МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1995

УДК 532.516:532.595

© 1995 г. И. М. КАЗМЕРЧУК, В. А. САМСОНОВ

ДВИЖЕНИЕ ДВУХ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПРЕЦЕССИРУЮЩЕМ СОСУДЕ

Построено приближенное решение задачи о движении двух вязких жидкостей в цилиндрическом сосуде, который совершает медленную регулярную прецессию с произвольным углом нутации. Определена осевая проекция момента сил, действующих на боковую поверхность сосуда со стороны жидкости.

Аналогичная задача для полного заполнения полости одной жидкостью решалась в [1]. В [2] рассматривалась задача для частичного заполнения сосуда одной маловязкой жидкостью для регулярной прецессии с малым углом нутации. Осевой момент вязких напряжений по теореме об изменении момента количества движения системы оказывается величиной второго порядка малости. Показано, как и в [3], что соответствующее относительное течение жидкости описывается вторым приближением для решения нелинейных уравнений Навье — Стокса.

1. Постановка задачи. Пусть твердое тело — сосуд имеет полость в форме прямого кругового цилиндра радиуса a и длины $2c$, целиком заполненную двумя несмешивающимися жидкостями (ρ_1, μ_1 — соответственно плотность и коэффициент динамической вязкости внешней жидкости, ρ_2, μ_2 — параметры внутренней жидкости). Предположим, что тело совершает регулярную прецессию вокруг неподвижного направления L с угловой скоростью прецессии Ω. Будем считать, что собственное вращение сосуда осуществляется с угловой скоростью ω вокруг оси полости, пересекающейся с линией L в центре o цилиндра и составляющей с ней постоянный угол нутации θ.

Рассмотрим задачу об установившемся относительном движении жидкости в полости тела. Для описания движения введем систему координат xyz, ось z которой направлена по оси полости и которая вращается с угловой скоростью прецессии вокруг неподвижной оси L. Ось x расположим в плоскости zL.

В качестве характерных величин длины, времени и плотности используем a, ω^{-1}, ρ_1.

В цилиндрических координатах r, φ, z уравнения Навье — Стокса для безразмерных компонент u_j, v_j, w_j скорости $\mathbf{v}_j$ имеют вид

$$D'u_j - \frac{v_j^2}{r} - 2(1 + \varepsilon\cos\theta)\, v_j + 2\varepsilon w_j \sin\theta \sin\varphi =$$

$$= -\frac{\partial p_j}{\partial r} + \frac{1}{R_j}\left(D''u_j - \frac{u_j}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_j}{\partial\varphi}\right)$$

$$D'v_j + \frac{u_j v_j}{r} + 2(1 + \varepsilon\cos\theta)\, u_j + 2\varepsilon w_j \sin\theta\cos\varphi = \tag{1.1}$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial p_j}{\partial\varphi} + \frac{1}{R_j}\left(D''v_j - \frac{v_j}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\right)$$

$$D'w_j - 2\varepsilon v_j \sin\theta\cos\varphi - 2\varepsilon u_j \sin\theta\sin\varphi - 2\varepsilon r\sin\theta\cos\varphi = -\frac{\partial p_j}{\partial z} + \frac{1}{R_j}D''w_j$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial r} + \frac{u_j}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_j}{\partial\varphi} + \frac{\partial w_j}{\partial z} = 0$$

$$D' = \frac{\partial}{\partial\varphi} + u_j\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_j}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + w_j\frac{\partial}{\partial z}$$

$$D'' = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.2}$$

$$p_1 = P_1 - \Phi/2, \quad p_2 = P_2\rho_1/\rho_2 - \Phi/2$$

$$\Phi = r^2(1 + \varepsilon\cos\theta)^2 + 2\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta rz\cos\varphi +$$

$$+ \varepsilon^2\sin^2\theta r^2\sin^2\varphi + \varepsilon^2\sin^2\theta z^2$$

$$\varepsilon = \Omega/\omega, \quad R_j = \omega a^2\rho_j/\mu_j$$

Индекс j указывает к какой жидкости относятся величины — внешней ($j = 1$) или внутренней ($j = 2$), P_1, P_2 — давление.

Эти уравнения с точностью до обозначений совпадают с приведенными в [2]. Однако если в [2] удалось построить решение в предположении, что угол θ мал, то в настоящей работе будем считать, что угловая скорость собственного вращения ω намного больше угловой скорости прецессии Ω, так что ε — малая величина.

Перейдем к формулировке граничных условий. На боковой стенке должно выполняться условие прилипания

$$r = 1: \quad u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 0 \tag{1.3}$$

Уравнение границы раздела жидкостей представим в виде

$$f = r - b - \zeta(\varphi, z) = 0$$

Когда $\varepsilon = 0$, то $\zeta(\varphi, z) = 0$. Естественно считать, что возмущение $\zeta(\varphi, z)$ — малая величина порядка ε.

На границе раздела двух жидкостей должны выполняться известные условия

$$r = b + \zeta(\varphi, z): \quad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad w_1 = w_2$$

$$n_k(\sigma_{ik})_1 = n_k(\sigma_{ik})_2 \tag{1.4}$$

$$u_j - \frac{\partial\zeta}{\partial\varphi} - \frac{v_j}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi} - w_j\frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0 \tag{1.5}$$

где σ_{ik} — компоненты тензора напряжений, n_k — компоненты вектора нормали к поверхности жидкости.

Примем, что удлинение полости велико и что влияние торцов цилиндра будет существенным только на расстоянии порядка $O(1)$ от торцов. Поэтому, как и в [1—3], опустим граничное условие на торцах и будем строить установившееся течение на конечном отрезке как бы бесконечно длинного цилиндра.

2. Разложение по параметру ε. Будем строить решение системы (1.1) с граничными условиями (1.3)—(1.5) в виде отрезка ряда

$$V_j = V_j^{(0)} + \varepsilon V_j^{(1)} + \varepsilon^2 V_j^{(2)}, \quad p_j = p_j^{(0)} + \varepsilon p_j^{(1)} + \varepsilon^2 p_j^{(2)}$$

В нулевом приближении получим очевидное решение $V_j^{(0)} = 0$.

Для функций $V_j^{(1)}$ и $p_p^{(1)}$ получим из (1.1) систему линейных уравнений и граничных условий

$$\frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial \varphi} - 2v_j^{(1)} = -\frac{\partial p_j^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{R_j}\left(D''u_j^{(1)} - \frac{u_j^{(1)}}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial \varphi}\right)$$

$$\frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial \varphi} + 2u_j^{(1)} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p_j^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_j}\left(D''v_j^{(1)} - \frac{v_j^{(1)}}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial \varphi}\right)$$

$$\frac{\partial w_j^{(1)}}{\partial \varphi} - 2\sin\theta r\cos\varphi = -\frac{\partial p_j^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{R_j}D''w_j^{(1)} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial r} + \frac{u_j^{(1)}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_j^{(1)}}{\partial z} = 0$$

$$r = 1:\ \ u_1^{(1)} = 0,\ \ v_1^{(1)} = 0,\ \ w_1^{(1)} = 0$$

$$r = b:\ \ u_1^{(1)} = u_2^{(1)},\ \ v_1^{(1)} = v_2^{(1)},\ \ w_1^{(1)} = w_2^{(1)}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}p_2^{(1)} - p_1^{(1)} + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)(b^2\cos\theta + b\zeta^{(1)}) + \frac{2}{R_1}\left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial r} - \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial r}\right) = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial r} - \frac{v_1^{(1)}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \varphi} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\left(\frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial r} - \frac{v_2^{(1)}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \varphi}\right)$$

$$\frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial z} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\left(\frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial z}\right);\ \ u_j - \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \varphi} = 0$$

Решение системы (2.1) с граничными условиями (2.2) будем искать в виде

$$u_j^{(1)} = 0,\ \ v_j^{(1)} = 0,\ \ \zeta^{(1)} = 0,\ \ p_j^{(1)} = \mathrm{const}$$

$$w_j^{(1)}(r, \varphi) = \sin\theta\,(w_{jc}(r)\cos\varphi + w_{js}(r)\sin\varphi) \tag{2.3}$$

Подставим (2.3) в уравнения (2.1), (2.2) и получим следующую краевую задачу для определения комплексной функции $W_j = w_{js} + iw_{jc}$:

$$W_j'' + \frac{W_j'}{r} - \frac{W_j}{r^2} - iR_jW_j = -2irR_j\ \ (j = 1, 2) \tag{2.4}$$

$$(\,)' = d/dr\,(\,)$$

$$r = 1:\ \ W_1 = 0 \tag{2.5}$$

$$r = b:\ \ W_1 = W_2,\ \ W_1' = \frac{\mu_2}{\mu_1}W_2'$$

Кроме того, величина W_2 ограничена при $r = 0$.

3. Первое приближение. Общее решение линейного неоднородного уравнения (2.4) имеет вид

$$W_1(r) = 2r + c_1I_1(q_1r) + c_2K_1(q_1r),\ \ W_2(r) = 2r + c_3I_1(q_2r) + c_4K_1(q_2r) \tag{3.1}$$

где $I_1(q_jr)$, $K_1(q_jr)$ — модифицированные функции Бесселя и Ганкеля комплексного аргумента q_jr $(q_j = (1 + i)\ (R_j/2)^{1/2})$.

Из ограниченности $W_2(r)$ при $r=0$ сразу следует, что $c_4=0$. Удовлетворяя граничным условиям (2.5), для констант c_1, c_2, c_3 получим систему уравнений

$$c_1 I_1(q_1) + c_2 K_1(q_1) + 2 = 0$$

$$c_1 I_1(q_1 b) + c_2 K_1(q_1 b) - c_3 I_1(q_2 b) = 0$$

$$c_1\left[q_1 I_0(q_1 b) - \frac{I_1(q_1 b)}{b}\right] - c_2\left[q_1 K_0(q_1 b) + \frac{K_1(q_1 b)}{b}\right] -$$

$$-\frac{\mu_2}{\mu_1} c_3\left[q_2 I_0(q_2 b) - \frac{I_1(q_2 b)}{b}\right] + 2\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) = 0$$

Откуда найдем c_1, c_2, c_3

$$c_1 = -\frac{2}{c}\left\{\left[1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right] I_1(q_2 b) K_1(q_1) + I_1(q_2 b)\left[q_1 K_0(q_1 b) + \frac{K_1(q_1 b)}{b}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_2}{\mu_1} K_1(q_1 b)\left[q_2 I_0(q_2 b) - \frac{I_1(q_2 b)}{b}\right]\right\}$$

$$c_2 = \frac{2}{c}\left\{\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) I_1(q_2 b) I_1(q_1) - I_1(q_2 b)\left[q_1 I_0(q_1 b) - \frac{I_1(q_1 b)}{b}\right] + \right. \qquad (3.2)$$

$$\left. + \frac{\mu_2}{\mu_1} I_1(q_1 b)\left[q_2 I_0(q_0 b) - \frac{I_1(q_2 b)}{b}\right]\right\}$$

$$c_3 = -\frac{2}{c}\left\{\left[1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right]\left[K_1(q_1) I_1(q_1 b) - I_1(q_1) K_1(q_1 b)\right] + \frac{1}{b}\right\}$$

$$c = I_1(q_2 b)\left\{K_1(q_1)\left[q_1 I_0(q_1 b) - \frac{I_1(q_1 b)}{b}\right] + I_1(q_1)\left[q_1 K_0(q_1 b) + \frac{K_1(q_1 b)}{b}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\mu_2}{\mu_1}\left[q_2 I_0(q_2 b) - \frac{I_1(q_2 b)}{b}\right]\left[I_1(q_1) K_1(q_1 b) - K_1(q_1) I_1(q_1 b)\right]$$

Совокупность формул (3.1), (3.2) при $c_4=0$ описывает решение поставленной задачи в первом приближении. Однако провести анализ этих формул затруднительно. Упростить их возможно для частных случаев.

Случай $R_j \gg 1$. Поскольку при $R \to \infty$ аргументы функций Бесселя велики, то используем асимптотические представления бесселевых функций для больших аргументов [4]

$$I_\nu(z) \approx i^{-\nu}\sqrt{\frac{1}{2\pi i z}}\, e^{z + i\nu\pi/2 + i\pi/4}, \quad K_\nu(z) \approx i^{\nu+1}\pi\sqrt{\frac{1}{2\pi i z}}\, e^{-z - i\nu\pi/2 - i\pi/2}$$

Из (3.1), (3.2) получим решение для больших чисел Рейнольдса

$$W_1(r) = 2r - 2r^{-1/2} e^{q_1(r-1)} + \frac{2(\mu_1 - \mu_2)}{q_1\mu_1 + q_2\mu_2}\left(\frac{r}{b}\right)^{-1/2} e^{q_1(b-r)} + O\left(\frac{1}{q_j^2}\right) \qquad (3.3)$$

$$W_2(r) = 2r + \frac{2(\mu_1 - \mu_2)}{q_1\mu_1 + q_2\mu_2}\left(\frac{r}{b}\right)^{-1/2} e^{q_2(r-b)} + O\left(\frac{1}{q_j^2}\right)$$

Из вида (3.3) следует, что вне тонких пограничных слоев у твердой стенки и границы раздела решение ведет себя как $W_j \approx 2r$, что соответствует решению для идеальной жидкости. Второе слагаемое в формуле для W_1 характеризует течение в тонком пограничном слое у твердой стенки, а оставшиеся слагаемые в формулах для w_1, w_2 описывают течение в пограничном слое у границы раздела, причем они имеют меньший порядок малости, чем слагаемое, описывающее течение у твердой стенки. Такое же решение можно получить, если решать задачу для больших чисел Рейнольдса методом пограничного слоя.

Случай $R_j \ll 1$. Решение для $R_j \ll 1$ строить из общего решения (3.1), (3.2) неудобно. Будем искать W_j в форме ряда по R_j

$$W_1 = R_1 \left(c_{1R} r + \frac{c_{2R}}{r} - \frac{i}{4} r^3 \right) + O(R_1^2),$$

$$W_2 = R_2 \left(c_{3R} + \frac{c_{4R}}{r} - \frac{i}{4} r^3 \right) + O(R_2^2) \tag{3.4}$$

где константы c_{1R}, c_{2R}, c_{3R}, c_{4R} определяются из граничных условий (2.5) и равны соответственно

$$c_{1R} = \frac{i}{4c_R} \left(1 + 3b^4 + \frac{\mu_2}{\mu_1}(1 - b^4) - 2\frac{\rho_2}{\rho_1} b^4 \right)$$

$$c_{2R} = \frac{ib^2}{4c_R} \left(1 - 3b^2 + \frac{\mu_2}{\mu_1}(b^2 - 1) + 2\frac{\rho_2}{\rho_1} b^2 \right) \tag{3.5}$$

$$c_{3R} = \frac{i}{4c_R} \left(b^2(1 + b^2) + \frac{\mu_2}{\mu_1} 3b^2 (1 - b^2) + \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\mu_2}{\mu_1} 2(1 - b^2) \right)$$

$$c_{4R} = 0, \quad c_R = 1 + b^2 + \frac{\mu_2}{\mu_1}(1 - b^2)$$

Как при малых, так и при больших числах Рейнольдса течение состоит из двух потоков, один из которых направлен по оси z, а другой в противоположном направлении. Однако для больших R_j в решении превалирует действительная составляющая, т. е. максимальная скорость достигается при $\varphi = \pi/2$; $3\pi/2$ и поток имеет положительное направление впереди по ходу прецессионного вращения ($\varphi = \pi/2$). Для малых R_j в решении преобладает мнимая часть, поэтому скорость максимальна при $\varphi = 0$; π и поток имеет положительное направление при $\varphi = 0$.

4. Определение осевой проекции момента сил, действующих на тело со стороны жидкости. Для определения момента сил, действующих на тело со стороны жидкости, воспользуемся теоремой об изменении момента количества движения относительно начала координат.

Тогда для гидродинамического момента получим

$$M = \sum_{j=1}^{2} \iiint_{\tau_j} \rho_j \{R \times [((V_j + \omega \times R)\nabla)(V_j + \omega \times R) +$$

$$+ 2\Omega \times (V_j + \Omega \times R) + \Omega \times (\Omega \times R)]\} \, d\tau_j \tag{4.1}$$

где τ_j — объем, занятый j-й жидкостью.

Подставляя полученные выше решения в (4.1), для осевой проекции момента будем иметь

$$M_z = -4\rho_1 \omega^2 a^4 c\pi \sin^2\theta \varepsilon^2 \operatorname{Im} \left\{ \int_b^1 r^2 W_1 dr + \frac{\rho_2}{\rho_1} \int_0^b r^2 W_2 dr \right\} + O(\varepsilon^3) \tag{4.2}$$

где Im обозначает мнимую часть выражения в скобках.

Из уравнения (2.4)

$$W_j = 2r - \frac{i}{R_j} \left(W_j'' + \frac{W_j'}{r} - \frac{W_j}{r^2} \right)$$

Подставим это выражение в (4.2), проинтегрируем по частям. С учетом граничных условий получим

$$M_z = 4\rho_1\omega^2a^4c\pi \sin^2\theta \frac{\varepsilon^2}{R_1}\mathrm{Re}\left\{ W_1'(1) + \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) bW_1(b)\right\} + O(\varepsilon^3)$$

где Re обозначает действительную часть выражения в скобках.

Тогда для осевой проекции момента будем иметь

$$M_z = 4\rho_1\omega^2a^4c\pi \sin^2\theta\frac{\varepsilon^2}{R_1}\left[4 + 2b^2\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \right.$$

$$+ \mathrm{Re}\left\{ c_1\left[q_1I_0(q_1) + \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) bI_1(q_1b)\right] + c_2\left[- q_1K_0(q_1) + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) bK_1(q_1b)\right]\right\}\right] + O(\varepsilon^3) \qquad (4.3)$$

где c_1 и c_2 выписаны в (3.2).

Для случаев больших и малых чисел Рейнольдса получим

$$R_j \gg 1:\ M_z = -4\sqrt{2}\,\rho_1\omega^2a^4c\pi \sin^2\theta\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{R_1}} + O\left(\frac{\varepsilon^2}{R_1}, \varepsilon^3\right)$$

$$R_j \ll 1: M_z = - \frac{\rho_1\omega^2a^4c\pi \sin^2\theta\varepsilon^2R_1}{12(1 + b^2 + (\mu_2/\mu_1)(1 - b^2))}\left[(7b^2 + 1)(1 - b^2)^3 + \frac{\mu_2}{\mu_1}(1 - b^2)^4 + \right.$$

$$\left. + 12\frac{\rho_2}{\rho_1}b^4(b^2 - 1)^2 + 7\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2b^6(1 - b^2) + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2\frac{\mu_1}{\mu_2}b^6(1 + b^2)\right] + O(R_1^2\varepsilon^2, \varepsilon^3)$$

Рассмотрим теперь случай одной жидкости. Тогда в формулах (3.1)—(3.5), (4.3) следует положить $\rho_2 = 0$, если полость заполнена частично, и $\rho_1 = \rho_2$, $\mu_1 = \mu_2$, если полость заполнена целиком.

Для приложений возможно представят интерес предельные случаи для больших и малых чисел Рейнольдса.

В частности, если сосуд частично заполнен жидкостью, то

$$R_j \gg 1:\ W_1(r) = 2r - 2r^{-1/2}e^{q_1(r-1)} + \frac{2}{q_1}\left(\frac{r}{b}\right)^{-1/2}e^{q_1(b-r)} + O\left(\frac{1}{R_1^2}\right)$$

$$M_z = - 4\sqrt{2}\,\rho_1\omega^2a^4c\pi \sin^2\theta\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{R_1}} + O\left(\frac{\varepsilon^2}{R_1}, \varepsilon^3\right)$$

$$R_j \ll 1:\ W_1(r) = R_1\frac{i}{4}\left\{\frac{1 + 3b^4}{1 + b^2}r + \frac{b^2(1 - 3b^2)}{1 + b^2}\frac{1}{r} - r^3\right\} + O(R_1^2)$$

$$M_z = - \frac{1}{12}\rho_1\omega^2a^4c\pi \sin^2\theta\varepsilon^2R_1\frac{(7b^2 + 1)(1 - b^2)^3}{1 + b^2} + O(R_1^2\varepsilon^2, \varepsilon^3)$$

Когда полость тела целиком заполнена жидкостью, то формулы еще более упростятся и совпадут с результатами [1].

5. Вторичное вихревое течение. Для того чтобы определить момент сил, действующих на тело со стороны жидкости непосредственно через касательные напряжения на твердой стенке, необходимо построить, как и в [3, 5], второе приближение по ε.

Вид решения системы уравнений второго приближения определяется неоднородностями, которые входят в уравнения и граничные условия. Структура неоднородностей, возникающих в уравнениях, очевидно, имеет вид $g_1(r)$, $g_2(r)\sin 2\varphi$, $g_3(r)\cos 2\varphi$. А неоднородность в граничных условиях на поверхности раздела имеет более сложную структуру. В частности, условие непрерывности нормальных напряжений с учетом (1.2) приобретает вид

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}p_2^{(2)} - p_1^{(2)} + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)[b^2\cos^2\theta + 2\zeta^{(2)}b + 2\sin\theta\cos\theta zb\cos\varphi +$$

$$+ \sin^2\theta b^2\sin^2\varphi + \sin^2\theta z^2] + \frac{2}{R_1}\left[\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial r} - \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial r}\right] = 0$$

Для определения осевой проекции гидродинамического момента достаточно найти часть решения второго приближения вида $[f_{1j}(r) + f_{2j}(r)z^2]\sin^2\theta$ (здесь $f_{kj} = (u_{kj}, v_{kj}, p_{kj}, \zeta_k)$, $k = 1, 2$), так как остальные слагаемые обратятся в нуль при интегрировании по поверхности.

Нетрудно показать, что $u_{2j} = v_{2j} = p_{2j} = 0$, а $\zeta_2 = -1/2b$.

Для определения v_{1j} получим задачу

$$v_{1j}'' + \frac{v_{1j}'}{r} - \frac{v_{1j}}{r^2} = R_j w_{cj} \tag{5.1}$$

$$r = 1: \quad v_{11} = 0$$

$$r = b: \quad v_{11} = v_{12}, \quad v_{11}' - \frac{v_{11}}{r} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\left(v_{12}' - \frac{v_{12}}{r}\right)$$

Величина v_{12} ограничена при $r = 0$.

Решение уравнения (5.1) имеет вид

$$v_{11} = \operatorname{Im}[d_1 r + (d_2/r) - ic_1 I_1(q_1 r) - ic_2 K_1(q_1 r)] \tag{5.2}$$

$$v_{12} = \operatorname{Im}[d_3 r + (d_4/r) - ic_3 I_1(q_2 r)]$$

$$d_1 = -\frac{b^2}{2}d + ic_1 I_1(q_1) + ic_2 K_1(q_1); \quad d_2 = \frac{b^2}{2}d;$$

$$d_3 = \frac{ic_3}{b}I_1(q_2 b) + \left(\frac{1}{2} - \frac{b^2}{2}\right)d + ic_1 I_1(q_1) + ic_2 K_1(q_1) -$$

$$-\frac{ic_1}{b}I_1(q_1 b) - \frac{ic_2 K_1(q_1 b)}{b}; \quad d_4 = 0$$

$$d = -ic_1 q_1 I_2(q_1 b) + ic_2 q_1 K_2(q_1 b) + \frac{\mu_2}{\mu_1} ic_3 q_2 I_2(q_2 b)$$

где c_1, c_2, c_3 выписаны в (3.2).

С точностью до членов порядка ε^3 осевая компонента гидродинамического момента определяется по формуле

$$M_z = -4\rho_1\omega^2 a^4 c\pi \sin^2\theta \frac{\varepsilon^2}{R_1}\frac{dv_{11}}{dr}\bigg|_{r=1} \tag{5.3}$$

Подставляя в (5.3) выражение для v_{11} из (5.2), получим для M_z формулу, которая совпадает с (4.3).

Таким образом, относительное течение жидкости во втором приближении по ε содержит азимутальную составляющую, которая имеет характер завихренности, и именно это течение создает тормозящий момент.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01547).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Herbert Th.* Viscous fluid motion in a spinning and nutating cylinder//J. Fluid Mech. 1986. V. 167. P. 181—198.
2. *Казмерчук И. М., Самсонов В. А.* О движении вязкой жидкости в прецессирующем цилиндре//Изв. РАН МЖГ. 1993. № 6. С. 134—137.
3. *Казмерчук И. М.* Движение вязкой несжимаемой жидкости в прецессирующем цилиндре//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика, 1992. № 2. С. 93—96.
4. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 342 с.
5. *Ждан Л. А., Самсонов В. А.* О движении двух вязких несмешивающихся жидкостей в цилиндре//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 92—99.

Москва

Поступила в редакцию
26.V.1994