МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1995

УДК 532.51.013.4:537.84

© 1995 г. П. А. ЯКУБЕНКО

# АБСОЛЮТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА МЕЖДУ ДВУМЯ МАГНИТНЫМИ ЖИДКОСТЯМИ ПРИ НАЛИЧИИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА СКОРОСТИ И ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрен вопрос о характере неустойчивости поверхности тангенциального разрыва скорости между двумя несжимаемыми, невязкими, капиллярными, непроводящими, линейно намагничивающимися жидкостями во внешнем магнитном поле. Получен аналитический критерий абсолютной неустойчивости. В случае, когда силой тяжести можно пренебречь, этот критерий не зависит от величины поверхностного натяжения. Для случая, когда можно не учитывать поверхностное натяжение, критерий абсолютной неустойчивости получен для области значений параметров, в которой рассматриваемая система является эволюционной. Если магнитное поле приложено тангенциально к поверхности раздела, все полученные критерии становятся применимыми также для случая немагнитных идеально проводящих жидкостей, т. е. для случая идеальной магнитной гидродинамики.

Условия абсолютной и конвективной неустойчивости [1, 2] являлись в последние годы предметом интенсивного исследования в гидродинамике. В частности, для сдвиговых течений критерии абсолютной неустойчивости были получены для различных профилей скорости [3]. Исследование неустойчивости поверхности раздела в феррогидродинамике проводилось рядом авторов [4—7]; были получены критерии обычной неустойчивости.

Абсолютный и конвективный характер неустойчивости Кельвина — Гельмгольца для магнитных и диэлектрических жидкостей обсуждался в [8, 9], однако аналитические критерии неустойчивости так и не были получены. Критерии абсолютной неустойчивости Кельвина — Гельмгольца для случая немагнитных неэлектропроводных жидкостей найдены в [10, 11].

В данной работе характер неустойчивости поверхности раздела между двумя магнитными жидкостями во внешнем магнитном поле исследуется для простейшего сдвигового профиля скорости, т. е. для тангенциального разрыва.

**1. Постановка задачи.** Два бесконечно глубоких слоя жидкости движутся со скоростями $U_1$ и $U_2$ соответственно снизу и сверху поверхности раздела. Жидкости предполагаются однородными, несжимаемыми, невязкими, капиллярными, непроводящими и линейно намагничивающимися, с плотностями $\rho_1$, $\rho_2$ и магнитными проницаемостями $\mu_1$, $\mu_2$ соответственно. Сила тяжести $g$ направлена нормально к поверхности раздела, коэффициент поверхностного натяжения равен $\sigma$. Внешнее магнитное поле приложено в той же плоскости, в которой лежат вектора скорости. Задача, таким образом, является одномерной.

Малая деформация поверхности раздела $z(x, t)$, так же как и остальные малые возмущения параметров системы, представляется в виде простой волны, распространяющейся вдоль оси $x$ $z = z_0 \operatorname{Re} \exp (iKx - i\Omega t)$. При сделанных предположениях дисперсионное соотношение имеет вид [5]

$$(\rho_1 + \rho_2) \left( \Omega - K \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^2 = \sigma \mathrm{K}^3 + g (\rho_2 - \rho_1) \mathrm{K} - \frac{\rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2}{\rho_1 + \rho_2} K^2 -$$

$$- \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)} (B_z^2 \mathrm{K}^2 - \mu_1 \mu_2 H_x^2 K^2) \tag{1.1}$$

$$\mathrm{K} = (K^2)^{1/2} = + K (\operatorname{Re} (K) > 0); \ \mathrm{K} = - K (\operatorname{Re} (K) < 0)$$

Таким образом, начало координат на комплексной плоскости является двойной точкой ветвления вдоль мнимой положительной и отрицательной полуосей. В силу симметрии уравнения (1.1) относительно мнимой оси $K$ можно ограничиться рассмотрением полуплоскости $\operatorname{Re} (K) > 0$.

**2. Учет поверхностного натяжения.** При $\sigma = 0$ дисперсионное уравнение (1.1) можно представить в безразмерном виде

$$D (k, \omega) = (\omega - Uk)^2 - k^3 + Nk^2 - Gk = 0 \tag{2.1}$$

$$k = \frac{K\sigma}{W^2 \beta (\rho_1 + \rho_2)}, \ \omega = \frac{\Omega \sigma}{W^3 \beta^{3/2} (\rho_1 + \rho_2)}, \ U = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{W \beta^{1/2} (\rho_1 + \rho_2)}$$

$$G = \frac{g\sigma (\rho_2 - \rho_1)}{W^4 \beta^2 (\rho_1 + \rho_2)^2}, \ N = \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 (B_z^2 - \mu_1 \mu_2 H_x^2)}{\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2) W^2 \beta (\rho_1 + \rho_2)} + 1$$

$$\beta = \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}, \ W = |U_1 - U_2|$$

Если $G \geq 0$, из уравнения (2.1) следует критерий обычной неустойчивости $N > 2G^{1/2}$. Для $G < 0$ система всегда неустойчива.

Решая уравнение (2.1), можно получить функцию $\omega (k)$, которая является двузначной. В случае неустойчивости у этой функции есть три точки ветвления

$$k_0^b = 0, \ k_{1,2}^b = 1/2 (N \mp [N^2 - 4G]^{1/2}) \tag{2.2}$$

Разрезы вдоль действительной оси $k$ от $k_0^b$ до $k_1^b$ и от $k_2^b$ до $+\infty$ выделяют различные ветви функции. Во всех точках имеется $\operatorname{Im} (\omega (k_j^b)) = 0$. При таких условиях все ветви функции могут быть исследованы независимо [12, 13]. Так как ветви функции $\omega (k)$ различаются знаком, то лишь одна из них может соответствовать неустойчивости. Интервал $[k_2^b, k_2^b]$ есть интервал неустойчивых волновых чисел.

Одно из наиболее часто используемых условий абсолютной неустойчивости основано на применении метода перевала и состоит в том [1, 2], что функция $\operatorname{Im} (\omega (k))$ должна иметь седловую точку $k_s$, в которой $\operatorname{Im} (\omega (k_s)) > 0$; эта точка должна также быть препятствием для деформации действительной оси $k$ в контур, лежащий в области $\operatorname{Im} (\omega (k)) < 0$. Все седловые точки могут быть получены как одновременное решение уравнений

$$D (k, \omega) = 0, \ \frac{\partial D}{\partial k} (k, \omega) = 0 \tag{2.3}$$

Если $U = 0$, то $\operatorname{Im} (\omega (k))$ имеет действительную седловую точку, соответствующую «наиболее неустойчивому» волновому числу

$$k_s = 1/3 (N + [N^2 - 3G]^{1/2}) \tag{2.4}$$

В этом случае возможна только абсолютная неустойчивость.

Если $U \neq 0$, уравнения (2.3) дают

$$\omega_s = \frac{1}{2U}\left(2\left(N+U^2\right)k_s - 3k_s^2 - G\right) \tag{2.5}$$

$$\left(\frac{1}{2U}\left(2\left(N+U^2\right)k_s - 3k_s^2 - G\right)\right)^2 + 2k_s^3 - \left(N+U^2\right)k_s^2 = 0 \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) есть полиномиальное уравнение четвертой степени с действительными коэффициентами, поэтому оно имеет четыре корня, которые либо действительные, либо комплексно-сопряженные.

Для комбинации параметров системы, которая соответствует границе областей абсолютной и конвективной неустойчивости, должно выполняться условие $\mathrm{Im}\,(\omega_s^*) = 0$. Тогда соотношения (2.5) и (2.6) дают $\mathrm{Im}\,(k_s^*) = 0$, что означает, что $k_s^*$ есть действительная седловая точка. Критическая комбинация параметров, для которой такая точка появляется впервые, соответствует совпадению на действительной оси двух комплексно-сопряженных корней уравнения (2.6). В этом случае $k_s^*$ является двойной седловой точкой. Тогда в дополнение условиям (2.5) и (2.6) в такой точке должно выполняться условие

$$\frac{\partial^2 D}{\partial k^2}(k, \omega) = 0 \tag{2.7}$$

Это уравнение сразу же дает

$$k_s^* = 1/3\left(N+U^2\right) \tag{2.8}$$

Соотношения (2.6) и (2.8) дают границу областей абсолютной и конвективной неустойчивости в пространстве $G - N - U^2$

$$3\left(\left(N+U^2\right)^2 - 3G\right)^2 - 4U^2\left(N+U^2\right)^3 = 0 \tag{2.9}$$

Если $N + U^2 < 0$, то условие (2.9), очевидно, никогда не выполняется. В этом случае возможна только абсолютная неустойчивость.

Если $G = 0$, что означает либо $\rho_1 = \rho_2$, либо отсутствие силы тяжести, соотношение (2.9) дает условие абсолютной неустойчивости $N > 1/3U^2$. В физических переменных это условие принимает вид

$$\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2\left(B_z^2 - \mu_1\mu_2 H_x^2\right)}{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)(\rho_1+\rho_2)} > \frac{(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)^2 - 3\rho_1\rho_2(U_1 - U_2)^2}{3(\rho_1+\rho_2)^2} \tag{2.10}$$

Условие абсолютной неустойчивости не зависит от величины поверхностного натяжения. Для немагнитных жидкостей условие (2.10) превращается в известный критерий [10, 11]

$$(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)^2 < 3\rho_1\rho_2(U_1 - U_2)^2$$

Если $G > 0$, система всегда неустойчива; для $U^2 \leq 4\,|G|^{1/2}$ неустойчивость всегда абсолютная; при $G$ стремящемся к нулю, границы области абсолютной неустойчивости приближаются к $U^2 = 3N$ и $U^2 = -N$ для $N > 0$ и $N < 0$ соответственно.

Если $G > 0$, то присутствует область устойчивости, это приводит к тому, что интервал скоростей, для которых неустойчивость всегда абсолютная, появляется снова. При $G = 0$ граница областей неустойчивости есть $U^2 = 3N$ и интервал скоростей превращается в точку $U = 0$.

**3. Развитие локализованных возмущений.** Рассмотрим развитие возмущения, начально локализованного в пространстве. Пусть задний и передний фронт возмущения движутся со скоростями $V_1$ и $V_2$ соответственно. Рассмотрим новую систему координат, движущуюся со скоростью $V$. Неустойчивость в такой системе координат, очевидно, абсолютная, только если $V_1 < V < V_2$. Скорость пространственного расширения возмущения есть $V_2 - V_1$. Частота в движущейся системе координат определяется допплеровским сдвигом $\omega' = \omega - Vk$. Дисперсное уравнение (2.1) дает

$$(\omega' - (U - V)\,k)^2 - k^3 + Nk^2 - Gk = 0 \tag{3.1}$$

Согласно результатам разд. 2, неустойчивость абсолютная, если

$$(U - V)^2 < U^2_{\max}(N, G) \tag{3.2}$$

где $U^2_{\max}(N, G)$ может быть получено как решение уравнения (2.9) для $U^2$. Соотношения $V_1 < V < V_2$ и (3.2) дают

$$V_{1,2}(U, N, G) = U \mp |U_{\max}(N, G)|$$

Тогда скорость расширения возмущения есть $2\,|U_{\max}(N, G)|$, что не зависит от $U$.

Для $G = 0$ уравнение (2.9) дает $U^2_{\max} = 3N$. Если $G \neq 0$, четыре корня уравнения могут быть получены в виде

$$\pm f_1 \pm \left(2\,(N^2 - 3G) - f_2 + \frac{N\,(2N^2 - 2G)}{f_1}\right)^{1/2}$$

$$f_1 = (f_2 - 3G + N^2)^{1/2}, f_2 = 3G\left(\frac{1}{2} - f_3 + \left[\frac{1}{4} - f_3 + f_3^2\right]^{1/2}\right)^{1/3}, f_3 = \frac{N^2}{24G}$$

Для $G < 0$ только один корень действительный и положительный. Скорость расширения возмущения достигает минимального значения $8\,|G|^{1/2}$ при $N = -|G|^{1/2}$. Для $G < 0$ система неустойчива, если $N > 2G^{1/2}$. В этом диапазоне также лишь один из корней действительный и положительный. Скорость расширения возмущения достигает минимального значения на границе области устойчивости $N = 2G^{1/2}$.

**4. Отсутствие поверхностного натяжения.** Если эффектом поверхностного натяжения можно пренебречь, возможны две различные ситуации: $g = 0$ и $g \neq 0$.

Если $g = 0$, т. е. сила тяжести отсутствует, то для эволюционности системы необходимо условие

$$\frac{\rho_1\rho_2\,(U_1 - U_2)^2}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\mu_1\mu_2\,(\mu_1 + \mu_2)}\,(B_z^2 - \mu_1\mu_2 H_x^2) > 0$$

При таком условии система всегда устойчива.

Если $g \neq 0$, дисперсионное уравнение (1.1) можно представить в безразмерном виде

$$(\omega - Uk)^2 = -Nk^2 + \gamma k$$

$$k = \frac{KW^2}{g\beta}, \quad \omega = \frac{\Omega W}{g\beta^{3/2}}, \quad \gamma = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\beta^2\,(\rho_1 + \rho_2)}$$

Здесь $\beta$, $W$, $U$, $N$ — такие же, как и для уравнения (2.1). Требование эволюционности дает $N < 0$, тогда условие неустойчивости есть $\gamma < 0$. Эти условия определяют область параметров системы, для которых вопрос об абсолютном или конвективном характере неустойчивости имеет смысл. Уравнения (2.3) для рассматриваемого случая дают седловые точки

$$k_s = \frac{\gamma}{2N}\left[1 \pm \left(\frac{U^2}{N + U^2}\right)^{1/2}\right], \quad \omega_s = \frac{\gamma}{2N}\left[U \pm (N + U^2)^{1/2}\right]$$

Критерий абсолютной неустойчивости имеет вид $N + U^2 < 0$. Только одна из двух седловых точек принадлежит неустойчивой ветви функций $\omega(k)$ и может обеспечивать абсолютную неустойчивость. Для $U = 0$ седловая точка является действительной и соответствует наиболее неустойчивому волновому числу $\gamma/2N$. Если $N + U^2$ отрицательно и стремится к нулю, седловая точка движется в бесконечность в комплексной плоскости $k$ вдоль линии $\mathrm{Re}(k) = \gamma/2N$, и для $N + U^2 = 0$ седловая точка становится действительной и совпадает в бесконечности со второй седловой точкой (приходящей с другого листа функции $\omega(k)$). Таким образом, смена типа неустойчивости происходит при прохождении седловой точки через бесконечность в противоположность случаю, когда поверхностное натяжение присутствует.

В физических переменных условие абсолютной неустойчивости принимает вид

$$\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 (B_z^2 - \mu_1\mu_2 H_x^2)}{\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2)(\rho_1 + \rho_2)} < -\frac{(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)^2 + \rho_1\rho_2 (U_1 - U_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \tag{4.1}$$

Это условие не зависит от величины силы тяжести.

**5. Аналогия с идеальной магнитной гидродинамикой.** Если магнитное поле приложено тангенциально к поверхности раздела между немагнитными идеально проводящими жидкостями, дисперсионное уравнение имеет вид [14], аналогичный (2.1), если заменить $N$ на $1 - \mathrm{Al}$, где $\mathrm{Al} = H_x^2/((\rho_1 + \rho_2) W^2\beta)$ — квадрат числа Альфвена.

Для случая отсутствия силы тяжести условие абсолютной неустойчивости принимает вид

$$H_x^2 < -\frac{(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)^2 - 3\rho_1\rho_2 (U_1 - U_2)^2}{3(\rho_1 + \rho_2)}$$

Для случая отсутствия поверхностного натяжения условие абсолютной неустойчивости (4.1) принимает вид

$$H_x^2 < \frac{(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)^2 + \rho_1\rho_2 (U_1 - U_2)^2}{\rho_1 + \rho_2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17355).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
2. *Bers A.* Space-time evolution of plasma instabilities — absolute and convective//Handbook of Plasma Physics/Ed. Rosenbluth M. N., Sagdeev R. Z. Amsterdam: North-Holland, 1983. V. 1. Chap. 3.2. P. 452—516.
3. *Huerre P., Monkewitz P. A.* Local and global instabilities in spaticlly developing fows//Annu. Rev. Fluid Mech. 1990. V. 22. P. 473—537.
4. *Melcher J. R.* Field-coupled surface waves. Cambridge: MIT Press, 1963.
5. *Rosensweig R. E.* Ferrohydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1985. 344 p.

6. *Тактаров Н. К.* Об устойчивости поверхности раздела намагничивающихся сред со скачком проводимости и магнитной проницаемости//Магнит. гидродинамика. 1981. № 3. С. 37—40.
7. Magnetic Fluids Bibliography//J. Magnetism and Magnetic Materials. 1983. V. 39. P. 192—222.
8. *Melcher J. R.* Continuum electromechanics. Cambridge: MIT Press, 1981.
9. *Scott A.* Active and nonlinear wave propagation in Electronics. N. Y.: Wiley-Interscience, 1970. 326 p.
10. *Куликовский А. Г., Шикина И. С.* О развитии возмущений на границах раздела двух жидкостей//Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 5. С. 46—49.
11. *Triantafyllou G. S.* Note on the Kelvin-Helmholtz instability of stratified fluids//Phys. Fluids. 1994. V. 6. № 1. P. 164—171.
12. *Kupfer A., Bers A., Ram A. K.* The cusp map in the complex-frequency plane for absolute instabilities//Phys Fluids. 1987. V. 30. № 10. P. 3075—3082.
13. *Якубенко П. А.* Об одном достаточном условии неустойчивости для динамических систем с распределенными параметрами, зависящими от одной пространственной переменной//ПММ. 1993. Т. 57. № 5. С. 100—104.
14. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p.

Москва

Поступила в редакцию
12.IV.1994