнение энергии получено сложением соответствующих уравнений для ионов и электронов в предположении равенства их температур $T_i \equiv T_e \equiv T$. Уравнение магнитной индукции следует из уравнения Максвелла $\partial \mathbf{H}/\partial t + \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0$ и обобщенного закона Ома

$$\nu \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H} + \frac{\xi}{\rho}(\nabla p - \mathbf{j} \times \mathbf{H}) \tag{1.3}$$

Последний представляет собой уравнение движения электронной компоненты плазмы, если пренебречь в нем массой электрона $m_e \approx 0$.

В двумерных задачах об осесимметричном течении плазмы в собственном поперечном магнитном поле имеем (в цилиндрических координатах z, r и φ)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad v_\varphi \equiv 0, \quad H_z \equiv H_r \equiv 0, \quad j_\varphi \equiv 0$$

и система (1.1) содержит пять уравнений с пятью неизвестными функциями. Уравнение индукции — скалярное, а холловское слагаемое в нем — вырожденное,

т. е. представляет собой нелинейную комбинацию первых (а не вторых в общем случае) производных

$$\nabla \times \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{H} - \nabla p_e}{\rho} = \frac{\partial (Hr)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{H}{\rho r} \right) - \frac{\partial (Hr)}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H}{\rho r} \right) - \frac{1}{\rho^2} \left\{ \frac{\partial p_e}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\partial p_e}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\}$$

Вследствие этого система уравнений (1.1) при $\nu \neq 0$ — квазилинейная, параболически вырожденная, а при $\nu \equiv 0$ — существенно нелинейная, и в этом ее специфика.

2. Постановка задачи о расчете. Задача о расчете течений состоит в решении уравнений (1.1) в области переменных (z, r) — сечении канала (фиг. 1). Начальные условия выбираются достаточно произвольно, поскольку основная цель — установившиеся течения, лишь бы они обеспечивали разгон плазмы в направлении оси z. Граничные условия зависят от учета конечной проводимости σ и от конкретных вариантов постановки задачи.

При $\sigma \neq \infty$ $(\nu \neq 0)$ уравнение индукции требует граничного условия для магнитного поля H на всей границе расчетной области. Остальные условия относятся к гидродинамике и их число на каждой границе равно числу направленных внутрь области характеристических скоростей v_n (двукратная характеристика) и $v_n \pm C_T$, где C_T — газодинамическая скорость звука $(C_T^2 = \gamma p/\rho)$.

В случае бесконечной проводимости $(\nu \equiv 0)$ система (1.1) нелинейных уравнений первого порядка может быть неэволюционной, если p и H функционально независимы, а параметр ξ превосходит некоторые пределы, указанные самим решением [2]. В тех случаях, когда система эволюционна, она после линеаризации гиперболична и число граничных условий опять диктуется «входящими» характеристиками. При малых значениях параметра ξ они действительны и мало отличаются от характеристик классической МГД. Для любой границы области имеем пять характеристических скоростей в направлении по нормали к границе: возмущенные эффектом Холла скорости быстрого магнитного звука $\lambda_{1,2} = v_n \pm C_m + \delta_{1,2}$, где $C_m^2 = C_T^2 + C_A^2 = \gamma p/\rho + H^2/\rho$, а $\delta_{1,2}$ — холловские поправки; две скорости мало отличающиеся от скорости плазмы $\lambda_{3,4} = v_n + \delta_{3,4}$ соответствуют переносу энтропии и магнитного поля (вмороженность); пятая скорость $\lambda_5 = v_n$ соответствует переносу тангенциальной скорости v_τ и не возмущается эффектом Холла. Поскольку в рассматриваемой модели электронная энтропия и магнитное поле (с точностью до термоЭДС $\xi \nabla p_e/\rho$ в обобщенном законе Ома) вморожены в электронную компоненту плазмы [1], то отклонение характеристик δ_3 и δ_4 происходит от ионных траекторий в сторону электронных.

В обсуждаемых ниже расчетах трансзвукового течения плазмы в канале соплообразной формы граничные условия имеют следующий вид.

На входе в канал $(z = 0)$ заданы [2, 4, 9] плотность, давление и магнитное поле, а также направление: $\rho = 1$, $T = 1$, $H = 1/r$, $v_r/v_z = r_z$, где r_z — наклон координатной линии, соответствующий форме канала. Эти условия предполагают дозвуковое втекание и справедливы как при конечной, так и бесконечной проводимости.

На выходе из канала $(z = z_1)$ течение предполагается сверхзвуковым, гидродинамических граничных условий нет, а для магнитного поля при $\nu \neq 0$ задано условие типа $\partial H/\partial z = 0$, которое оказывает мало влияния на распределение тока в канале и потому исчезает при $\nu \to 0$. Подчеркнем, что эта «вольность» допустима в рассматриваемой задаче потому, что проводимость плазмы в ускорителях достаточно высока и $\nu \ll 1$.

Граничные условия на боковых стенках канала $r = r_1(z)$ и $r = r_2(z)$ — наиболее существенный элемент исследования холловских течений. Авторы работ [2, 4] исходили из того, что стенки являются эквипотенциальными электродами, поэтому акцент ставили на граничное условие $E_\tau = 0$, а разные условия их проницаемости

определяли режим токопереноса — электронный ($v_n = 0$) или ионный ($v_{ne} = 0$, откуда следует $\rho v_n = \xi j_n$). В настоящем исследовании сделана попытка получить стационарный режим течения с наиболее благоприятным распределением тока (т. е. квазирадиальным) и выяснить свойства такого течения. Предполагается, что поток ограничен траекториями, а вместо эквипотенциальности требуется ортогональность тока к границе

$$v_n = 0, \quad j_\tau = 0 \tag{2.1}$$

где τ — направление вдоль боковой границы области.

В задаче с конечной проводимостью плазмы требования (2.1) и являются граничными условиями в соответствии с приведенными выше соображениями. В случаях очень высокой или даже идеальной проводимости нужно проследить, чтобы в предельном переходе $\nu \to 0$ второе из условий (2.1) соответствовало бы тем же соображениям и не породило бы искусственного пограничного слоя. При $\nu = 0$, $v_n = 0$ и достаточно малом ξ одна из двух характеристических скоростей λ_1, λ_2 направлена внутрь канала. Направление скоростей $\lambda_3 = \delta_3$, $\lambda_4 = \delta_4$ соответствует, как сказано выше, электронным траекториям, поэтому они «входят» в канал со стороны катода и «выходят» на аноде. Значит, в предельном случае $\nu = 0$ на катоде должно быть три граничных условия, а на аноде — только одно. На катоде условия (2.1) дополняются, например, условием $\partial\rho/\partial n = 0$, а на аноде остается только условие $v_n = 0$.

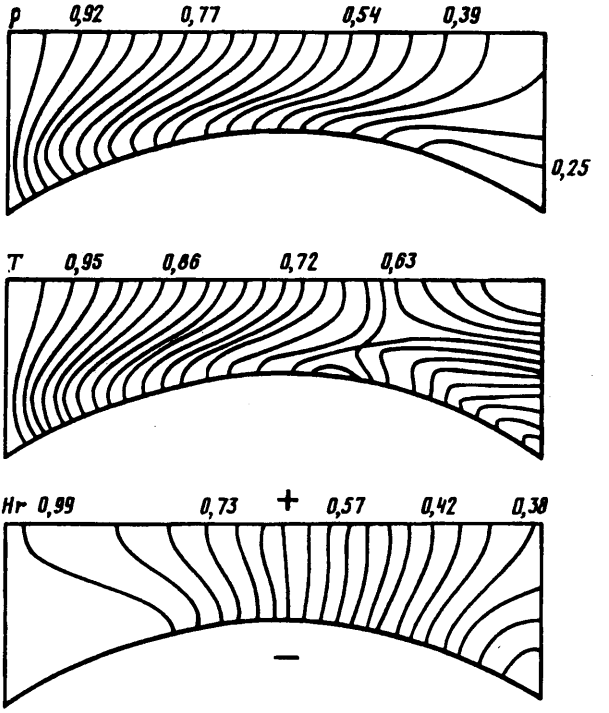
Чтобы сделать разностный алгоритм решения задачи замкнутым, недостающие уравнения на границе должны следовать из уравнений (1.1) и граничных условий. При этом можно использовать, например, перенос электронной энтропии и вмороженной функции $H/\rho r$ вдоль электронных траекторий. В расчете стационарных течений из уравнений (1.1) и условия $v_n = 0$ следует $\partial p/\partial n + Hj_\tau = 0$, что тоже удобно использовать в качестве недостающего уравнения на границе.

Заметим, однако, что при малых значениях ξ и при однородных по радиусу начальных данных указанные процедуры естественно создают нормальный ток на аноде (на катоде он задан !) и, таким образом, предельный переход $\nu \to 0$ имеет естественный характер. К тому же расчеты с условиями (2.1) при конечных, но малых значениях ν не обнаруживают никаких тенденций к образованию пограничного слоя на аноде.

Сформулированная задача решается численно с использованием относительно простых разностных методов, близких к изложенным в [2].

3. Результаты и анализ расчетов. Расчеты течения плазмы в данной модели проведены в канале ускорителя, геометрия которого близка к существующим экспериментальным установкам [7, 8]. Значение параметра $\beta = 0{,}5$ соответствует умеренному разрядному току $j \sim 150$ кА. Магнитная вязкость ν и параметр обмена ξ в расчетах сознательно завышены, чтобы нагляднее почувствовать их влияние на результат. Расчеты показали, что при $\xi = 0{,}1$, $\nu = 0{,}1$ в канале устанавливается стационарный режим течения с квазирадиальным распределением тока. Его параметры близки к параметрам течения в классической МГД-модели со сплошными эквипотенциальными электродами [9]. Этот результат оказался справедливым при обеих полярностях электродов и мало изменился при уменьшении ν практически до нуля. Таким образом, найдены стационарные режимы течения с эффектом Холла в бесконечно проводящей плазме.

«Обойти» опасность неэволюционности задачи здесь удается за счет самоорганизации достаточно гладкого распределения решения по пространству, в том числе в результате гладких начальных данных и самосогласованных условий на входе. Холловские течения хорошо проводящей плазмы были получены также в [15] за счет большей свободы в граничных условиях на электродах. В [16] указан класс заведомо устойчивых стационарных течений с эффектом Холла, но этот класс совсем не включает взаимодействие плазмы с электродами.



Фиг. 2

Фигура 2 иллюстрирует расчеты примером стационарного распределения плотности, температуры и электрического тока (линии $Hr = \text{const}$) в канале при указанных выше значениях параметров. Внешним отличительным признаком этого варианта расчета является только незначительный рост температуры вблизи конца центрального электрода (катода) вследствие джоулева нагрева, однако при сильном увеличении проводимости ($\nu \to 0$) и этот признак исчезает, а температура все более воспроизводит политропическую зависимость $T = \rho^{\gamma-1}$. За исключением упомянутого джоулева нагрева, результаты очень мало чувствительны к магнитной вязкости ν, поэтому в дальнейшем имеется в виду плазма бесконечной проводимости. Подчеркнем, что в процессе предельного перехода $\nu \to 0$ расчеты в данной модели не обнаружили признаков какого-либо пограничного слоя у стенки канала.

Проявление эффекта Холла при разных полярностях электродов характеризует таблица, где представлены безразмерные максимальная скорость, массовый расход, напряжение и относительная величина тока выноса J_{ex} (характерное значение Hr на выходе) бесконечно проводящей плазмы в классической МГД ($\xi = 0$) и в холловской при обеих полярностях электродов (I — полярность центрального электрода).

Анализ локальных характеристик течения показывает, что если катод в центре, то вследствие эффекта Холла поток ведет себя менее однородно — увеличивается неоднородность в распределении плотности и скорости по радиусу, скорость на входе и плотность на выходе несколько меньше, чем в МГД, отсюда уменьшение расхода $\dot{M}$ и напряжения U и возрастание скорости на выходе у центрального электрода (здесь достигается v_{max}), указанные в таблице. В случае, когда внутренний электрод — анод, наблюдается противоположная тенденция: поток становится более однородным, расход и напряжение увеличиваются, скорость

I	ξ	v_{max}	$\dot{M}$	U	J_{ex}
—	0,1	1,95	3,21	0,42	0,35
	0	1,98	3,31	0,44	0,33
+	0,1	1,80	3,50	0,47	0,29

v_{max} уменьшается. В первом случае несколько увеличивается, а во втором уменьшается доля тока выноса.

Придавая приведенным результатам физический смысл и сопоставляя их с экспериментами, следует иметь в виду, что в соответствии с данными таблицы $\xi_{tot} \approx 0{,}2$.

Установившиеся течения получены в расчетах и при больших значениях ξ, но их физический смысл уже менее интересен. В серии расчетов при $\nu_0 = 0{,}1$ неустойчивости проявились лишь при $\xi \sim 1$. Им предшествуют при положительной полярности центрального электрода предварительное уплотнение и замедление потока, а при отрицательной — разрежение.

Основное отличие полученных течений от рассмотренных ранее [2, 4] состоит в том, что боковые стенки канала неэквипотенциальны. Действительно, из обобщенного закона Ома (1.3) и граничных условий (2.1) следует, что электрическое поле вдоль границы имеет вид

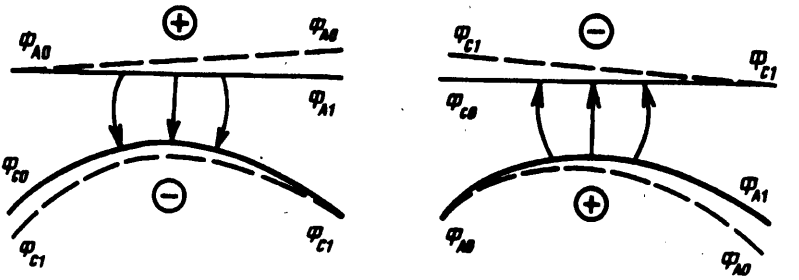
$$E_\tau = \frac{\xi}{\rho}\left(Hj_n - \frac{\partial p_e}{\partial \tau}\right), \quad j_n = -\frac{\partial Hr}{r\partial \tau} \tag{3.1}$$

где τ — тангенциальное направление вдоль границы слева направо, а n — нормаль, направленная снизу вверх (т. е. положительные направления τ и n образуют острые углы с осями z и r соответственно (см. фиг. 1)). Из (3.1) следует, что, поскольку в стационарном течении с током квазирадиального направления величины H и j_n одного знака, а давление убывает вдоль канала, на обеих границах $E_\tau > 0$, т. е. электрическое поле участвует в ускорении ионов. В результате электрический потенциал Φ убывает вдоль границ по закону

$$\Phi = \Phi_0 - \int E_\tau d\tau \tag{3.2}$$

где индекс ноль соответствует входному сечению $z = 0$, а поле (3.1) интегрируется вдоль границы.

Простейшее толкование полученного результата состоит в том, что добиваться оптимального режима ускорения плазмы в канале с квазирадиальным током можно, применяя секционированные по длине электроды [3, 12] и распределяя напряжение между секциями в соответствии с рассчитанным потенциалом (3.2). Однако в современных плазменных ускорителях [5—9] электроды (или играющие их роль более сложные устройства — трансформеры) содержат в основе своей продольные металлические конструкции и их естественно считать эквипотенциальными. Отсюда следует другое возможное толкование изложенного выше результата. Полученный в расчете стационарный режим течения относится не ко всему потоку плазмы в канале, а лишь к его основной части — ядру потока [9], ограниченному траекториями, а не электродами. Расположение его относительно эквипотенциальных электродов схематически изображено на фиг. 3 для обоих вариантов их полярности. Сплошные линии — границы рассчитанного ядра потока, а штриховые — эквипотенциали, между которыми заключено это ядро, т. е. электроды. Такое расположение подсказано тем, что потенциал (3.2) всегда монотонно убывает вдоль сплошных границ. Схема на фиг. 3 напоминает эпюру течения плазмы в режиме ионного токопереноса [1, 3], который имеет здесь место, строго говоря, в предельном случае бесконечной проводимости ($\nu \to 0$) и



Фиг. 3

сильного тока ($\beta \to 0$): при этих условиях обобщенный закон Ома (1.3) можно переписать в виде $\boldsymbol{E} + (\mathbf{v}_e \times \mathbf{H}) = 0$, где $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \xi \mathbf{j}/\rho$, откуда следует, что электрическое поле $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ортогонально скорости электронов $\mathbf{v}_e$, т. е. эквипотенциальные электроды совпадают с электронными траекториями, а ток между ними переносится ионами.

Высокоэнергичным потокам современного сильноточного ускорителя соответствуют значения $\nu \ll 1$ и $\beta \ll 1$ и режим ионного токопереноса реализуется [7—9]. Для тех же потоков $\xi \ll 1$, откуда следует, что эффект Холла не сильно влияет на характер течения и обязанное ему отклонение ядра потока от всего межэлектродного пространства невелико. Количественные характеристики этого отклонения и связанные с ним поправки к параметрам течения можно оценить, используя результаты указанных выше расчетов.

Падение потенциала вдоль границы потока находится с помощью (3.2)

$$\delta U_{A,C} = \Phi_{A1,C1} - \Phi_{A0,C0} = -\int\limits_{A0,C0}^{A1,C1} E_\tau d\tau \tag{3.3}$$

где индексы A и C соответствуют аноду и катоду, а 0 и 1 — левой и правой границам канала.

Отклонение границ потока $\delta r_{A,C}$ от электродов $r_{A,C}$ приближенно оценивается при малых значениях ξ, если пренебречь, как и выше, различием между электронными траекториями и эквипотенциалями

$$\delta r_{A,C} \approx \int\limits_{A,C} |\alpha|\, d\tau \tag{3.4}$$

и исходить из того, что угол между траекториями ионов и электронов равен

$$\alpha \approx \frac{|v_e - v|}{|v|} = -\xi \frac{j_n}{\rho v_\tau} = \frac{\xi}{\rho v_\tau} \frac{\partial H r}{r \partial \tau} \tag{3.5}$$

где значения ρ, v_τ и H взяты из расчета потока на границах.

В том же приближении определяются поправки к массовому расходу, связанные с несовпадением рассчитанной области ядра потока и пространства между электродами. Эти поправки могут быть разными во входном и выходном сечениях канала: первая равна массе плазмы, вытекающей из канала через катод, вторая — втекающей через анод за единицу времени (фиг. 3)

$$\delta \dot{M}_0 = \delta \dot{M}_C \approx \rho_{C0} v_{C0} 2\pi r_{C0} \delta r_{C0} \tag{3.6}$$

$$\delta \dot{M}_1 = \delta \dot{M}_A \approx \rho_{A1} v_{A1} 2\pi r_{A1} \delta r_{A1}$$

Оценка (3.6) для $\delta \dot{M}_A$, по-видимому, завышена, так как она предполагает, что плазма втекает через анод с продольной скоростью, соизмеримой со скоростью основного потока.

В применении к величинам U и $\dot{M}$ в таблице и геометрии канала на фиг. 2 имеем на внутреннем электроде любой полярности $\delta U_{in} \approx -0{,}17$, на внешнем $\delta U_{ex} \approx -0{,}05$. Они согласуются с законом сохранения энергии, из которого приближенно следует, что $\delta U \approx -1/2\xi v^2_{max}$ вдоль каждой траектории (скорость у центрального электрода вдвое выше, чем у внешнего). Усредняя закон сохранения по всем траекториям канала, отсюда можно получить относительную величину падения напряжения на траектории

$$|\delta U_{cp}| = \xi_{tot}\eta U \tag{3.7}$$

где η — коэффициент полезного действия ускорителя (см. [1, с. 11]). Формула (3.7) может быть полезна для оценки КПД. Отклонение границ потока от электродов также не зависит от полярности: $\delta r_{in} \approx 0{,}3$, $\delta r_{ex} \approx 0{,}09$. Поправки к расходу массы: $\delta\dot{M}_C \approx 0{,}1$, если катод в центре (малая скорость втекания вблизи центрального электрода малого радиуса), $\delta\dot{M}_C \approx 0{,}4$, если он снаружи. На аноде $\delta\dot{M}_A \approx 0{,}35$ при обеих полярностях.

Приведенный пример относительно выпукло иллюстрирует эффект Холла, поскольку параметры β, ν_0 и ξ сознательно выбраны завышенными. Если обратиться к экспериментальным данным [8], то здесь даже не самому сильноточному ($J \approx 250$ кА) режиму работы ускорителя с центральным катодом соответствуют значения $\beta = 0{,}1$, $\xi = 0{,}017$ и $\xi_{tot} = 0{,}065$. Рассчитанная по этим данным картина течения оказалась еще ближе к классической МГД-модели и холловские поправки (3.3), (3.4), (3.6) — на порядок меньше, чем в рассмотренном примере. Поэтому МГД-расчеты такого течения [9] достаточно обоснованно описывают основные свойства и параметры явления.

Таким образом, предложенная МГД-модель, учитывающая эффект Холла в канале плазменного ускорителя с граничными условиями (2.1), позволяет рассчитать стационарное течение хорошо проводящей плазмы с квазирадиальным распределением тока. Решение задачи следует отнести к ядру потока, как указано в статье [9], но с неэквипотенциальными границами. Это ядро повернуто относительно электродов на угол порядка параметра обмена ξ. В частности, холловское отклонение тока от радиального направления происходит здесь одновременно с отклонением потока от осевого направления (фиг. 3) и по этой причине не проявляется на фиг. 2. Поправки первого приближения (3.3), (3,4), (3.6) дают количественные характеристики роли эффекта Холла, в частности приэлектродного падения потенциала, указывают место ядра потока во всем пространстве канала и в целом должны уточнить сопоставление расчетов с экспериментами, предпринятое в статье [9].

Авторы глубоко признательны А. И. Морозову, В. В. Савельеву и А. П. Шубину, с которыми неоднократно и плодотворно обсуждались разные этапы этой работы.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (Грант M3X000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов А. И., Соловьев Л. С.* Стационарные течения плазмы в магнитном поле//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 3—87.
2. *Брушлинский К. В., Морозов А. И.* Расчет двумерных течений плазмы в каналах//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 88—163.
3. *Морозов А. И.* Физические основы космических электрореактивных двигателей. Т. 1. М.: Атомиздат, 1978. 326 с.

4. *Брушлинский К. В., Морозов А. И., Савельев В. В.* Некоторые вопросы течений плазмы в канале магнитоплазменного компрессора//Двумерные численные модели плазмы/Под ред. К. В. Брушлинского. М.: Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша АН СССР, 1979. С. 7—66.
5. *Морозов А. И.* Принципы коаксиальных (квази)стационарных плазменных ускорителей (КСПУ)//Физика плазмы. 1990. Т. 16. Вып. 2. С. 131—146.
6. *Брушлинский К. В., Заборов А. М., Козлов А. Н.* Численное моделирование течений плазмы в КСПУ//Физика плазмы. 1990. Т. 16. Вып. 2. С. 147—157.
7. *Асташинский В. М., Маньковский А. А., Минько Л. Я., Морозов А. И.* Исследование физических процессов, обусловливающих режим работы КСПУ//Физика плазмы. 1992. Т. 18. Вып. 1. С. 90—98.
8. *Волков Я. Ф., Кулик Н. В., Маринин В. В. и др.* Анализ параметров потоков плазмы, генерируемых полноблочным КСПУ Х-50//Физика плазмы. 1992. Т. 18. Вып. 11. С. 1392—1402.
9. *Брушлинский К. В., Горшенин К. П.* Расчеты МГД-течений в каналах и их соотношение с экспериментальными исследованиями плазменных ускорителей//Физика плазмы. 1993. Т. 19. Вып. 5. С. 682—698.
10. *Брушлинский К. В., Горшенин К. П., Сыцько Ю. И.* Математические модели стационарных МГД-течений в каналах плазменных ускорителей//Математическое моделирование. 1991. Т. 3. № 10. С. 3—19.
11. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962.
12. *Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А.* Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 672 с.
13. *Волков Ю. А., Морозов А. И.* Структура приэлектродного дрейфового слоя. Численная модель//Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7. Вып. 18. С. 1102—1106.
14. *Брушлинский К. В.* Динамика электронов и ионов в приэлектродном слое плазмы//Тр. Всесоюз. конф. «Нелинейные явления», М., 1989. М.: Наука, 1991. С. 3—8.
15. *Брушлинский К. В., Козлов А. Н., Морозов А. И.* Численное исследование двумерных течений плазмы и ионизующегося газа методом пробных частиц//Физика плазмы. 1985. Т. 11. Вып. 11. С. 1358—1367.
16. *Holm D. D.* Hall magnetohydrodynamics: Conservation laws and Lyapunov stability//Phys. Fluids. 1987. V. 30. № 5. P. 1310—1322.

Москва

Поступила в редакцию
20.V.1994