МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1995

УДК 532.517.4:519.21

© 1995 г. Г. А. КУЗЬМИН

ДВУМЕРНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИ РАВНОВЕСНЫЕ ВИХРИ

Равновесная статистическая механика применяется для описания двумерных вихрей в неограниченной несжимаемой идеальной жидкости. Учтены интегралы энергии и момента импульса, а также набор инвариантов, который следует из условия, что любое распределение завихренности получается из начального дифференцируемым преобразованием, сохраняющим площади. Выводятся уравнения для статистически равновесного распределения завихренности и пассивной примеси. Приводятся аргументы, что учет дополнительных инвариантов ослабляет произвол, связанный с выбором конечномерной аппроксимации течения. Обсуждается случай, когда облако завихренности ведет себя подобно термодинамической системе, испытывающей фазовый переход упорядочения.

Турбулентное перемешивание увеличивает энтропию вихревого движения. Если диссипация отсутствует, распределение завихренности эволюционирует к статистически равновесному состоянию, в котором энтропия имеет максимальное значение. Теория равновесных течений проще, чем теория обычной неравновесной турбулентности (см. обзор [1]). При сопоставлении теории с данными эксперимента следует проявлять осторожность, поскольку некоторые свойства равновесных состояний весьма необычны. Например, спектр мелкомасштабных пульсаций сильно отличается от предсказываемого теорией Колмогорова. Это означает, что роль диссипации существенна.

Тем не менее, статистически равновесные состояния представляют определенный интерес. Их можно рассматривать как конечные пункты эволюции течений, а диссипацию — как фактор, препятствующий достижению статистически равновесного состояния. На этой основе можно понять некоторые тенденции эволюции течений. Например, в [2] объяснено направление потока энергии по спектру. Как оказалось, именно потоку энергии от больших вихрей к малым (в трехмерных турбулентных течениях) и обратному потоку в двумерных течениях соответствует рост энтропии вихревого движения.

Равновесная статистическая механика позволяет также получить набор вихрей, весьма похожих на некоторые когерентные вихри в квазидвумерных течениях [3, 4]. Возможно ее применение для описания квазигеострофических вихрей в атмосфере и в океане. Основания для такого применения следующие.

Весьма часто поле завихренности представляет собой набор пространственно разделенных пятен. Эволюция пятен происходит посредством их столкновений, а также формированием пятен за счет взаимодействий элементов завихренности внутри них. В промежутках времени между столкновениями роль других пятен сводится к галилееву переносу и малому искажению. Прямые численные эксперименты показывают, что столкновения пятен приводят к их слияниям и разрывам, причем в квазидвумерных течениях доминирует тенденция к объединению пятен завихренности одного знака.

В результате столкновений образуются пятна весьма сложной формы. Их дальнейшая эволюция за счет внутренних механизмов ведет к формированию более простых вихрей: если поле завихренности сгладить по окрестности каждой точки, то сформировавшиеся вихри описываются небольшим числом параметров. Дальнейшие столкновения приводят к повторению данного процесса.

Имеются различные физические механизмы формирования вихрей. Самый простой из них — вязкая диффузия завихренности. Если число Рейнольдса велико, имеется другой механизм — релаксация к состоянию термодинамического равновесия, которая происходит в любой сложной гамильтоновой системе. Полной реализации этого механизма препятствует вязкость, поскольку ее влияние конечно даже при очень больших числах Рейнольдса. Имеются и другие факторы, специфичные для континуальных гамильтоновых механических систем. Тем не менее, если скорость релаксации пространственного распределения завихренности достаточно высока, можно предположить, что сформировавшийся вихрь будет близок к статистически равновесному.

В настоящей работе рассматривается идеализированная задача — определить состояние статистического равновесия в изолированном двумерном вихре в идельной несжимаемой жидкости. Чтобы найти равновесное состояние, необходимо выбрать некоторую конечномерную аппроксимацию течения. Известны попытки использовать для этой цели конечный набор гармоник Фурье либо конечное число точечных вихрей [1]. Вопрос о выборе степеней свободы нетривиален, поскольку этот выбор может повлиять на форму статистически равновесных вихрей [5].

Степени свободы частично определяются интегралами движения идеальной жидкости. Поэтому желательно учесть максимально возможное число таких интегралов. В [6] использовалась аппроксимация течения конечными элементами завихренности. Таким образом была учтена инвариантность завихренности вдоль траекторий жидких частиц и выявлена зависимость равновесных распределений от этих интегралов движения. Эти же результаты получены независимо в недавних работах [7, 8]. Следует отметить, что статистическая механика завихренности аналогична предложенной Линден-Беллом для астрофизических объектов [9].

Линден-Белл [9] рассматривал бесстолкновительную релаксацию шаровых и эллиптических звездных скоплений к состоянию статистического равновесия. Для их описания использовалось уравнение Власова (которое подобно уравнению для завихренности). Аппроксимация Линден-Белла состояла в разбиении звездной материи на малые недеформируемые кубики и использовании этих кубиков в качестве квазичастиц. В конечных формулах размер кубиков устремлялся к нулю.

Преимуществом метода служит возможность учета бесконечной серии интегралов движения, помимо обычных интегралов энергии, импульса и момента импульса. Несущественность других интегралов иногда мотивируется тем, что они разрушаются при аппроксимации полей конечным набором гармоник Фурье [1]. Цейтлин [10] показал, что можно построить такую $N \times N$ аппроксимацию двумерных течений идельной жидкости, что останется N интегралов движения. Следовательно, учет других интегралов движения оправдан. Можно ожидать, что их учет уменьшает произвол, связанный с конечномерной аппроксимацией течения.

В настоящей работе учитываются также дополнительные интегралы движения, которые следуют из требования, чтобы любое распределение завихренности могло быть получено из начального непрерывным дифференцируемым преобразованием, сохраняющим площади. Инварианты движения рассматриваются как дополнительные связи, ограничивающие область фазового пространства. Другой возможный метод — введение независимых нормальных переменных в рамках формализма алгебр Ли симплектических диффеоморфизмов [11].

1. Инварианты двумерного движения невязкой несжимаемой жидкости. Уравнения двумерного движения идеальной жидкости имеют вид

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\omega = 0, \quad \omega = \nabla \wedge \mathbf{v},\ \nabla\mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

Из (1.1) следует серия интегралов движения

$$C_n = \int \omega^n (\mathbf{x}, t)\, d^2x \tag{1.2}$$

Здесь $C_0 = C$ — циркуляция, а C_2 — энстрофия. Сохраняется также энергия [12]

$$E = -\frac{1}{8\pi} \int \omega(\mathbf{x}, t)\, \omega(\mathbf{x}', t) \ln (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2\, d^2x\, d^2x' \tag{1.3}$$

Если область движения не ограничена, то сохраняется импульс и момент импульса [12]

$$C\mathbf{X} = \int \mathbf{x}\omega (\mathbf{x}, t)\, d^2x \tag{1.4}$$

$$CL^2 = \int (\mathbf{x} - \mathbf{X})^2 \omega (\mathbf{x}, t)\, d^2x \tag{1.5}$$

Согласно уравнению (1.1), завихренность в момент времени t получается из начального распределения с помощью преобразования координат жидких частиц

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} (\mathbf{a}, t) \tag{1.6}$$

Преобразование (1.6) связывает эйлеровы координаты $\mathbf{x}$ с лагранжевыми $\mathbf{a}$. Оно должно быть дифференцируемым. Если за лагранжевы координаты выбрать начальные координаты жидких частиц, то якобиан преобразования равен единице. В настоящей работе используется другой выбор лагранжевых координат. Частицы жидкости можно пометить значениями каких-либо двух сохраняющихся скалярных полей и использовать значения полей как лагранжевы координаты. За одно из этих полей принимается завихренность $\omega (\mathbf{x}, t)$, а за другое — некоторое поле пассивной примеси $\chi (\mathbf{x}, t)$

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\partial \chi}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\, \chi = 0 \tag{1.7}$$

Предполагается, что поле χ функционально независимо от ω. Эйлеровы координаты частиц $\mathbf{x}$ — некоторые функции от значений ω, χ. Из (1.1), (1.7) следует, что якобиан

$$J = \frac{\partial (\omega, \chi)}{\partial (x, y)} = \nabla\omega \wedge \nabla\chi \tag{1.8}$$

есть лагранжев инвариант движения, $dJ/dt = 0$. Существование и инвариантность якобиана определяют область фазового пространства, которой принадлежат все распределения завихренности в равновесном ансамбле Гиббса. Из инвариантности якобиана вдоль траекторий следует дополнительная серия интегралов движения

$$J_m = \int (\nabla\omega \wedge \nabla\chi)^m\, d^2x = \mathrm{const}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{1.9}$$

Интеграл по пространству от любой функции от лагранжевых инвариантов $\int F (\omega, \chi, J)\, d^2x$ также является интегралом движения. Ниже предполагается, что эта функция представима рядом Тейлора по своим аргументам. Интегрирование членов разложения по пространству дает серии (1.2), (1.9) и интегралы от произведений степеней ω, χ.

2. Равновесные распределения завихренности и примеси. Как известно [12], облако завихренности в неограниченной жидкости — есть изолированная гамильтонова система. Естественно описывать статистику этой системы микроканоническим распределением Гиббса. Ниже рассматривается совместная статистика завихренности и примеси. Равновесное распределение примеси в вихре представляет собственный интерес. Статистическая механика позволяет определить асимптотическое (при $t \to \infty$) распределение примеси по заданным начальным условиям. В предыдущем разделе показано, что имеются дополнительные причины для введения поля примеси. Оно помогает определить доступную область фазового пространства и получить правильную статистику поля завихренности. Дополнительные лагранжевы инварианты можно учесть иначе — переходом к описанию течения жидкости в терминах плотности вихревого импульса [13, 14].

Эволюция примеси и завихренности описывается уравнениями (1.7), (1.1). Предполагается, что движение обладает свойствами размешивания и что пригоден вероятностный подход для описания состояния при $t \to \infty$. Чтобы определить вероятностную меру в функциональном пространстве, вводятся тонкоструктурное и сглаженное распределения полей. Пространство x, y разбивается на малые ячейки площади ε^2. Аналогично пространство лагранжевых координат разбивается на ячейки $\delta\omega\delta\chi$. Непрерывные начальные поля завихренности и примеси заменяются кусочно-постоянными полями. Внутри областей площади $A^{(\alpha\beta)}$ завихренность равна $\omega^{(\alpha)}$, а концентрация примеси равна $\chi^{(\beta)}$; $\alpha = 1, 2 \ldots, = k$, $\beta = 1, 2, \ldots, l$. Размер ячеек считается столь малым, что каждая из них либо пустая, либо заполнена завихренностью некоторого сорта α и примесью сорта β. Площади областей $A^{(\alpha\beta)}$, занятые завихренностью α и примесью β, и соответствующие количества ячеек $N^{(\alpha,\beta)} = A^{(\alpha,\beta)}/\varepsilon^2$ являются интегралами движения.

В статистической физике Гиббса предполагается, что все тонкоструктурные состояния примеси и завихренности (микросостояния) имеют одинаковую вероятность. Микроканоническое распределение Гиббса есть произведение δ-функций. Если E — кинетическая энергия, а $\Psi_k\{\omega\} = c_k$, $k = 1, 2, \ldots,$— другие существенные интегралы движения, то распределение вероятности равно

$$P\{\omega\} = \frac{1}{Q}\,\delta\left[E + \frac{1}{8\pi}\int \omega(\mathbf{x})\,\omega(\mathbf{x}')\ln(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2\,d^2x\,d^2x'\right] \times \prod_k \delta(\Psi_k\{\omega\} - c_k) \tag{2.1}$$

где Q — статистическая сумма, которая определяется из условия, что полная вероятность равна единице.

Сглаженные распределения определяются осреднением тонкоструктурных полей по ящикам, каждый из которых содержит $p \gg 1$ ячеек. Площадь $s = p\varepsilon^2$, по которой производится сглаживание, полагается малой по сравнению с масштабом вихревой структуры. Пусть $n_i^{(\alpha,\beta)}$ — число ячеек в ящике с номером i, которое занято завихренностью сорта α и примесью сорта β. Числа $n_i^{(\alpha,\beta)}$ определяют сглаженные поля в окрестности каждой точки. Сглаженные поля обозначаются угловыми скобками. Сглаженная завихренность сорта α есть

$$\langle\omega^{(\alpha)}\rangle = \omega^{(\alpha)}\sum_{\beta=1}^{l} n_i^{(\alpha\beta)}/p \tag{2.2}$$

Полная сглаженная завихренность есть сумма компонент $\langle\omega^{(\alpha)}\rangle$

$$\langle\omega\rangle = \sum_{\alpha=1}^{k}\omega^{(\alpha)}\sum_{\beta=1}^{l} n_i^{(\alpha\beta)}/p \tag{2.3}$$

Сглаженная плотность энстрофии $\langle\omega^2\rangle$ получается заменой $\omega^{(\alpha)}$ на $(\omega^{\alpha})^2$ в (2.3). Более сложные характеристики — локальные корреляции примеси и завихренности

$$\langle\omega^m\chi^{m'}\rangle = \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{l}[\omega^{(\alpha)}]^m\,[\chi^{(\beta)}]^{m'} n_i^{(\alpha\beta)}/p, \quad m, m' = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

Согласно (1.1), (1.7), эволюцию полей можно рассматривать как последовательность перестановок элементов жидкости из одних ячеек в другие. Перестановки внутри малых ящиков практически не меняют инвариантов (1.3)—(1.5). Инварианты (1.2) и аналогичные инварианты для примеси не изменяются при любых перестановках.

Чтобы выявить влияние интегралов (1.9), используется их конечномерная аппроксимация

$$J_m = \int \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^m dx\, dy=$$

$$= \sum_{\mu} \{ [\omega (x_\mu+\varepsilon, y_\mu) - \omega (x_\mu, y_\mu)] [\chi (x_\mu, y_\mu + \varepsilon) - \chi (x_\mu, y_\mu)] \varepsilon^{-2} -$$

$$- [\omega (x_\mu, y_\mu + \varepsilon) - \omega (x_\mu, y_\mu)] [\chi (x_\mu + \varepsilon, y_\mu) - \chi (x_\mu, y_\mu)] \varepsilon^{-2} \}^m \varepsilon^2 \tag{2.5}$$

Здесь (x_μ, y_μ) — координаты ячейки с номером μ.

Интегралы (2.5) заметно отличаются от инвариантов (1.3)—(1.5), (1.2). Набор (1.2)—(1.5) выражается через числа заполнения $n_i^{(\alpha, \beta)}$. Если бы другие инварианты отсутствовали, то можно было бы определить макросостояние, задав набор $n_i^{(\alpha, \beta)}$. Вероятность такого макросостояния пропорциональна числу микросостояний при заданных числах заполнения и определяется комбинаторным фактором. Ниже находится наиболее вероятное макросостояние. Учет инвариантов (2.5) значительно усложняет теорию, поскольку они зависят от пространственных производных полей. Поэтому вначале рассматриваются равновесные распределения на основе интегралов (1.2)—(1.5).

Учет сокращенного набора инвариантов. Вероятность макросостояния равна сумме (2.1) по микросостояниям с фиксированными числами заполнения. Поэтому вероятность макросостояния пропорциональна числу перестановок элементов при фиксированных $n_i^{(\alpha, \beta)}$

$$M = \prod_{\alpha=1}^{k} \prod_{\beta=1}^{l} \left[N^{(\alpha\beta)}! \prod_{i=1} \frac{1}{n_i^{(\alpha\beta)}!} \right] \prod_{j=1} p! \left(p - \sum_{\gamma=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{l} n_j^{(\gamma\mu)} \right) !^{-1} \tag{2.6}$$

При больших числах заполнения

$$\ln n! \approx n \ln n \tag{2.7}$$

Если ввести безразмерные переменные $\mathbf{r} = (\mathbf{x} - \mathbf{X})/L$, $\Omega = \langle \omega \rangle L^2/C$, безразмерную энергию $e = E/C^2 + (1/8\pi) \ln L^2$ и плотности компонент $(\alpha, \beta) : N^{(\alpha, \beta)} (\mathbf{x}_i) = n_i^{(\alpha, \beta)}/p$, то распределение вероятности запишется в виде

$$P \{N^{(\alpha\beta)} (\mathbf{r})\} = \frac{1}{Q} \exp\Big\{- \frac{L^2}{\varepsilon^2} \int \Big[\sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{\beta=1}^{l} N^{(\alpha\beta)} \ln N^{(\alpha\beta)} +$$

$$+ \Big(1 - \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{\beta=1}^{l} N^{(\alpha\beta)} \Big) \ln \Big(1 - \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{\beta=1}^{l} N^{(\alpha\beta)} \Big) \Big] \Big\} \times$$

$$\times \delta \left[e + \frac{1}{8\pi} \int \Omega (\mathbf{r})\, \Omega (\mathbf{r}') \ln (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2\, d^2r\, d^2r' \right] \delta \left[\int r^2\, \Omega (\mathbf{r})\, d^2r - 1) \right] \times$$

$$\times \delta \left[\int \mathbf{r} \Omega (\mathbf{r})\, d^2r \right] \delta \left[A^{(\alpha\beta)} L^{-2} - \int N^{(\alpha\beta)}\, d^2r \right] \tag{2.8}$$

Экспоненциальный множитель получен из (2.6), (2.7). Поскольку площадь s мала, суммы по ящикам заменены интегралами.

В пределе $\varepsilon \to 0$ коэффициент L^2/ε^2 в показателе экспоненты бесконечно велик. Поэтому подавляющей вероятностью обладают макросостояния, которые минимизируют функционал

$$\Phi\{N^{(\alpha\beta)}(\mathbf{r})\} = \int \Big[\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{l} N^{(\alpha\beta)} \ln N^{(\alpha\beta)} + \Big(1 - \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{l} N^{(\alpha\beta)}\Big) \times$$

$$\times \ln \Big(1 - \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{l} N^{(\alpha\beta)}\Big)\Big] \nu \Big[e + \frac{1}{8\pi}\int \Omega(\mathbf{r})\,\Omega(\mathbf{r}') \ln (\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2\, d^2r\, d^2r'\Big] +$$

$$+ \mu\Big[\int r^2\Omega(\mathbf{r})\, d^2r - 1\Big] + \mathbf{w}\int \mathbf{r}\Omega(\mathbf{r})\, d^2r + \sigma^{(\alpha\beta)}\Big[A^{(\alpha\beta)}L^{-2} - \int N^{(\alpha\beta)}\, d^2r\Big] \qquad (2.9)$$

где ν, μ, $\mathbf{w}$, $\sigma^{(\alpha\beta)}$ — лагранжевы множители. Приравнивание нулю вариаций по числам заполнения дает систему уравнений Эйлера вариационной задачи

$$N^{(\alpha\beta)}\Big(1 - \sum\nolimits_{\alpha=1}^{k}\sum\nolimits_{\beta=l}^{l} N^{(\alpha\beta)}\Big)^{-1} = \exp\Big(-\frac{\omega^{(\alpha)}L^2}{C}Y + \sigma^{(\alpha\beta)}\Big) \qquad (2.10)$$

$$Y = \frac{\nu}{4\pi}\int \ln(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2\Omega(\mathbf{r}')\, d^2r' + \mu r^2 + \mathbf{w}\mathbf{r} \qquad (2.11)$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, k; \quad \beta = 1, 2, \ldots, l$$

Уравнения (2.10) описывают пространственное распределение компонент $N^{(\alpha\beta)}$. Если не требуется знать распределение примеси, необходимо выполнить суммирование $N^{(\alpha)} = \sum\nolimits_{\beta=1}^{l} N^{(\alpha\beta)}$ и определить новые лагранжевы множители $\sigma^{(\alpha)}$ из равенства

$$\exp[-\sigma^{(\alpha)}] = \sum_{\beta=1}^{l} \exp[-\sigma^{(\alpha\beta)}]$$

Таким образом воспроизводятся уравнения для сглаженной завихренности, полученные в [6]. Как показано в [6], задача сводится в этом случае к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Это уравнение имеет простые аналитические и численные решения, которые можно использовать для моделирования квазидвумерных вихревых структур в турбулентных течениях.

Влияние интегралов J_m. Выше предполагалось, что различные элементы жидкости не могут занимать одну и ту же ячейку фазового пространства. Другие виды ближних взаимодействий элементов игнорировались. Интегралы (1.2)—(1.5) не ограничивают возможное расположение элементов жидкости внутри ящиков. Поэтому вероятность макросостояния определялась простым комбинаторным фактором (2.6).

Интегралы (2.5) влияют на взаимное положение элементов завихренности и примеси, поскольку они определяют вероятности разностей полей в смежных ячейках. Тонкоструктурное микроканоническое распределение (2.1) равно произведению δ-функций от (1.2)—(1.5), (2.5). Необходимо вывести распределение вероятности для сглаженных полей.

Данная проблема подобна другим, известным в статистической механике. Если использовать интегральное представление δ-функции

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\zeta x)\, d\zeta$$

то микроканоническое распределение вероятности запишется в экспоненциальной форме. Дополнительные связи (2.5) индуцируют нелинейности всех порядков в показателе экспоненты. Задача сводится к статистике решеточного газа $k\times l$-компонент, в котором дальнее логарифмическое взаимодействие дополнено взаимодействием ближайших соседей. Если в такой системе имеется лишь одна компонента, а дальнее взаимодействие отсутствует, она сводится к плоской модели Изинга. Аналитическое решение модели Изинга найдено Онзагером (см., например, [15]). Рассматриваемая проблема гораздо сложнее, поэтому надежда получить ее аналитическое решение отсутствует.

Ниже рассматривается приближенное решение. Сумма (1.9) по ячейкам заменяется на сумму по ячейкам внутри ящиков с последующим суммированием по ящикам. Сумма внутри ящика сводится к локальному сглаживанию (осреднению по ящику) с заданными числами $n_i^{(\alpha,\beta)}$. Требуется выразить результат в терминах чисел $\{n_i^{(\alpha,\beta)}\}$.

Вероятность встретить завихренность $\omega^{(\alpha)}$ и плотность примеси $\chi^{(\beta)}$ в любой ячейке i-го ящика равна $N_i^{(\alpha,\beta)}$. Предположим вначале, что поля в различных ячейках ящика с номером i не коррелируют. Тогда вероятность найти компоненты (α, β), (γ, σ) в разных ячейках равна произведению одноточечных вероятностей $N_i^{(\alpha,\beta)}N_i^{(\gamma,\sigma)}$. Среднее от произведения полей в разных ячейках сводится к произведению средних. В частности

$$\langle\omega^2(x_\mu+\varepsilon, y_\mu)\,\omega^2(x_\mu, y_\mu)\rangle = \langle\omega^2(x_\mu+\varepsilon, y_\mu)\rangle\,\langle\omega^2(x_\mu, y_\mu)\rangle$$

$$\langle\chi^2(x_\mu, y_\mu+\varepsilon)\,\omega^2(x_\mu, y_\mu)\rangle = \langle\chi^2(x_\mu, y_\mu+\varepsilon)\rangle\,\langle\omega^2(x_\mu, y_\mu)\rangle$$

и т. д. Это предположение подобно приближению Брегга — Вильямса [16, 17]. Оно позволяет выразить любой интеграл (2.5) в терминах чисел $N_i^{(\alpha,\beta)}$. Первый инвариант $J_1 = 0$, поскольку он сводится к интегралу по удаленной границе. Второй инвариант в принятом приближении записывается так

$$J_2 = 6\varepsilon^{-2}\sum_i\left(\langle\chi_i^2\rangle\langle\omega_i^2\rangle - \langle\chi_i^2\rangle\langle\omega_i\rangle^2 - \langle\omega_i^2\rangle\langle\chi_i\rangle^2 - \langle\omega_i\chi_i\rangle^2 + 2\,\langle\omega_i\chi_i\rangle\langle\chi_i\rangle\langle\omega_i\rangle\right) \qquad (2.12)$$

где сглаженные поля даются выражениями (2.2)—(2.4). Аналогичные выражения получаются для инвариантов высшего порядка. Правая часть уравнения (2.12) неограниченно растет при $\varepsilon \to 0$. Поэтому сформулированное предположение несправедливо при $\varepsilon \to 0$ и при фиксированном J_2, и поля в соседних ячейках должны коррелировать.

Предположим, что корреляционные свойства описываются единственным масштабом корреляции r_c, который не изменяется при $\varepsilon \to 0$. В этом случае пространство можно разбить на ячейки размера $\varepsilon \approx r_c$. В данной модели все поля можно полагать постоянными в ячейках. Предполагается, что поля вне ячейки не коррелируют с их величинами в ячейке. В рассматриваемой задаче $\varepsilon = r_c$ определяется из условия (2.12). Это замыкает определение модели. Хотя сформулированная модель ограничена, она позволяет выявить характерные свойства равновесной статистики континуальных сред.

Приведенные аргументы показывают, что инвариантность J_m индуцирует некоторый локальный порядок в статистически равновесном состоянии. Модель соответствует упорядочению ферромагнитного вида, в котором значения полей внутри области масштаба r_c имеют примерно одинаковое значение. Случай, подобный антиферромагнитному упорядочению, здесь не рассматривается.

Поскольку теперь дополнительные ограничения (2.12) сформулированы в терминах чисел заполнения $n_i^{(\alpha,\beta)}$, распределение вероятности для сглаженных полей выводится так же, как и выше. Все пространство разбивается на ящики площади s. Каждый ящик содержит $p \gg 1$ ячеек. Размер ячеек r_c не произволен, а должен быть определен из (2.12). Предполагается, что инварианты имеют такие значения, что L/r_c велико. В этом случае большинство реализаций сглаженных полей лежат вблизи наиболее вероятного распределения.

Плотность вероятности сглаженных полей определяется комбинаторным множителем (2.1) и связями (1.2)—(1.5), (2.12). После замены суммы по ящикам интегралом по пространству условие (2.12) запишется

$$\Psi\{N^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{r})\} \equiv \frac{6L^2}{r_c^2 J_2}\int (\langle\chi^2\rangle\langle\omega^2\rangle - \langle\chi^2\rangle\langle\omega\rangle^2 - \langle\omega^2\rangle\langle\chi\rangle^2 -$$

$$- \langle\omega\chi\rangle^2 + 2\langle\omega\chi\rangle\langle\chi\rangle\langle\omega\rangle)\, d^2r - 1 = 0 \qquad (2.13)$$

Левая часть (2.13) должна быть добавлена с некоторым множителем Лагранжа ξ к функционалу (2.9). Новый функционал

$$\Phi'\{N^{(\alpha\beta)}(\mathbf{r})\} = \Phi\{N^{(\alpha\beta)}(\mathbf{r})\} + \xi\Psi\{N^{(\alpha\beta)}(\mathbf{r})\} \qquad (2.14)$$

Другие инварианты J_m, $m = 3, 4, \ldots$, учитываются аналогичным образом. Модифицированный функционал (2.14) дает уравнения Эйлера

$$N^{(\alpha\beta)}\left(1 - \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{l} N^{(\alpha\beta)}\right)^{-1} = \exp\left(-\frac{\omega^{(\alpha)}L^2}{C}Y - \frac{\delta\Psi}{\delta N^{(\alpha\beta)}} + \sigma^{(\alpha\beta)}\right) \qquad (2.15)$$

$$\frac{\delta\Psi}{\delta N^{(\alpha\beta)}} = \frac{6L^2}{r_c^2 J_2}[2\omega^{(\alpha)}(\langle\omega\chi\rangle\langle\chi\rangle - \langle\omega\rangle\langle\chi^2\rangle) +$$

$$+ 2\chi^{(\beta)}(\langle\omega\chi\rangle\langle\omega\rangle - \langle\chi\rangle\langle\omega^2\rangle) + \omega^{(\alpha)2}(\langle\chi^2\rangle - \langle\chi\rangle^2) +$$

$$+ \chi^{(\beta)2}(\langle\omega^2\rangle - \langle\omega\rangle^2) - 2\omega^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}(\langle\omega\chi\rangle - \langle\omega\rangle\langle\chi\rangle)] \qquad (2.16)$$

Рассмотренная модель показывает, что даже задача о статистически равновесной турбулентности в общем случае сложна. Сплошная среда имеет бесконечное число степеней свободы. Попытка использовать конечномерную аппроксимацию сталкивается с трудностями. Любое состояние должно быть получено из начального непрерывным дифференцируемым преобразованием, сохраняющим площади. В общем случае отсутствует малый параметр, позволяющий получить равновесное распределение сглаженных полей.

С другой стороны, коллективные эффекты, индуцируемые дополнительными инвариантами, дают надежду избавиться от влияния выбора степеней свободы на равновесное распределение. Простое приближение, подобное предложенному Брегтом и Вильямсом, дает простую решаемую модель. Возможность такого приближения зависит от значений интегралов движения, которые определяются начальными условиями. Для некоторых значений инвариантов корреляции могут стать сильными и корреляционный радиус r_c может быть порядка основного масштаба L. В этом случае рассматриваемая задача похожа на проблему критических явлений [18]. Параметр разложения отсутствует и невозможно вывести простые уравнения для сглаженного распределения завихренности.

Автор благодарен В. И. Петвиашвили и В. В. Янькову за полезные обсуждения работы [6]. Эти обсуждения стимулировали исследования роли коллективных эффектов, которые выполнены в настоящей работе.

Настоящая работа выполнена в рамках проекта Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-00081-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kraichnan R. H., Montgomery D.* Two-dimensional turbulence//Rep. on Progr. Phys. 1980. V. 43. № 5. P. 547—619.
2. *Новиков Е. А.* Статистическая необратимость турбулентности и передача энергии по спектру//Турбулентные течения. М.: Наука, 1974. С. 85—94.
3. *Kida S.* Statistics of the system of line vortices//J. Phys. Soc. Japan. 1975. V. 39. № 5. P. 1395—1404.
4. *Lundgren T. S., Pointin G. B.* Statistical mechanics of two-dimensional vortices//J. Stat. Phys. 1977. V. 17. № 5. P. 323—355.
5. *Петвиашвили В. И., Яньков В. В.* Солитоны и турбулентность//Вопросы теории плазмы. 1985. № 14. С. 3—55.
6. *Кузьмин Г. А.* Статистическая механика завихренности в двумерной когерентной структуре//Структурная турбулентность/Под ред. М. А. Гольдштика. Новосибирск: Ин-т теплофиз. СО АН СССР. 1982. С. 103—115.
7. *Robert R.* Etats d'equilibre statistique pour l'ecoulement bidimensionnel d'un fluide parfait//C. Roy. Acad. Sci. 1990. V. 311. Ser. 1. P. 575—578.
8. *Robert R., Sommeria J.* Statistical equilibrium states for two-dimensional flows//J. Fluid Mech. 1991. V. 229. P. 291—310.
9. *Lynden-Bell D.* Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems//Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1967. V. 136. № 3. P. 101—121.
10. *Zeitlin V.* Finite-mode analogs of 2D ideal hydrodynamics: Coajoint orbit and local canonical structure//Physica D. 1991. V. 49. P. 353—362.
11. *Zeitlin V.* Vorticity and waves: geometry of phase-space and the problem of normal variables//Phys. Lett. A. 1992. V. 164. P. 177—183.
12. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
13. *Kuz'min G. A.* Ideal incompressible hydrodynamics in terms of the vortex momentum density//Phys. Lett. A. 1983. V. 96. № 2. P. 88—90.
14. *Kuz'min G. A.* Lagrange invariants and equilibrium turbulence in two and three dimensions//Dynam. and Geometry Vortical Structur. Abstr. Euromech 305 symp. Cortona, June 28th-July 2th 1993. P. 67—68.
15. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 567 с.
16. *Хуанг К.* Статистическая механика. М.: Мир, 1966. 520 с.
17. *Хилл Т.* Статистическая механика М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 485 с.
18. *Паташинский А. З., Покровский В. Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1975. 368 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
12.IV.1994