МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1995

УДК 532.517.4:519.21

© 1995 г. В. Р. КУЗНЕЦОВ

СТРУКТУРА ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ КОНЦЕНТРАЦИИ С ОЧЕНЬ БОЛЬШИМИ АМПЛИТУДАМИ

В работе рассмотрена структура плотности вероятностей очень больших значений концентрации инертной примеси. Решение этой проблемы имеет важное значение для моделирования эмиссии окиси углерода и несгоревших углеводородов. Построена теоретическая модель, исходящая из представления о том, что: 1) размер областей, в которых наблюдаются пульсации концентрации с очень большими амплитудами,— порядка интегрального масштаба турбулентности, 2) вероятность их появления чрезвычайно мала. Показано, что существует некоторое предельно большое значение концентрации, в окрестности которого плотность вероятностей описывается степенной зависимостью. На основе теории локально-однородной турбулентности показано, что, вообще говоря, если не выполняются определенные соотношения между неизвестными величинами, входящими в теорию, плотность вероятностей очень больших значений концентраций зависит от числа Рейнольдса.

Проблема, сформулированная в заголовке работы, возникла при исследовании эмиссии окиси углерода камерами сгорания газотурбинных двигателей. В этих устройствах топливо и воздух подаются раздельно. Поэтому из-за турбулентного характера течения в них наблюдаются значительные флуктуации состава, который можно характеризовать восстановленной концентрацией горючего z (она равна концентрации горючего в отсутствие горения и описывается уравнением диффузии без источников). Особенность этих устройств — большой коэффициент избытка воздуха и резкая зависимость скорости реакции от температуры и, следовательно, от местного коэффициента избытка воздуха. Поэтому горение происходит в тонких зонах, расположенных вблизи поверхностей стехиометрического состава $z = z_s = \mathrm{const}$. По мере удаления от этих зон в «бедную» сторону факела концентрация окиси углерода исключительно быстро убывает, а в «богатую» сторону — быстро растет [1]. Из-за флуктуаций концентрации z зона реакции колеблется, т. е. в данной точке иногда наблюдаются богатые области, а иногда — бедные. Поскольку коэффициент избытка воздуха в камере очень велик, то на ее выходе вероятность наблюдения богатых областей мала. Тем не менее в них содержится столь много окиси углерода, что, как показывают расчеты [1], основной вклад в среднюю концентрацию окиси углерода дают именно эти области.

В силу сказанного проблема тесно связана с исследованием плотности вероятностей флуктуаций концентрации нереагирующей примеси с очень большими амплитудами. Один из главных вопросов в этой проблеме — влияние числа Рейнольдса. Действительно, справедливость принципа автомодельности по числу Рейнольдса (т. е. независимость от Re при Re → ∞) при описании вероятностей очень редких событий не доказана. В связи с этим решение вопроса о влиянии числа Рейнольдса имеет как теоретический интерес, так и практическую значимость при моделировании рабочего процесса в камере сгорания.

1. В настоящее время мало что известно о влиянии числа Рейнольдса на вероятность очень редких событий. Из общетеоретических соображений ясно, что колебания z ограничены некоторой величиной z_m, которая не больше максимального значения z на границах течения (если оно стационарно) или же

максимального значения z в начальный момент времени (если оно нестационарно). Первое исследование поведения величины z_m [2] основывалось на уравнении для плотности вероятностей концентрации $P(z)$, которое, исходя из уравнения диффузии нереагирующей примеси, можно записать в двух эквивалентных формах [3], справедливых для однородной турбулентности

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial^2 N_z P}{\partial z^2}, \quad N_z = \frac{1}{P(z)} \int NP(z, N)\, dN \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial \Delta_z P}{\partial z}, \quad \Delta_z = \frac{1}{P(z)} \int \Delta P(z, \Delta)\, d\Delta \qquad (1.2)$$

Здесь N_z, Δ_z — условно осредненные значения скалярной диссипации $N = D(\nabla z)^2$ и лапласиана $\Delta = D\Delta z$ соответственно, D — коэффициент молекулярной диффузии, $P(z, N)$, $P(z, \Delta)$ — совместные плотности вероятностей z и N, z и Δ. В [2—4] использовалось уравнение (1.1) и предполагалось, что z и N статистически независимы, поскольку обе эти величины определяются пульсациями с сильно различающимися масштабами. Было установлено [2], что z_m неизменно, а $P(z)$ является суммой регулярной и обобщенной функции, пропорциональной $\delta(z - z_m)$. Этот вывод справедлив в любой модели, в которой $N(z_m) \neq 0$, так как из условия сохранения нормы $P(z)$ и средней концентрации вытекает, что $NP = \partial NP/\partial z = 0$ при $z = z_m$ [5]. Поскольку все сказанное справедливо и для минимальной концентрации, то уравнение (1.1) приходится решать с четырьмя граничными условиями вместо двух, необходимых для решения уравнения второго порядка. Отсюда ясно, что при $N(z_m) \neq 0$ решения в классе регулярных функций не существует.

Впоследствие оказалось, что выводы теории [2—4] справедливы лишь частично: на краю течений со сдвигом, в области, где существенна перемежаемость, $P(z)$ имеет бимодальную структуру [6, 7], в которой один из пиков можно интерпретировать как размазанную дельта-функцию. Минимальное значение z при этом постоянно.

Максимальное значение z измерялось только в [8]. Установлено, что оно переменно по сечению затопленной круглой струи, а на ее оси справедлива оценка $z_m - \langle z \rangle \simeq 4 - 4{,}5\sigma$, где $\sigma = \langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle^{1/2}$ — среднеквадратичная концентрация. Таким образом, опыты [8] не подтвердили теорию [2].

Некоторое представление о структуре $P(z)$ при больших z дает работа [9] (однородная турбулентность с постоянным градиентом средней концентрации). Здесь зафиксированы пульсации с амплитудами вплоть до 8σ, а $P(z)$ менялось больше, чем на пять порядков.

2. При конечных числах Рейнольдса поле z описывается аналитической функцией, что, как будет видно далее, накладывает сильные ограничения на вид $P(z)$. Для наглядности геометрической интерпретации рассмотрим однородную турбулентность и предположим, что осреднение можно проводить по пространству. Выделим некоторый объем W и два уровня z и $z + \delta z$. Пусть средний объем между этими уровнями есть $\langle \delta W_z \rangle$. По определению

$$P(z)\, dz = \frac{\langle \delta W_z \rangle}{W}, \quad \Delta_z = \frac{1}{\langle \delta W_z \rangle} \left\langle \int D\Delta z d^3x \right\rangle$$

Далее важное значение имеет понятие о выбросах, т. е. об отдельных «кусках» распределения концентрации, расположенных выше определенного уровня. Определение выброса должно быть однозначно и поэтому имеет смысл только вблизи предельной концентрации, там, где ее распределение не имеет минимумов. Тогда выброс является односвязным куском. Однако с уменьшением уровня, относительно которого определяется выброс, отдельные куски могут сливаться друг с другом, что и вызывает определенные трудности с введением определения выброса. Здесь, однако, есть сильное упрощение, связанное с тем, что рассматриваются маловероятные события.

Действительно, рассмотрим вероятность того, что разность $z_m - z$ порядка σ. Как свидетельствуют экспериментальные данные [9], вероятность этого события мала. Следовательно, мал и суммарный объем таких областей. При этом выбросы могут встречаться часто (скажем, один раз в области с размером порядка интегрального масштаба турбулентности L), но объем каждого выброса очень мал. Этот случай следует исключить из рассмотрения, так как вещество, находящееся в таких выбросах, должно очень быстро смешиваться с окружающим пространством.

В другом случае объем каждого выброса порядка L^3, но выбросы встречаются очень редко. Тогда в последовательности максимумов сигнала обнаружатся группы близко расположенных максимумов, обусловленных внутренней структурой самого выброса. По таким группам и будет далее идентифицироваться выброс. При этом он не обязательно является односвязным. Выброс будем характеризовать высотой h самого высокого максимума.

Рассмотрим $B(h)\,dh$ — среднюю объемную плотность выбросов с высотами от h до $h+dh$ и $V(h, z)$ — средний объем, заключенный в этих выбросах между уровнями z и $z+dz$. Имеем

$$P(z) = \int\limits_z^{z_m} V(z, h)\, B(h)\, dh \tag{2.1}$$

Введем также величину $\delta(h, z)$, которая получается осреднением $D\Delta z$ по той части рассматриваемых выбросов, которая заключена между уровнями z и $z+$ $+\,dz$. Имеем

$$P(z)\, \Delta_z(z) = \int\limits_z^{z_m} V(z, h)\, \delta(z, h)\, B(z, h)\, dh \tag{2.2}$$

Структура функций V и δ вблизи уровня $z = h$ находится из геометрических соображений. Рассмотрим один выброс в системе координат, в которой тензор $a_{ik} = \partial^2 z/\partial x_i \partial x_k$, вычисляемый в точке $z = h$, приведен к главным осям. Имеем

$$z = h + 1/2\,(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2) + 1/6\, a_{ikl}x_i x_k x_l + 1/24\, a_{iklm}x_i x_k x_l x_m + \ldots \tag{2.3}$$

где x_k отсчитывается от положения самого высокого максимума в данном выбросе, а производные $a_{ikl} = \partial^3 z/\partial x_i \partial x_k \partial x_l$ и $a_{iklm} = \partial^4 z/\partial x_i \partial x_k \partial x_l \partial x_m$ вычисляются в этом максимуме. Преобразуем (2.3) по следующим формулам:

$$x_1 = \frac{r \cos\alpha \sin\beta}{\sqrt{-a_{11}}},\quad x_2 = \frac{r \sin\alpha \sin\beta}{\sqrt{-a_{22}}},\quad x_3 = \frac{r\cos\beta}{\sqrt{-a_{33}}}$$

Получим

$$z = h - 1/2\,(r^2 + r^3 f_3(\alpha, \beta) + r^4 f_4(\alpha, \beta) + \ldots) \tag{2.4}$$

$$f_3 = \frac{1}{3}\left[\frac{a_{111}}{(-a_{11})^{3/2}\cos^3\alpha \sin^3\beta} + \ldots\right]$$

$$f_4 = \frac{1}{12}\left[\frac{a_{1111}}{a_{11}^2 \cos^4\alpha \sin^4\beta} + \ldots\right]$$

Уравнение (2.4) описывает поверхность $r = F(h - z, \alpha, \beta)$, которая ограничивает объем W_r, заключенный выше уровня z. При малых $h - z$ в новой системе координат это шар радиусом $[2(h - z)]^{1/2}$. При этом малые отклонения от шара даются формулой (2.5) и для W_r находим

$$r = F = [2(h-z)]^{1/2} + f_3(h-z) + (5/4f_3^2 + f_4)\,2^{1/2}(h-z)^{3/2} \tag{2.5}$$

$$W_r = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{F} r^2 dr\, d\alpha \sin\beta\, d\beta =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{2^{1/2}}{3}(h-z) + 2f_3(h-z) + \left(2f_4 + \frac{7}{2}f_3^2\right)2^{1/2} + (h-z)^{5/2}\right] d\alpha \sin\beta\, d\beta \tag{2.6}$$

Легко проверить, что интеграл от второго слагаемого равен нулю, и поэтому

$$W_r = 4/3\,2^{3/2}(h-z)^{3/2} + A(h-z)^{5/2} + \ldots \tag{2.7}$$

где A — некоторая постоянная, зависящая от f_3 и f_4. В исходной системе координат объем выше уровня z есть $W = W_r(-a_{11}a_{22}a_{33})^{-1/2}$. Учитывая это обстоятельство, из определения величины V и формулы (2.7) находим

$$V = -\frac{d\langle W\rangle}{dz} = V_1(h-z)^{1/2} + V_2(h-z)^{5/2} + \ldots . \tag{2.8}$$

где V_1, V_2 — величины, определяемые статистикой второй, третьей, четвертой производной от z в точках максимума высотой h.

$$D\Delta z = Da_u + 1/2\,Da_{uk}x_k + 1/6\,Da_{ukl}x_kx_l + \ldots . \tag{2.9}$$

Сделаем то же преобразование системы координат и проинтегрируем (2.9) по объему, заключенному выше уровня z. Интеграл от первого слагаемого вычисляется просто:

$$\int_{r<F} Da_u d^3x = Da_u W_r$$

Для второго слагаемого с учетом (2.6) находим

$$\int_{r<F} Da_{uk}x_k d^3x = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{F} F_3 r^3 dr d\alpha \sin\beta d\beta =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(h-z)^2 + 2^{3/2}f_3(h-z)^{5/2} + \ldots]\,F_3 d\alpha \sin\beta d\beta$$

$$F_3 = \frac{D}{\sqrt{-a_{11}a_{22}a_{33}}}\left[\frac{a_{111}}{\sqrt{-a_{11}}}\cos\alpha\sin\beta + \ldots\right]$$

В этом выражении интеграл от первого слагаемого равен нулю. Поэтому разложение интеграла в ряд по степеням $h-z$ начинается с члена, пропорционального $(h-z)^{5/2}$. Интеграл от третьего слагаемого в (2.9) также в первом приближении пропорционален $(h-z)^{5/2}$. Отсюда имеем

$$\int_{r<F} D\Delta z d^3x = Da_u W_r + C(h-z)^{5/2} + \ldots . \tag{2.10}$$

где C — коэффициент, не зависящий от z. По определению δ и используя (2.8), (2.10), (2.11), находим

$$\delta = -\frac{1}{V}\frac{d}{dz}\left\langle \int_{r<F} D\Delta z d^3x\right\rangle = \delta_0(h,t) + \delta_1(h,t)(h-z) + \ldots \tag{2.11}$$

где δ_0, δ_1 — коэффициенты, определяемые статистикой поля производных различного порядка в точках максимума высотой h. Они зависят от h, t и не зависят от z.

3. Из соотношений (1.2), (2.1), (2.2), (2.8), (2.11) ясно, что вблизи предельного уровня в уравнение для плотности вероятностей входят коэффициенты, зависящие от числа Рейнольдса (они определяются статистикой поля производных от z). Поэтому $P(z)$ при $z \simeq z_m$ может существенно зависеть от числа Рейнольдса. Геометрическая интерпретация этого вывода довольно прозрачна: вблизи предельного уровня основной вклад в плотность вероятностей дает малая окрестность самых высоких максимумов, а характерный линейный размер этой окрестности сопоставим с колмогоровским масштабом.

Вопрос о том, влияет ли число Рейнольдса на структуру плотности вероятностей вне этой малой окрестности, не тривиален, даже если предположить, что эволюция каждого отдельного выброса (за исключением малой окрестности его самого высокого максимума) автомодельна по числу Рейнольдса. Влияние числа Рейнольдса в этом случае возможно из-за того, что по мере приближения к предельному уровню концентрации плотность выбросов B может сильно убывать и основной вклад в интеграл (2.1) будет давать малая окрестность точки $h = z$, в которой $V(z, h)$ и, следовательно, P будут зависеть от Re.

Чтобы проанализировать этот вопрос, предположим, что эволюция отдельного выброса автомодельна по числу Рейнольдса, т. е. его появление и развитие определяется крупномасштабными явлениями. Проанализируем структуру функций V и δ при малых значениях $h - z$, которые соответствуют областям малой пространственной протяженности. Тогда можно воспользоваться теорией локально-однородной турбулентности, в соответствии с которой все характеристики являются универсальными функциями переменных, обезразмеренных на колмогоровские масштабы длины η и времени τ. В теорию должен также входить и некоторый масштаб скалярного поля. Обычно при анализе безусловно осредненных структурных функций предполагается, что в определение этого масштаба входит только средняя скалярная диссипация $\langle N \rangle$. Здесь такой подход неприемлем, поскольку $\langle N \rangle$ есть характеристика всего поля в целом, а в данном случае рассматривается малая окрестность максимумов, где N близко к нулю.

Заметим, что $\langle N \rangle$ дает скорость затухания концентрационных неоднородностей в целом. Вблизи максимумов аналогичным смыслом обладает величина dz_m/dt. Исходя из уравнения диффузии, которое в точках максимума приобретает вид

$$\frac{\partial z}{\partial t} = D\Delta z \tag{3.1}$$

предположим, что концентрационный масштаб задается статистикой величины $D\Delta z$, рассматриваемой в точках максимума. Поскольку в данном подходе центральную роль играет эволюция максимумов высотой h, то можно также предположить, что концентрационный масштаб задается величиной $L_z(h) = -\delta(h, h)$, которая получена условным осреднением лапласиана $D\Delta z$ (знак здесь выбран так, чтобы $L_z > 0$). Следует обратить внимание на то, что введенный таким образом концентрационный масштаб обратно пропорционален масштабу времени.

Таким образом, все искомые величины определяются тремя масштабами η, τ и L_z. Величина V пропорциональна кубу линейного масштаба и обратно пропорциональна концентрационному масштабу, а величина δ пропорциональна концентрационному масштабу и обратно пропорциональна времени. Поэтому из соображений размерности имеем

$$V = \frac{\eta^3}{L_z\tau} v(s), \quad \delta = L_z d(s), \quad s = \frac{h - z}{L_z\tau} \tag{3.2}$$

где v и d — универсальные функции.

В силу (2.8) и (2.11) функции v и d при малых значениях аргумента s приобретают вид

$$v = v_1 s^{1/2} + v_2 s^{3/2} + \ldots, \quad d = -1 + d_1 s + \ldots \tag{3.3}$$

где v_1, v_2, d_1 — универсальные постоянные. Заметим, что первый член разложения функции d равен -1 в силу определения величины L_z. При больших значениях аргумента можно воспользоваться принципом автомодельности по числу Рейнольдса. Здесь по-прежнему предполагается, что эволюция выброса (она характеризуется величиной L_z) не зависит от Re.

Поскольку $\eta \sim \mathrm{Re}^{-3/4}$, $\tau \sim \mathrm{Re}^{-1/2}$, то в формулах (3.2) отсутствует зависимость от числа Рейнольдса, только если

$$v = v_0 s^{1/2}, \; d = d_0 \tag{3.4}$$

где v_0, d_0 — новые универсальные постоянные.

4. Полученные выше соотношения справедливы только в малой окрестности точки $h = z$. Как ясно из предыдущего анализа, эта окрестность определяется выражением $h - z \simeq L_z\tau$. В силу сказанного полученные формулы (3.2)—(3.4) можно использовать для замыкания уравнения (1.2) только в области $z_m - z \simeq L_z\tau$. Это оказывается достаточным, чтобы проанализировать влияние числа Рейнольдса на плотность вероятностей концентрации. В частности, из предыдущего анализа ясно, что в пространстве концентраций вблизи точки $z = z_m$ существует пограничный слой толщиной порядка $L_z\tau \sim \mathrm{Re}^{-1/2}$, в котором решение принципиально зависит от вязкости.

Здесь существует полная аналогия между структурой плотности вероятностей внутри пограничного слоя и структурой спектра турбулентности в области вязких масштабов. Продолжая эту аналогию, область $\sigma \gg z_m - z \gg L_z\tau$ можно назвать инерционным интервалом. Если принцип автомодельности по числу Рейнольдса справедлив, то в этой области решения не должны зависеть от вязкости. Далее будет видно, что это возможно не при любой функции d. Для этого рассмотрим автомодельные решения уравнения (1.2). Они имеют вид

$$P = \frac{1}{z_m} P^\circ(c), \; c = (z_m - z)/z_m$$

Подставляя эту формулу в (1.2) и интегрируя, получим

$$\frac{dz_m}{dt}\frac{d}{dc}(1 - c) P^\circ = \frac{d}{dc} P^\circ\Delta, \; \Delta = \frac{dz_m}{dt}(1 - c) \tag{4.1}$$

Наконец, из (2.1), (2.2), (3.2) и (4.1) приходим к основному уравнению

$$\int\limits_0^c v\left[\frac{(c-s)}{\varepsilon l(s)}\right]\left\{1 - c + l(s)\, d\left[\frac{(c-s)}{\varepsilon l(s)}\right]\right\} b(s)\, ds = 0 \tag{4.2}$$

$$s = \frac{(z_m - h)}{z_m}, \; l(s) = -\frac{L_z(s)}{(dz_m/dt)}, \; b(s) = \frac{\eta^3 B}{L_z\tau}, \; \varepsilon = -\frac{\tau}{z_m}\frac{dz_m}{dt}$$

Дальнейший анализ опирается на то, что параметр $\varepsilon \sim \mathrm{Re}^{-1/2}$ мал. Вводя растянутые переменные $c = \varepsilon l(0)\, x$, $s = \varepsilon l(0)\, y$, из уравнения (4.2) с точностью до членов порядка ε получаем

$$\int\limits_0^x v(x - y)\,[1 + l(0)\, d(x - y)]\, b(y)\, dy = 0 \tag{4.3}$$

Это уравнение имеет только тривиальное решение, в чем легко убедиться, используя преобразование Лапласа и теорему о свертке. Вместе с тем уравнение (4.2) может иметь нетривиальное решение. Действительно, рассмотрим его решения в области $c \ll \varepsilon$. Тогда функции v и d описываются формулами (3.3) и уравнение (4.2) приобретает вид

$$\int\limits_0^c (c - s)^{1/2}\left[1 - c - l(0) - l'(0)\, s + d_1\frac{(c-s)}{\varepsilon}\right] b\, ds = 0 \tag{4.4}$$

Если $l(0) \neq 1$, то при $c \to 0$ уравнение (4.4) приобретает вид (4.3) и поэтому имеет только тривиальное решение. Условие $l(0) = 1$ в развернутом виде записывается как

$$dz_m/dt = -L_z(z_m) \tag{4.5}$$

Его можно получить осреднением уравнения (3.1) по точкам максимума.

В рассматриваемом случае уравнение (4.4) имеет решение вида

$$b = \text{const}\, s^n, \;\; n = \frac{3d_1 + (2l'(0) + 5)\,\varepsilon}{2\,[1 + l'(0)]\,\varepsilon} \tag{4.6}$$

Отсюда видно, что если $d_1 \neq 0$, то показатель n очень велик. В этом случае решение (4.6) справедливо не только при $c \ll \varepsilon$, но и при $c \simeq \varepsilon$. Действительно, в этой области справедливо линейное разложение функции $l(s)$ и поэтому левая часть (4.2) есть сумма интегралов вида

$$\int_0^c f\left[\frac{c-s}{\varepsilon l}\right] s^a ds = [\varepsilon l(0)]^{a+1} \int_0^x f(x-y)\, y^a dy \tag{4.7}$$

При $a \gg 1$ подынтегральная функция имеет острый максимум, расположенный вблизи точки $y = x$. Следовательно, для вычисления интегралов (4.2) в области $x \simeq 1$ ($c \simeq \varepsilon$) можно использовать формулы (3.3). Поэтому решение (4.6) и справедливо в области $c \simeq \varepsilon$. Этот вывод имеет важное значение, поскольку принцип автомодельности по числу Рейнольдса предполагает, что асимптотику решений в вязкой области ($c \gg \varepsilon$) можно срастить с пределами решений в невязкой области при $c \to 0$. Формулы (4.6) свидетельствуют о том, что такое сращивание невозможно, так как функция b принципиально зависит от Re при всех значениях аргумента.

Таким образом, решение принципиально зависит от числа Рейнольдса не только в малой окрестности максимальной концентрации, но и во всей области, в которой понятие о выбросах сохраняет смысл. Заметим теперь, что принципу автомодельности по числу Рейнольдса отвечает только один вариант теории, а именно тот, в котором функция d является постоянной. Этот вывод обусловлен тем, что в противном случае снова приходим к уравнению (4.3), которое имеет только тривиальное решение. Проведенный выше анализ показывает, что в этом случае предел решения уравнения (4.2) при $\varepsilon \to 0$ равен нулю. При $d = \text{const}$ в силу (4.5) уравнение (4.2) приводится к виду

$$\int_0^x v(x-y)\,[l'(0)\,y + x]\, b(y)\, dy = 0 \tag{4.8}$$

При $x \ll 1$ решение по-прежнему имеет вид (4.6), где

$$n = -\,[2l(0) + 5]/2\,[1 + l'(0)] \tag{4.9}$$

Найдем теперь решение при $x \gg 1$. Для этого сначала предположим, что основной вклад в интеграл (4.8) дает область $y \simeq x$. Затем построим решение и убедимся, что нет противоречий со сделанным предположением. В рассматриваемой области $v = v_0 s^{7/2}$ и поэтому (4.8) имеет вид

$$\int_0^x (x-y)^{7/2}\,[l'(0)\,y + x]\, b(y)\, dy = 0 \tag{4.10}$$

В результате решения (4.10) получим

$$b = \text{const}\, x^m, \;\; m = -\,[2l'(0) + 11]/2\,[l(0) + 1] \tag{4.11}$$

Как ясно из (4.9) и (4.11), показатели m и n связаны соотношением $m = 3n + 2$.

Показатель $n > -1$, так как в противном случае b — неинтегрируемая функция. Тогда $m > -1$. Из (4.10) и (4.11) видно, что максимум подынтегрального выражения находится в точке $y \simeq x$, что и оправдывает использование формулы (3.4) при выводе уравнения (4.10).

Рассмотрим теперь структуру плотности вероятностей. При $x \to 0$ можно использовать формулы (2.1), (3.3) и (4.6). Имеем

$$P = \text{const} \int_0^x (x - y)^{1/2} y^n dy = \text{const}\, x^{n+3/2}$$

При больших x можно использовать формулы (2.1), (3.4) и (4.11). Находим

$$P = \text{const} \int_0^x (x - y)^{7/2} y^m dy = \text{const}\, x^{m+9/2}$$

Последняя формула имеет наиболее важное значение, поскольку она дает предел решения в невязкой области при стремлении к максимальной концентрации. Из нее видно, что плотность вероятностей стремится к нулю степенным образом. Из условия $m > -1$ заключаем, что показатель степени больше $7/2$.

Таким образом, применение теории локально-однородной турбулентности к исследованию структуры плотности вероятностей в области больших значений концентраций показывает, что возможны два варианта построения теории. В первом плотность вероятностей принципиально зависит от числа Рейнольдса в протяженной области значений концентрации (порядка ее дисперсии). Во втором зависимость от числа Рейнольдса наблюдается только в узкой окрестности максимальной концентрации (ее ширина порядка $\mathrm{Re}^{-1/2}$). Вопрос о том, какой из этих вариантов правилен, можно решить только экспериментально. Если принцип автомодельности по числу Рейнольдса справедлив, то по мере приближения к предельному уровню концентрации плотность вероятностей степенным образом стремится к нулю, а показатель степени больше $7/2$.

Работа получила финансовую поддержку Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17329) и Международного научного фонда (MDZ-000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Buriko Yu. Ya., Kuznetsov V. R., Volkov D. V. et al.* A test of a flamelet model for turbulent non-premixed combustion//Combustion and Flame. 1994. P. 104—120.
2. *Кузнецов В. Р.* Вероятность концентрации пассивной примеси в турбулентных потоках с поперечным сдвигом//Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 5. С. 85—91.
3. *Кузнецов В. Р., Сабельников В. А.* Турбулентность и горение. М.: Наука, 1986. 287 с.
4. *Кузнецов В. Р., Лебедев А. Б., Секундов А. Н., Смирнова И. П.* Исследование квазиоднородного турбулентного диффузионного горения с использованием уравнения для функции распределения плотности вероятности концентрации//Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 4. С. 3—11.
5. *Klimenko A. Yu., Bilger R. W.* Relationship between conserved scalar Pdf's and scalar dissipation in turbulent flows//Univ. Sydney, Charles Colling Res. Lab., Rept. TN-100, 1993.
6. *Birch A. D., Brown D. R., Dodson M. G., Thomas G. R.* The turbulent concentration field of a methane jet//J. Fluid Mech. 1978. V. 88. Pt 3. P. 438—449.
7. *Ebrahim I., Gunter R., Haberda F.* Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen der Konzentrazionen in isothermen Luft-Gasstrahlen//Ing.-Wes. 1977. B. 43. № 2. S. 47—52.
8. *Papantoniou D., List E. J.* Large-scale structure in the far field of buoyant jets//J. Fluid Mech. 1989. V. 209. P. 151—190.
9. *Jaesh, Warhaft Z.* Probability distribution, conditional dissipation, and transport of passive temperature fluctuations in grid-generated turbulence//Phys. Fluids A4. 1992. № 10. P. 2292—2306.

Москва

Поступила в редакцию 26.V.1994