МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1995

УДК 532.59

 О. Ю. ЦВЕЛОДУБ

ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ

Рассматриваются периодические и солитонные решения одного псевдодифференциального уравнения. Это уравнение описывает поведение длинноволновых возмущений на границе раздела двух слоев различных жидкостей.

1. Рассмотрим следующую систему, состоящую из двух идеальных несмешивающихся между собой жидкостей, находящихся в поле тяжести. Тяжелая жидкость плотности ρ_2 занимает нижнюю часть полупространства ($z < 0$). Над ней расположен тонкий слой более легкой жидкости плотности ρ_1, ограниченной сверху твердой горизонтальной плоскостью. Толщина слоя в отсутствие возмущений h_0. Коэффициент межфазного поверхностного взаимодействия σ.

Без учета поверхностного натяжения длинноволновые возмущения границы раздела для такой системы описываются классическим уравнением Бенжамина — Оно [1]. Это уравнение, в частности, является хорошей моделью для качественного изучения внутренних волн в стратифицированной жидкости (например, в океане).

В случае очень тонких слоев при рассмотрении возмущений границы необходим учет сил межфазного поверхностного взаимодействия. Для длинноволновых возмущений и здесь задача сводится к анализу одного уравнения.

При выполнении неравенства $\sigma \gg g(\rho_2 - \rho_1) h_0^2$ (где g — ускорение свободного падения) для вертикальных смещений границы раздела имеем уравнение [2]

$$u_t + (u + u^2 - \alpha L u - \beta u_{xx})_x = 0 \tag{1.1}$$

$$\alpha = \frac{\rho_2}{2\rho_1}, \quad \beta = \frac{\sigma}{g(\rho_2 - \rho_1) h_0^2}$$

Здесь u — смещение границы раздела, индекс при u означает дифференцирование по соответствующей переменной, α и β — положительные постоянные коэффициенты, для которых выполняется соотношение $\beta \gg \alpha$, L — линейный симметричный псевдодифференциальный оператор. В k — пространстве Фурье гармоник он определяется символом $|k|$ ($|\,|$ — знак модуля).

Уравнение (1.1) — длинноволновое уравнение, учитывающее влияние малой нелинейности и дисперсии для волны, распространяющейся в одну сторону. При $\alpha = 0$ оно переходит в широко известное уравнение Кортевега — де Вриза, в случае $\beta = 0$ имеем уравнение Бенжамина — Оно. Четвертый член в уравнении (1.1) отражает нелокальный характер связи между возмущениями границы раздела и давления, а пятый ответствен за капиллярную дисперсию скоростей линейных возмущений.

Для уравнения (1.1) будем искать решение в виде стационарно бегущих волн: $u = u(\xi)$, $\xi = x - ct$, для которых уравнение (1.1) принимает вид

$$-cu_\xi + (u + u^2 - \alpha L u - \beta u_{\xi\xi})_\xi = 0 \tag{1.2}$$

Так как уравнение (1.2) инвариантно относительно преобразования $\xi \to -\xi$, то решения $u = u(\xi)$ будут четными функциями.

С помощью следующей замены

$$u = dH, \quad \xi = b\xi_1, \quad d = \alpha^2/\beta, \quad b = \beta/\alpha, \quad C = (c-1)/d \tag{1.3}$$

уравнение (1.2) перепишем в виде

$$-CH_\xi + (H^2 - LH - H_{\xi\xi})_\xi = 0 \tag{1.4}$$

Уравнение (1.4) инвариантно относительно преобразования

$$H \to H + \text{const}, \quad C \to C + 2\text{const} \tag{1.5}$$

Если пренебречь в (1.4) нелинейным членом, то периодические решения этого уравнения легко находятся. Фазовая скорость этих бесконечно малых (линейных) возмущений есть функция волнового числа $k = 2\pi/\lambda$ (λ — длина волны)

$$C = k^2 - |k| \tag{1.6}$$

Как ясно из (1.3), (1.6), уравнение (1.4) записано в системе отсчета, движущейся с фазовой скоростью бесконечно длинных ($k \to 0$) линейных волн.

Периодические решения уравнения (1.4) конечной амплитуды находятся численно. Для этого они представляются в виде ряда Фурье

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n \exp[ikn\xi] \tag{1.7}$$

Так как H — четная вещественная функция, то $H_n = H_{-n}$. Оставляя у ряда (1.7) первые N гармоник, подставим его в уравнение (1.4). Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых экспонентах, получаем конечную систему нелинейных алгебраических уравнений для вещественных неизвестных $H_0, H_1, \ldots, H_n$

$$H_n = \frac{kn}{(C + kn - (kn)^2)^2\, kn} \sum_{m=n-N}^{N} H_m H_{n-m}, \quad n = 0, \ldots, N \tag{1.8}$$

Решить эту систему методом прямых итераций невозможно из-за сильной счетной неустойчивости. Для ее подавления используется метод работы [3]. Применительно к данному случаю его суть в следующем. Вместо системы (1.8) итерациями решается следующая система:

$$H_n = \frac{S_1^2 kn}{S_2^2 (C + kn - (kn)^2)\, kn} \sum_{m=n-N}^{N} H_m H_{n-m}, \quad n = 0, \ldots, N \tag{1.9}$$

$$S_1^2 = \sum_{n=0}^{N} H_n^2, \quad S_2^2 = \sum_{n=0}^{N} H_n \frac{kn}{(C + kn - (kn)^2)\, kn} \sum_{m=n-N}^{N} H_m H_{n-m}$$

Ясно, что если H_n удовлетворяют уравнению (1.8), то $S_1 = S_2$.

Неопределенность 0/0 в (1.8), (1.9) при $n = 0$ отражает тот факт, что решение уравнения (1.4) не определяется однозначно заданием только условий периодичности.

Итерационный процесс в (1.9) наиболее хорошо сходится для решений системы (1.8), у которых H_0 удовлетворяют соотношению

$$H_0 = \frac{1}{C} \sum_{m=-N}^{N} H_m^2 \tag{1.10}$$

Однако ниже будут представлены результаты, полученные для решений, удовлетворяющих нормировке $H_0 = 0$, которая означает, что в качестве масштаба длины берется средняя толщина верхнего слоя. От решений с нормировкой (1.10) к решениям, для которых справедливо $H_0 = 0$, легко перейти с учетом свойства (1.5).

Солитонные решения уравнения (1.4) являются пределом периодических при стремлении волнового числа k к нулю ($k \to 0$). Отвечающие им соотношения получаются заменой в (1.7)—(1.9) соответствующих сумм на интегралы, в которых при численном счете бесконечные пределы интегрирования заменяются на некоторые конечные. Последние (так же как и номера N для случая периодических решений) выбираются таким образом, чтобы их дальнейшее увеличение практически не влияло на результат. Для периодических решений, например, было достаточно, чтобы при образовании ряда (1.7) выполнялось неравенство:

$$|H_N|/\max|H_n| < 10^{-3}$$

Для большинства из приводимых ниже результатов для этого достаточно было брать N в пределах 10—20.

2. Фазовая скорость периодических бесконечно малых возмущений с волновым числом k дается формулой (1.6). Для данного волнового числа будем искать решение малой, но конечной амплитуды, удовлетворяющее нормировке $H_0 = 0$. Представим его в виде рядов по малому параметру

$$H = \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \ldots, \quad C = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \ldots \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.4), получаем бесконечную систему линейных уравнений. Первому порядку по ε в этой системе отвечает уравнение

$$-c_0 H_{1\xi} - (LH_1 + H_{1\xi\xi})_\xi = 0 \tag{2.2}$$

Решение (2.2), удовлетворяющее условию $H_0 = 0$, имеет вид

$$H_1 = A\exp(ik\xi) + \overline{A}\exp(-ik\xi), \quad c_0 = k^2 - |k| \tag{2.3}$$

Здесь черта означает операцию комплексного сопряжения.

Второму порядку по ε соответствует уравнение

$$-c_1 H_{1\xi} + (H_1^2)_\xi - c_0 H_{2\xi} - (LH_2 + H_{2\xi\xi})_\xi = 0 \tag{2.4}$$

Из условия отсутствия в (2.4) секулярных членов следует, что $c_1 = 0$, а решение H_2 имеет вид

$$H_2 = A_1\exp(2ik\xi) + \overline{A}_2\exp(-2ik\xi), \quad A_1 = -A^2/(3k^2 - |k|) \tag{2.5}$$

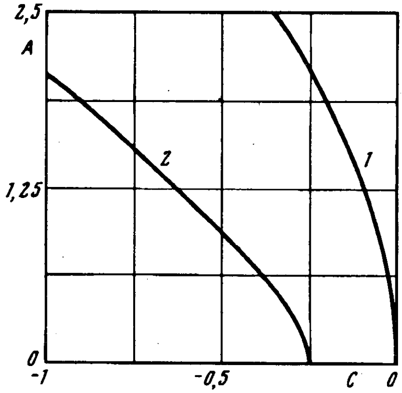
Из условия обращения в нуль секулярных членов в уравнении третьего порядка по ε получается следующая связь между поправкой второго порядка к значению фазовой скорости c_2 и значением амплитуды A:

$$c_2 = -2A^2/(3k^2 - |k|) \tag{2.6}$$

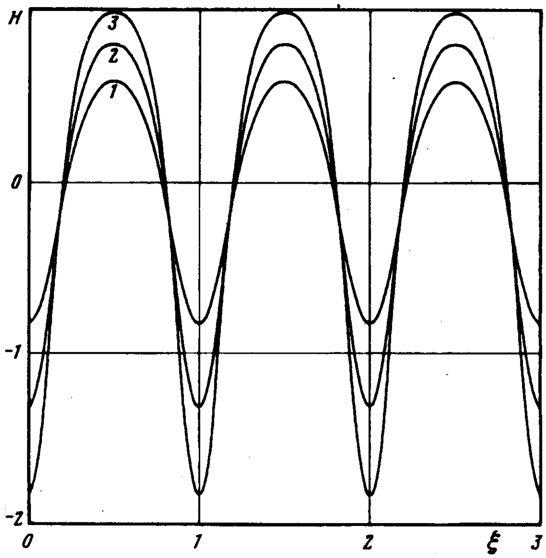
Как ясно из (2.3), (2.5), (2.6), в качестве малого параметра ε в (2.1) можно использовать само значение модуля амплитуды первой гармоники $|A|$.

Таким образом, соотношения (2.3), (2.5), (2.6) позволяют судить о характере ветвления периодических решений (1.7) от тривиального решения $H = 0$. Так, как видно из (2.6), для таких режимов малой, но конечной амплитуды для значений волновых чисел $k < k_* = 1/3$ значения фазовой скорости больше, чем скорость соответствующих бесконечно малых возмущений. И наоборот, если $k > k_*$, то у таких волн фазовые скорости меньше, чем у линейных режимов. Критическое волновое число k_* является границей, отделяющей слабонелинейные режимы, в формировании которых преобладают капиллярные силы («короткие» волны с $k > k_*$) от режимов, для которых существенен нелокальный характер связи возвращающей силы и смещения поверхности — четвертый член в (1.1).

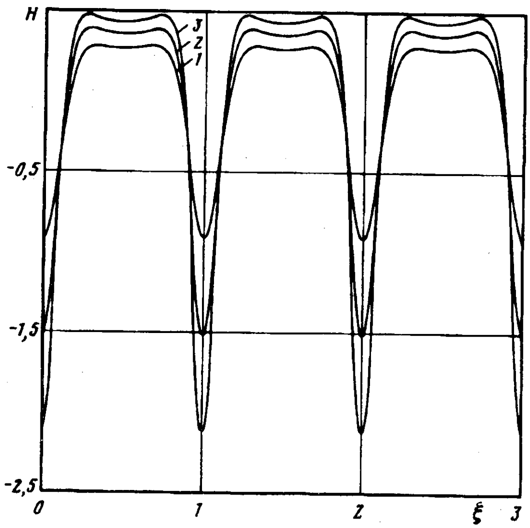
При стремлении волнового числа k к значению k_* решение (2.5), (2.6) неограниченно растет и, значит, разложение (2.1), (2.3), (2.5), (2.6) становится



Фиг. 1



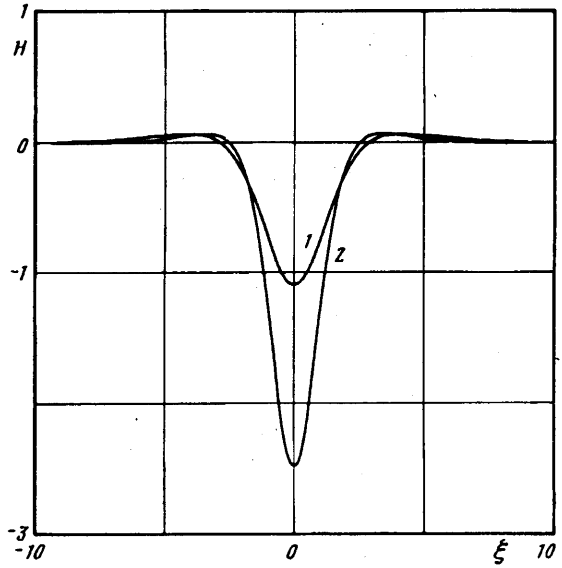
Фиг. 2



Фиг. 3

несправедливым. Это связано с тем, что фазовые скорости линейных возмущений для первой и второй гармоник совпадают и выполняются условия для их резонанса. (Отметим, что для решений уравнения Бенжамина — Оно подобный резонанс отсутствует.) Поэтому в окрестности этой точки требуется проводить специальное исследование. Здесь этот особый случай рассматриваться не будет.

Для периодических решений (1.7), $H_0 = 0$, на фиг. 1 показаны полученные численно зависимости амплитуды A от фазовой скорости C. Кривая *1* соответствует значению волнового числа $k = 1$, кривая *2* — $k = 0{,}5$. Здесь амплитуда определена следующим образом: $A = H_{max} - H_{min}$. Для малых значений амплитуд численные результаты сопрягаются с аналитическим решением (2.1), (2.3), (2.5), (2.6). Типичные профили этих волн для $k = 1$ представлены на фиг. 2, а для $k = 0{,}5$ — на фиг. 3. На каждом из них на оси абсцисс в качестве масштаба используется длина волны и показаны по три периода. На фиг. 2 фазовые



Фиг. 4

скорости волн $C = -0{,}12$; $-0{,}26$; $-0{,}43$ (кривые *1—3*). На фиг. 3 $C = -0{,}61$; $-0{,}92$; $-1{,}25$ (кривые *1—3*). Ясно, что полученное семейство периодических решений является по крайней мере двухпараметрическим.

Пределом при $k \to 0$ для данного семейства является однопараметрическое семейство солитонных решений. На фиг. 4, в качестве примера представлены два таких солитона, фазовые скорости которых $C = -1$; -2 (кривые *1*, *2*). Как показали расчеты, эти солитоны имеют монотонно убывающие асимптотики при $\xi \to \pm\infty$. В работе [2] ожидалось, что солитонные решения уравнения (1.1) своими пределами будут иметь затухающие осцилляции. Такой вывод вызван неточным учетом вклада члена LH при анализе возможных солитонных асимптотик.

Таким образом, из полученных результатов следует, что уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно двухпараметрическое семейство периодических решений и одно семейство солитонных решений. Для нахождения других возможных семейств типа $u = u(\xi)$, планируется, в частности, исследование устойчивости полученных решений и проведение для них бифуркационного анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Benjamin T. B.* Internal waves of permanent form in fluids of great depth//J. Fluid Mech. 1967. V. 29. Pt 3. P. 559—592.
2. *Benjamin T. B.* A new kind of solitary wave//J. Fluid Hech. 1992. V. 245. P. 401—411.
3. *Петвиашвили В. И.* Об уравнении необыкновенного солитона//Физика плазмы. 1976. Т. 2. Вып. 3. С. 469—72.

Новосибирск

Поступила в редакцию
27.IV.1994