

УДК 532.5.013.4:536.252

© 1995 г. К. А. НАДОЛИН

О ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА В ЗАДАЧЕ РЭЛЕЯ — БЕНАРА

Изучается неустойчивость механического равновесия и возникновение плоских стационарных конвективных течений в подогреваемом снизу бесконечном горизонтальном слое жидкости (задача Рэлея — Бенара). Рассмотрена модель конвекции изотермически несжимаемой жидкости, не предполагающая (в отличие от приближения Обербека — Буссинеска) малости теплового расширения. Численно исследовано влияние на конвективный процесс дополнительного параметра теплового расширения. Результаты сопоставлены с известными для приближения Обербека — Буссинеска. Установлено, что при увеличении параметра теплового расширения возможна докритическая неустойчивость. Применяются метод линеаризации и метод Ляпунова — Шмидта.

1. Постановка задачи. Пусть жидкость, удельный объем которой линейно зависит от температуры, заполняет бесконечный горизонтальный слой толщины L , на нижней и верхней границах которого поддерживаются температуры T_1 и T_2 соответственно. Предположим, что коэффициенты динамической вязкости, теплопроводности и удельная теплоемкость жидкости постоянны, а работой сил давления и вязкой диссипацией энергии можно пренебречь. Введем систему координат x, y, z так, что ось z направлена вертикально вверх, а оси x и y лежат в плоскости нижней границы слоя. За масштабы длины, температуры и скорости примем толщину слоя L , перепад температуры $\theta = |T_1 - T_2|$ и скорость конвективного всплытия нагретой жидкой частицы $v^* = \sqrt{gL\alpha\theta^2}$, где g — величина ускорения свободного падения и α — коэффициент теплового расширения жидкости. Температуру будем отсчитывать от температуры нижней границы T_1 .

Уравнения свободной конвекции в безразмерных переменных с учетом принятых предположений можно записать в виде

$$V = 1 + \beta T, \quad \rho_t + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (1.1)$$

$$v_t + v \cdot \nabla v = V(-\nabla p + \mu \Delta v) + Tk, \quad T_t + v \cdot \nabla T = V\delta \Delta T$$

$$\beta = \alpha\theta, \quad \mu = \eta(\rho^*Lv^*)^{-1}, \quad \delta = \kappa(c_p\rho^*Lv^*)^{-1}$$

где $v = (v_x, v_y, v_z)$ — вектор скорости; T — температура; p — отклонение давления от гидростатического с учетом действия сил вязкости; V и $\rho = V^{-1}$ — удельный объем и плотность жидкости соответственно; β — параметр теплового расширения; μ — параметр кинематической вязкости; δ — число Фурье; η, κ, c_p — коэффициенты динамической вязкости, теплопроводности и удельная теплоемкость жидкости; ρ^* — плотность жидкости при температуре T_1 ; k — орт оси z . Точка между векторами означает их скалярное произведение.

Граничные условия для температуры и скорости в безразмерных переменных возьмем в виде

$$z = 0: T = 0, \quad z = 1: T = c \quad (1.2)$$

$$z = 0, \quad z = 1: v = 0 \quad (1.3)$$

$$z = 0, \quad z = 1: \quad v_z = v_{x,z} = v_{y,z} = 0 \quad (1.4)$$

$$z = 0: \quad v = 0, \quad z = 1: \quad v_z = v_{x,z} = v_{y,z} = 0 \quad (1.5)$$

где $c = \text{sign}(T_2 - T_1)$ и буква после запятой в индексе означает дифференцирование по этой переменной.

Условия (1.3) и (1.4) отвечают твердым и свободным недеформируемым границам соответственно, а условия (1.5) — твердой нижней и свободной верхней границам.

Со времен Рэлея, впервые изучившего возникновение свободной конвекции в слое как задачу устойчивости, наиболее распространенной среди исследователей математической моделью конвекции является приближение Обербека — Буссинеска. Уравнения свободной конвекции в этом приближении выводятся на основе того предположения, что тепловое расширение жидкости мало и учитывать его следует лишь в архимедовой силе, которая является причиной конвективного движения (см., например, [1] и цитируемую там литературу). Обоснованием и анализом применимости приближения Обербека — Буссинеска занимались многие ученые. Ряд авторов отмечают математическую непоследовательность в выводе уравнений Обербека — Буссинеска: считаются несущественными и отбрасываются члены исходных уравнений того же порядка, что и сохраняемая архимедова сила.

В отличие от приближения Обербека — Буссинеска в рассматриваемой модели (1.1)—(1.5) не предполагается малость теплового расширения жидкости и удержаны все члены, содержащие параметр теплового расширения β . Учитывая принятые в постановке задачи предположения, уравнения (1.1) естественно называть приближением изотермически несжимаемой жидкости [2, 3].

Следует отметить, что данные многочисленных экспериментов хорошо согласуются с теоретическими и численными результатами, полученными на основе приближения Обербека — Буссинеска. Однако ряд авторов отмечают расхождение для экспериментов, проводимых в особых условиях (малая глубина конвективного слоя, пониженная гравитация, аномалия теплового расширения, сверхнизкая или сверхвысокая средняя температура и т. п.).

Модель изотермически несжимаемой жидкости обобщает приближение Обербека — Буссинеска в том смысле, что переходит в него, если параметр β положить равным нулю. Это позволяет ставить вопрос о количественной оценке совпадения результатов для приближения Обербека — Буссинеска и уточненного приближения изотермически несжимаемой жидкости. Далее изучается влияние параметра теплового расширения β на неустойчивость механического равновесия и возникновение плоских стационарных конвективных движений в задаче (1.1)—(1.5).

2. Уравнения для возмущений. Краевые задачи (1.1)—(1.5) имеют стационарное решение, отвечающее механическому равновесию жидкости с линейным профилем температуры

$$v_0 = 0, \quad T_0 = cz, \quad p_0 = \frac{1}{\beta} \left[z - \frac{1}{c\beta} \ln(1 + c\beta z) \right] + \text{const} \quad (2.1)$$

Новые периодические в горизонтальной плоскости решения v' , T' , p' , для которых средний градиент давления по любому из горизонтальных направлений равен нулю, ищем в виде

$$v' = v_0 + \delta v, \quad p' = p_0 + \mu \delta p, \quad T' = T_0 + T \quad (2.2)$$

где v , p , T — неизвестные. Подставляя (2.2) в (1.1) с учетом (2.1) и делая замену времени $t = \delta^{-1}t$, придем к нелинейной системе для возмущений v , p , T

$$V = V_0 + \beta T, \quad \rho_t + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{Pr}^{-1} (v_t + v \cdot \nabla v) = V (-\nabla p + \Delta v) + \text{Ra} \rho_0 T_k$$

$$T_t + v \cdot \nabla T = V \Delta T - cv_z$$

Здесь $V_0 = 1 + c\beta z$ и $\rho_0 = V_0^{-1}$ — соответственно удельный объем и плотность жидкости в равновесии (2.1), $Pr = \mu\delta^{-1}$ — число Прандтля и $Ra = (\mu\delta)^{-1}$ — число Рэлея. Из (1.2) получаем граничные условия для возмущения температуры

$$z = 0, \quad z = 1: \quad T = 0 \quad (2.4)$$

Для возмущения скорости v граничные условия сохраняют вид (1.3)—(1.5). Линеаризованные уравнения (2.3) имеют вид

$$Pr^{-1} \rho_0 v_t = -\nabla p + \Delta v + Ra \rho_0^2 T k \quad (2.5)$$

$$\rho_0 T_t = \Delta T - c\rho_0 v_z, \quad \beta \rho_0^2 T_t = \nabla \cdot (\rho_0 v)$$

Соответствующие уравнениям (2.3) и (2.5) стационарные системы представим в виде

$$\nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad \Delta T - c\rho v_z = \rho v \cdot \nabla T \quad (2.6)$$

$$\Delta v - \nabla p + Ra \rho \rho_0 T k = \rho Pr^{-1} v \cdot \nabla v$$

$$\nabla \cdot (\rho_0 v) = 0, \quad \Delta v - \nabla p + Ra \rho_0^2 T k = 0, \quad \Delta T - c\rho_0 v_z = 0 \quad (2.7)$$

Заметим, что плотность жидкости ρ_0 уже не постоянна, а зависит от вертикальной координаты, что создает неустойчивую стратификацию жидкости в механическом равновесии. Это должно приводить к уменьшению критического градиента температуры, что и наблюдалось в [4]. Естественно ожидать, что возникающие конвективные процессы будут протекать более интенсивно, чем это имеет место для модели Обербека — Буссинеска, т. е. амплитуда вторичного конвективного течения должна возрастать при увеличении параметра теплового расширения.

3. Линейный анализ устойчивости. Периодические решения (2.5), (2.4), (1.3)—(1.5) ищем в виде нормальных возмущений [1]

$$(v, T, p)(x, y, z, t) = (v, T, p)(z) \exp(\sigma t + i\alpha_x x + i\alpha_y y) \quad (3.1)$$

Подставив (3.1) в (2.5), (2.4), (1.3)—(1.5) и разделив переменные, получим спектральные задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(D - c\beta\rho_0) w + F = \sigma\beta\rho_0 T, \quad (D^2 - \alpha^2) F + \alpha^2 p = \sigma Pr^{-1} \rho_0 F \quad (3.2)$$

$$(D^2 - \alpha^2) w - Dp + Ra \rho_0^2 T = \sigma Pr^{-1} \rho_0 w, \quad (D^2 - \alpha^2) T - c\rho_0 w = \sigma\rho_0 T$$

$$z = 0, \quad z = 1: \quad T = w = F = 0 \quad (3.3)$$

$$z = 0, \quad z = 1: \quad T = w = DF = 0 \quad (3.4)$$

$$z = 0: \quad T = w = F = 0, \quad z = 1: \quad T = w = DF = 0 \quad (3.5)$$

где $D = d/dz$, $\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2$, $w = v_z(z)$ и $F = i(\alpha_x v_x(z) + \alpha_y v_y(z))$, причем выполнено $\alpha_x v_y(z) = \alpha_y v_x(z)$.

Для приближения Обербека — Буссинеска ($\beta = 0$, $V_0 = \rho_0 = 1$) доказано [5], что неустойчивость возможна, лишь когда градиент температуры направлен противоположно силе тяжести ($Ra > 0$). При этом собственные значения σ остаются вещественными, а критические числа Рэлея определяются из условия $\sigma = 0$ (принцип монотонной смены устойчивости).

Будем предполагать, что для рассматриваемой модели также имеет место принцип монотонной смены устойчивости. Оправдание такого предположения состоит в следующем. Собственные значения σ_j , $j = 1, 2, \dots$, краевых задач (3.2)—(3.5) являются решениями трансцендентного уравнения, означающего вырожденность вронскиана соответствующей задачи. Известно, что при $\beta = 0$

(приближение Обербека — Буссинеска) все σ_j вещественные. Тогда, исходя из общих принципов теории возмущений, следует ожидать, что σ_j останутся вещественными и при достаточно малых β . Зависимость первых шести собственных значений σ_j , $j = 1, \dots, 6$, от параметра теплового расширения β подробно изучена численно [2]. Результаты расчетов показали, что вещественные при $\beta = 0$ инкременты σ_j остаются вещественными по крайней мере до первой потери устойчивости. Непосредственный поиск колебательной неустойчивости также не увенчался успехом. Для случая двух свободных изотермических границ (3.2), (3.4) построена асимптотика собственных значений при малых β и показана вещественность двух старших членов разложения. Приведенные выше рассуждения и проделанные расчеты нельзя рассматривать как доказательство невозможности колебательной неустойчивости в исследуемой модели конвекции, однако это некоторые аргументы в пользу предположения о монотонном характере первой потери устойчивости равновесием (2.1).

В [4] представлен линейный анализ монотонной неустойчивости кондуктивного режима и построены нейтральные кривые для различных краевых условий. Выяснено, что поправка к критическому числу Рэлея оказывается первого порядка по β для всех рассмотренных типов краевых условий. Обработка результатов расчетов дает приближенные зависимости

$$Ra_* = Ra_0 (1 - 1,487\beta + 0,529\beta^2), \quad Ra_0 = 1707,7$$

для двух твердых стенок (3.3) и

$$Ra_* = Ra_0 (1 - 1,543\beta + 0,567\beta^2), \quad Ra_0 = 1100,6$$

для краевых условий (3.5), где Ra_0 и Ra_* — минимальные критические значения числа Рэлея в приближениях Обербека — Буссинеска и изотермически несжимаемой жидкости соответственно. В случае двух свободных границ (3.4) аналитически получен первый член разложения критического числа Рэлея в ряд по степеням β

$$Ra_* = Ra_0 (1 - \frac{3}{2}\beta + o(\beta)), \quad Ra_0 = 657,5$$

Ряд авторов [6—9] отмечают, что учет теплового расширения дает поправку второго порядка к критическим значениям числа Рэлея. Здесь следует отметить, что, когда учитывается зависимость удельного объема от температуры, важен выбор его характерного значения, участвующего в определении числа Рэлея. При симметричных граничных условиях это значение можно выбрать так, что сохранится симметрия рассматриваемой задачи относительно середины слоя. Тогда поправка к критическим числам Рэлея оказывается второго порядка по β .

Заметим, что экспериментальные исследования свободной конвекции, в которых было зафиксировано снижение пороговых значений числа Рэлея, описаны в [10—13].

4. Расчет двумерных вторичных течений. Задачи (2.6), (2.4), (1.3)—(1.5) инвариантны относительно преобразований сдвига и отражения горизонтальной плоскости. Это позволяет применить теорию, развитую в [14] аналогично тому, как это сделано в [15] для задачи о двоякопериодической конвекции в приближении Обербека — Буссинеска. Из результатов [15] следует, что в случае общего положения для волновых чисел α_x и α_y от состояния равновесия (3.1) в момент потери устойчивости отвечают три различных режима конвекции, один из которых — прямоугольники, а два других — валы, ориентированные вдоль осей x и y соответственно. Будем рассматривать плоскую валиковую конвекцию, которая оказывается в случае приближения Обербека — Буссинеска устойчивой относительно возмущений той же периодичности [1, 16].

Для плоской конвекции результаты [14, 17] позволяют рассмотреть задачу на подпространстве функций определенной четности. Это значительно упрощает дело, так как собственное число линейной задачи (2.7) оказывается простым почти для всех значений периода, вторичное же течение определяется однозначно с точностью до сдвига вдоль слоя.

Для нахождения вторичных течений в виде двумерных конвективных валов, возникающих при потере устойчивости кондуктивным режимом (2.1) и ориентированных вдоль оси y , применим метод Ляпунова — Шмидта в форме, развитой в [14]. Пусть $\Phi = (v, T, p)$ — вектор неизвестных, причем v и T удовлетворяют граничным условиям (1.3)—(1.5) и (2.4) соответственно. Решения краевых задач (2.6), (2.4), (1.3)—(1.5), отвечающие возникающему вблизи Ra_* вторичному плоскопериодическому течению, имеют вид

$$\Phi = \varepsilon \lambda \left(\pm \frac{\Psi + \bar{\Psi}}{2} + \varepsilon \lambda \frac{\xi + \bar{\xi}}{2} \right) + O(\varepsilon^3) \quad (4.1)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\text{sign}(I_1/I_2) (Ra - Ra_*)}$$

где амплитуда $\lambda = \sqrt{|I_1/I_2|}$ определяется из уравнения разветвления (вид функционалов I_1 и I_2 указан ниже); ε — околособственность, причем полуокрестность Ra_* , где существуют решения (4.1), определяется из условия положительности подкоренного выражения

$$\varphi = \left(-\frac{i}{\alpha_x} F_1, 0, w_1, T_1, p_1 \right) (z) \exp(i\alpha_x x)$$

$$\xi = (0, 0, w_{20}, T_{20}, p_{20}) (z) + \left(-\frac{i}{2\alpha_x} F_{21}, 0, w_{21}, T_{21}, p_{21} \right) (z) \exp(2i\alpha_x x)$$

Функции $F_1(z)$, $w_1(z)$, $T_1(z)$ и $p_1(z)$ являются компонентами собственных векторов однородных краевых задач для системы шести линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных из задач (2.7), (2.4), (1.3)—(1.5) после отделения переменной x и введения обозначений $\alpha^2 = \alpha_x^2$, $w_1 = v_x$, $F_1 = i\alpha_x v_x$

$$(D + \beta\rho_0) w_1 + F_1 = 0, \quad (D^2 - \alpha^2) F_1 + \alpha^2 p_1 = 0$$

$$(D^2 - \alpha^2) w_1 - Dp_1 + Ra_* \rho_0^2 T_1 = 0, \quad (D^2 - \alpha^2) T_1 + \rho_0 w_1 = 0$$

$$z = 0, \quad z = 1: \quad T_1 = w_1 = F_1 = 0$$

$$z = 0, \quad z = 1: \quad T_1 = w_1 = DF_1 = 0$$

$$z = 0: \quad T_1 = w_1 = F_1 = 0, \quad z = 1: \quad T_1 = w_1 = DF_1 = 0$$

$$\int_0^1 w_1^2(z) dz = 1$$

Последнее условие задает нормировку собственных векторов. Функции $w_{20}(z)$, $T_{20}(z)$, $p_{20}(z)$, $F_{21}(z)$, $w_{21}(z)$, $T_{21}(z)$, $p_{21}(z)$ являются решениями неоднородных краевых задач, возникающих в результате отделения переменных в уравнениях второго приближения метода Ляпунова — Шмидта

$$D(\rho_0 w_{20}) = \frac{1}{2} \beta D(\rho_0^2 w_1 T_1)$$

$$D^2 w_{20} - Dp_{20} + Ra_* \rho_0^2 T_{20} = \frac{1}{2} \rho_0 [\text{Pr}^{-1} w_1 (Dw_1 - F_1) + \beta Ra_* \rho_0^2 T_1^2]$$

Pr	$\beta = 0$	0,2	0,4	0,6	0,8
----	-------------	-----	-----	-----	-----

Твердые границы (1.3), (2.4)

0,1	0,123	0,130	0,140	0,155	0,183
1,0	0,182	0,194	0,216	0,266	0,617
10,0	0,183	0,195	0,217	0,269	0,695
100,0	0,183	0,195	0,217	0,269	0,701

Свободные границы (1.4), (2.4)

0,1	0,300	0,319	0,351	0,418	0,704
1,0	0,300	0,322	0,371	0,530	0,613 *
10,0	0,300	0,323	0,374	0,534	0,551 *
100,0	0,300	0,323	0,374	0,537	0,546 *

Твердая нижняя граница и свободная верхняя (1.5), (2.4)

0,1	0,141	0,154	0,172	0,206	0,303 *
1,0	0,228	0,248	0,289	0,411	0,524 *
10,0	0,227	0,248	0,290	0,423	0,479 *
100,0	0,227	0,248	0,290	0,424	0,475 *

* Ветвление докритическое.

$$D^2 T_{20} + \rho_0 w_{20} = \frac{1}{2} \rho_0^{-1} D (\rho_0^2 w_1 T_1)$$

$$D (\rho_0 w_{21}) + \rho_0 F_{21} = \beta \left[\frac{1}{2} D (\rho_0^2 w_1 T_1) + \rho_0^2 F_1 T_1 \right]$$

$$(D^2 - 4\alpha^2) F_{21} + 4\alpha^2 p_{21} = \text{Pr}^{-1} \rho_0 (F_1^2 + w_1 D F_1)$$

$$(D^2 - 4\alpha^2) w_{21} - D p_{21} + \text{Ra}_* \rho_0^2 T_{21} = \frac{1}{2} \rho_0 [\text{Pr}^{-1} w_1 (D w_1 + F_1) + \beta \text{Ra}_* \rho_0^2 T_1^2]$$

$$(D^2 - 4\alpha^2) T_{21} + \rho_0 w_{21} = \frac{1}{2} \rho_0^{-1} D (\rho_0^2 w_1 T_1) + \rho_1 F_1 T_1$$

$$z = 0, z = 1: w_{20} = T_{20} = w_{21} = T_{21} = F_{21} = 0$$

$$z = 0, z = 1: w_{20} = T_{20} = w_{21} = T_{21} = D F_{21} = 0$$

$$z = 0: w_{20} = T_{20} = w_{21} = T_{21} = F_{21} = 0, z = 1: w_{20} = T_{20} = w_{21} = T_{21} = D F_{21} = 0$$

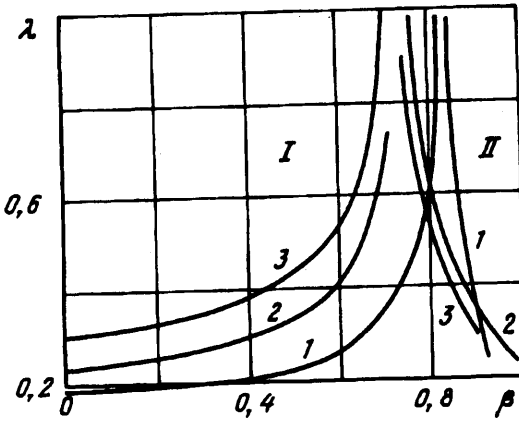
Функционалы I_1 и I_2 определяются по коэффициентам уравнения разветвления и имеют вид

$$I_1 = \int_0^1 \rho_0^2 T_1(z) u(z) dz \quad (4.2)$$

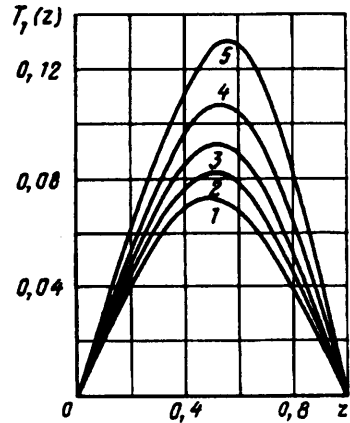
$$I_2 = \int_0^1 [K_1(z) (\text{Ra}_* \theta(z) + \beta \rho_0 q(z)) + K_2(z) G(z) + K_3(z) u(z)] dz$$

где $G(z)$, $u(z)$, $\theta(z)$ и $q(z)$ — компоненты собственных векторов линейных однородных краевых задач

$$D u + G = 0, \quad (D^2 - \alpha^2) G + \alpha^2 \rho_0 q = 0$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$(D^2 - \alpha^2) u - \rho_0 Dq + \rho_0 Ra_* \theta = 0, \quad (D^2 - \alpha^2) \theta + \rho_0^2 u = 0$$

$$z = 0, z = 1: u = G = \theta = 0$$

$$z = 0, z = 1: u = DG = \theta = 0$$

$$z = 0: u = G = \theta = 0, \quad z = 1: u = DG = \theta = 0$$

полученных при отделении переменных и введении обозначений $u = U_x$, $G = i\alpha_x U_x$ из линейных краевых задач в частных производных, сопряженных (2.7), (2.4), (1.3)–(1.5) относительно скалярного произведения

$$\int_0^1 \int_{-\pi/\alpha_y}^{\pi/\alpha_y} \int_{-\pi/\alpha_x}^{\pi/\alpha_x} (v \cdot \bar{U} + Ra_* T \bar{\theta} + p \bar{q}) dx dy dz$$

Функции $K_1(z)$, $K_2(z)$ и $K_3(z)$ определяются следующим образом:

$$K_1 = \frac{1}{2} \rho_0 [2w_1 DT_{20} + w_1 DT_{21} - T_{21} Dw_1 + w_{21} DT_1 - T_1 Dw_{21} - 3F_1 T_{21} - \frac{3}{2} F_{21} T_1 + \beta \rho_0 (2w_1 T_{20} + T_1^2 F_1)]$$

$$K_2 = \frac{1}{4} (\alpha^2 Pr)^{-1} \rho_0 [w_1 DF_{21} - 2w_{21} DF_1 - F_1 F_{21} + \beta \rho_0 T_1 (w_1 DF_1 - F_1^2)]$$

$$K_3 = \frac{1}{2} \rho_0 \{ Pr^{-1} [w_{21} (Dw_1 - 2F_1) + w_1 (Dw_{21} - \frac{1}{2} F_{21})] + \frac{1}{2} \beta \rho_0 [Pr^{-1} w_1^2 (2DT_1 + \beta \rho_0 T_1) + \rho_0 Ra_* T_1 (8T_{20} + 4T_{21} - 3\beta \rho_0 T_1^2)] \}$$

Для определения характера ответвления решений (4.1) от состояния покоя (2.1) и вычисления значений λ использовалось программное обеспечение, разработанное на кафедре вычислительной математики и математической физики, а также кафедре информатики и вычислительного эксперимента Ростовского университета.

Расчеты проводились в точках минимума нейтральных кривых, отвечающих заданному значению параметра теплового расширения β [4]. Для различных значений числа Прандтля параметр β изменялся от 0, что соответствует приближению Обербека — Буссинеска, до 0,98. Рассмотрены три случая изотермических граничных условий: обе границы твердые (1.3), (2.4); обе границы свободные (1.4), (2.4); нижняя граница твердая, а верхняя свободная (1.5), (2.4).

Зависимость амплитуды возникающего вторичного течения от β при различных

значениях числа Прандтля приведена в таблице и на фиг. 1. Кривые 1 отвечают граничным условиям (1.3), кривые 2 — граничным условиям (1.4) и кривые 3 — условиям (1.5). В области I ветвление сверхкритическое, а в области II — докритическое. Заметим, что, как и в случае приближения Обербека — Буссинеска, I_2 в (4.2) — квадратный трехчлен от Pr^{-1} [2], что позволяет полностью определить зависимость амплитуды λ от числа Прандтля по результатам расчетов при трех различных значениях числа Прандтля.

На фиг. 2 изображены графики температурной компоненты $T_1(z)$ собственного вектора φ при различных значениях β для случая двух твердых границ (1.3): 1 — $\beta = 0$, 2 — 0,2, 3 — 0,4, 4 — 0,6, 5 — 0,8. При других граничных условиях вид функции $T_1(z)$ сохраняется. Отметим, что в рассматриваемой модели конвекции бывает докритическое ветвление, в то время как для модели Обербека — Буссинеска это невозможно.

Автор благодарит В. И. Юдовича за ценные советы, а также Российский фонд фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01142-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Надолин К. А. Численное исследование математических моделей свободной конвекции изотермически несжимаемой жидкости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. 04900003768. Ростов-на-Дону, 1989. 187 с.
3. Pukhnachov V. V. Model of convective motion under low gravity//Proc. 8th Europ. Symp. Materials Fluid Science Microgravity. Bruxelles, Belgium: Univ. Libre de Bruxelles. 1992. P. 157—160.
4. Надолин К. А. Численное исследование возникновения конвекции в горизонтальном слое сжимаемой жидкости//Изв. Северо-Кавказ. науч. центра высш. школы. Естеств. науки. 1986. № 3. С. 61—65.
5. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции//ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 1. С. 39—48.
6. Busse F. H. The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle//J. Fluid Mech. 1967. V. 30. Pt 4. P. 625—649.
7. Ahlers G. Effect of departures from the Oberbeck — Boussinesq approximation on the heat transport of horizontal convecting fluid layers//J. Fluid Mech. 1980. V. 98. Pt 1. P. 137—148.
8. Никитин Л. В., Рыжак Е. И. О точности приближения Буссинеска для несжимаемой жидкости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 2. С. 19—26.
9. Paolucci S., Chenoweth D. R. Departures from the Boussinesq approximation in laminar Benard convection//Phys. Fluids. 1987. V. 30. № 5. P. 1561—1564.
10. Chandra K. Instability of fluids heated from bellow//Proc. Roy. Soc. London. 1938. A. Ser. V. 164. № 917. С. 231—242.
11. Leontiev A. I., Kirdyashkin A. G. Experimental study of flow patterns and temperature fields in horizontal free convection liquid layers//Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1968. V. 11. № 10. P. 1461—1466.
12. Норден П. А., Усманов А. Г. Исследование возникновения конвекции в горизонтальных слоях жидкости//Инж.-физ. журн. 1971. Т. 20. Вып. 3. С. 427—433.
13. Koschmieder E. L., Pallas S. G. Heat transfer through a shallow, horizontal convecting fluid layer//Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1974. V. 17. № 9. P. 991—1002.
14. Юдович В. И. Свободная конвекция и ветвление//ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 101—111.
15. Тер-Григорьянц Г. К. О возникновении двоякопериодической конвекции в горизонтальном слое//ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 1. С. 177—184.
16. Тер-Григорьянц Г. К. Об устойчивости стационарных двоякопериодических конвекционных потоков в слое//Изв. Северо-Кавказ. науч. центра высш. школы. Естеств. науки. 1973. № 4. С. 79—83.
17. Юдович В. И. О возникновении конвекции//ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 6. С. 1000—1005.