

УДК 532.517:536.25:517.958

© 1995 г. Н. В. ПЕТРОВСКАЯ

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СФЕРОИДЕ ПРИ ИСЧЕЗАЮЩИХ ВЯЗКОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Изучается шестимерная модель тепловой конвекции вязкой жидкости в равномерно вращающемся эллипсоиде [1]. Рассматривается предельный случай, когда коэффициенты вязкости и теплопроводности стремятся к нулю при сохранении числа Прандтля Pr . С применением асимптотических и численных методов показано, что при $Pr > 2$ аттрактором является двумерный инвариантный тор или предельный цикл; соответствующие конвективные движения — квазипериодические с двумя базисными частотами или периодические. Показано также, что в процессе разрушения двумерных торов с ростом вязкости и теплопроводности основную роль играют резонансы на торе.

Шестимерная модель тепловой конвекции вязкой жидкости в равномерно вращающемся эллипсоиде [1] имеет вид

$$\dot{M} = [\omega, M + 2M_0] + g\beta [l, g] - \lambda M \quad (1)$$

$$\dot{q} = [\omega, g] + \delta (Q - q)$$

При построении модели (1) использован тот факт, что в случае идеальной конвекции задача имеет точные решения с пространственно-линейными полями скорости и температуры. Для таких решений вихрь ω и градиент температуры q зависят только от времени и удовлетворяют уравнениям (1) при $\lambda = 0$, $\delta = 0$ (λ и δ — эффективные коэффициенты вязкого трения и теплопередачи). В случае же вязкой и теплопроводной жидкости предполагается, что диссипативные эффекты существенны лишь в пограничном слое вблизи поверхности эллипсоида, а вне его поля скорости и температуры близки к пространственно-линейным полям, определяемым уравнениями (1) (см. [1, 2]).

Остальные обозначения в (1) следующие: момент M связан с ω соотношением $M = I\omega$, $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$, $I_k = \sum_{n=1}^3 a_n^2 - a_k^2$, $M_0 = I\Omega_0$, где a_k — полуоси эллипсоида; Ω_0 — угловая скорость вращения эллипсоида; g — ускорение силы тяжести; β — коэффициент теплового расширения жидкости; l — единичный вектор, определяющий направление силы тяжести; Q — постоянный градиент температуры, заданной на поверхности эллипсоида.

Будем считать, что эллипсоид вращательно-симметричен, а сила тяжести и угловая скорость вращения направлены вдоль его оси симметрии, ($a_1 = a_2$, $I_1 = -I_2$, $l = (0, 0, 1)$, $\Omega_0 = (0, 0, \Omega_{03})$). Тогда для ω_3 имеем $\dot{\omega}_3 = -\lambda\omega_3$, и достаточно исследовать систему (1) на устойчивой инвариантной плоскости $\omega_3 = 0$.

В случае идеальной конвекции ($\lambda = 0$, $\delta = 0$) система (1) близка к известным уравнениям Эйлера — Пуассона движения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой [3] (при $\Omega_0 = 0$ обе системы совпадают). Так же как и уравнения Эйлера —

Пуассона, модель идеальной конвекции имеет интегральный инвариант (фазовый объем) и три независимых первых интеграла

$$H = (\omega, M)/2 + g\beta(l, q), \quad G = (M + 2M_0, q), \quad R = (q, q) \quad (2)$$

— аналоги полной энергии, потенциального вихря и энтропии [1].

В рассматриваемом здесь вращательно-симметричном случае ω_3 является дополнительным четвертым интегралом и система (1) может быть проинтегрирована точно так же, как и уравнения Эйлера — Пуассона в интегрируемом случае Лагранжа [3]. Невырожденные совместные уровни интегралов являются двумерными торами. На каждом торе T^2 индуцируется динамическая система с инвариантной мерой μ . Соответствующие дифференциальные уравнения на T^2 записываются в угловых координатах θ, σ (θ — угол нутации, σ — также известный в теории волчка Лагранжа угол [3]) и инвариантная мера μ зависит только от θ .

Для изучения конвективных движений, определяемых уравнениями (1) в предельном случае, когда безразмерный параметр $\varepsilon = \delta \cdot I_1(2I_3\Omega_{03})^{-1}$ стремится к нулю при фиксированном числе Прандтля $Pg = \lambda/\delta$, применяется метод осреднения. Перечисленные выше особенности порождающей системы (системы (1) при $\lambda = 0, \delta = 0$) позволяют использовать для вывода осредненных уравнений первого приближения процедуру пространственного осреднения [4]. Уравнения для медленных переменных H, G, R получаются дифференцированием функций (2) в силу системы (1). Затем в предположении, что все функции в правых частях полученных уравнений являются решениями порождающей системы, они заменяются соответствующими средними значениями. Для непрерывной функции $f(\theta, \sigma)$ на T^2 ее среднее значение $\langle f \rangle$ вычисляется интегрированием по инвариантной мере μ

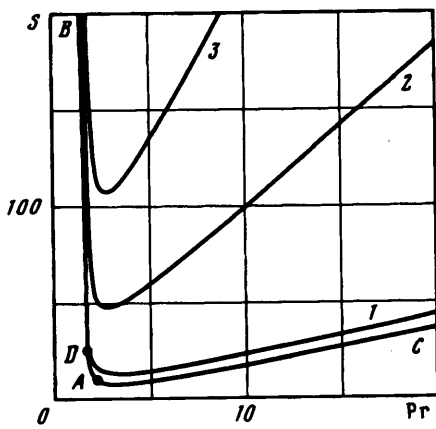
$$\langle f \rangle = \left[\int_{T^2} d\mu \right]^{-1} \int_{T^2} f(\theta, \sigma) d\mu$$

Следует отметить, что правые части полученной осредненной системы выражаются через полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем, зависящим от H, G, R . Подробности можно найти в [5]; там же проведен анализ равновесий осредненных уравнений (им отвечают порождающие двумерные торы) и доказываются существование двух семейств невырожденных порождающих торов.

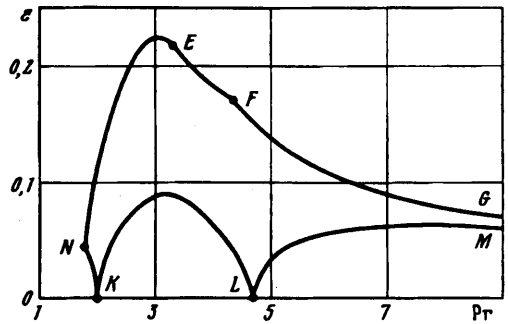
Одно из этих семейств порождает семейство устойчивых инвариантных двумерных торов, существующих в фазовом пространстве системы (1) при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Это означает, что в соответствующей области параметров установившиеся конвективные движения, описываемые моделью (1), являются либо квазипериодическими с двумя базисными частотами, либо периодическими — в случае резонанса на двумерном торе. Ниже приводятся результаты асимптотического и численного исследования бифуркаций устойчивых двумерных торов при малых ε и соответствующих перестройках установившихся конвективных движений.

Оказывается, что в пространстве параметров задачи область существования устойчивых двумерных инвариантных торов ограничена двумя бифуркационными поверхностями. На одной из них рождается «из воздуха» пара инвариантных торов (устойчивый и неустойчивый), на другой — двумерный тор возникает из предельного цикла. Рассчитаны также резонансные области, для которых число вращения ν на двумерном торе принимает значения $1/2, 1/3, 1/4$ и 0.

Предельные при $\varepsilon \rightarrow 0$ бифуркационные значения параметров вычисляются достаточно просто, путем анализа соответствующих бифуркаций порождающих торов (т. е. равновесий осредненных уравнений). Бифуркационная диаграмма на плоскости $\varepsilon = 0$ приведена на фиг. 1, где по осям отложены число Прандтля Pg и безразмерный параметр $S = Q_3 I_1 g \beta (4 I_3 \Omega_{03}^2)^{-1}$, пропорциональный вертикальной



Фиг. 1



Фиг. 2

составляющей градиента температуры Q на границе области. Кривым AB и AC отвечают соответственно бифуркации рождения пары порождающих торов (с ростом числа Прандтля Pr) и возникновение порождающего тора из цикла (с ростом S). Остальные кривые на фиг. 1 — следы резонансных «язычков». Все они начинаются на бифуркационной кривой AB . Кривая I , начинающаяся в точке D , определяется равенством $\nu = 0$, а кривые 2 и 3 — равенствами $\nu = 1/4$ и $1/3$. Вообще, при фиксированном Pr число вращения ν монотонно растет вместе с S и при достаточно больших S наблюдается еще и резонанс $1:2$ на порождающем торе. Разумеется, возможны и другие резонансы; соответствующие резонансные кривые имеют такой же вид.

Если вектор Q не слишком отклоняется от вертикали, бифуркационные диаграммы на плоскостях $\varepsilon = \varepsilon_0$ при малых ε_0 выглядят аналогично, только резонансные кривые заменяются узкими полосками — сечениями резонансных областей. Это объясняет наблюдаемые в вычислениях перестройки установившихся конвективных движений при изменении параметров задачи.

При $Pr > 2$ для достаточно малых S (если точка (Pr, S) лежит ниже кривой AC) с течением времени устанавливается периодический режим движения. Он характеризуется тем, что в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ вихрь ω и градиент температуры q коллинеарны и равномерно вращаются в плоскости симметрии эллипсоида. С ростом параметра S из соответствующего предельного цикла рождается двумерный инвариантный тор, который существует, по-видимому, при сколь угодно больших S . Чередование квазипериодических и периодических режимов движения объясняется прохождением параметров через резонансные области.

Перечисленные выше резонансы играют важную роль в разрушении двумерных инвариантных торов с ростом ε . Резонансные области весьма обширны — см. фиг. 2, где приведено сечение такой области, отвечающей резонансу $1:3$, плоскостью $S = 130$. Поэтому типичен следующий сценарий: после чередования квазипериодических и сложных периодических движений в результате сильного резонанса на двумерном торе ($\nu = 1/2, 1/3, 1/4$ или 0) возникает простой устойчивый предельный цикл (кривые NK, KL и LM на фиг. 2). Далее он либо теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода (кривые NE и FG на фиг. 2), либо гибнет, сливаясь с неустойчивым предельным циклом (кривая EF). При этих значениях ε двумерный тор уже разрушен [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17337) и Программы фундаментального естествознания (СПб), грант 1994 г. Автор благодарит В. И. Юдовича за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Должанский Ф. В. Вынужденная конвекция жидкости внутри эллипсоидальной полости//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1973. Т. 9. № 6. С. 563—572.
2. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов Е. М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 366 с.
3. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
4. Аносов Д. В. Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями//Изв. АН СССР. Сер. мат. 1960. Т. 24. № 5. С. 721—742.
5. Петровская Н. В. Предельные режимы конвекции во вращающемся сфероиде при исчезающей вязкости и теплопроводности. Ростов-на-Дону. 1993. Деп. в ВИНТИ 5.08.93, № 2223-В93.
6. Афраймович В. С., Шильников Л. П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность//Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1983. С. 3—26.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
27.IV.1994