МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1995

УДК 532.582.33

 М. В. НОРКИН

УДАР ВЫРОЖДЕННОГО ТОРА О ЖИДКОСТЬ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Рассматривается задача о вертикальном ударе по вырожденному тору — твердому телу, полученному вращением окружности вокруг своей касательной и наполовину погруженному в идеальную жидкость бесконечной глубины. Удар предполагается таким, что происходит безотрывное обтекание тора (безотрывный удар). После нечетного продолжения потенциала скорости через свободную поверхность задача разбивается на две. Первая соответствует поступательному движению тора в неограниченной жидкости вдоль оси симметрии, вторая — его вращению. Для тора общего вида задача о поступательном движении вдоль оси симметрии рассматривалась в [1], где методом разделения переменных в тороидальных координатах построено решение в виде рядов по функциям Лежандра и найдено выражение для кинетической энергии жидкости.

В настоящей работе для поступательного движения вырожденного тора потенциал скорости жидкости найден в квадратурах. В случае вращательного движения осуществлено сведение задачи к решению интегрального уравнения второго рода типа Фредгольма. Были использованы вырожденные биполярные координаты. Найдены численные значения присоединенной массы и присоединенного момента инерции. Выведено условие безотрывности удара.

1. Постановка задачи. Потенциал скоростей Ф, приобретенных частицами жидкости, удовлетворяет уравнению Лапласа во всем объеме, занятом жидкостью [2—6] и следующим граничным условиям на смоченной поверхности тора и свободной поверхности жидкости:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = v_0 n_z + \omega (z n_x - x n_z)$$

$$\Phi = 0$$

где n_x, n_z — компоненты вектора нормали к поверхности тора, v_0, ω — поступательная и угловая скорости тела. Предполагаем, что ось x проходит через точку, в которой наносится удар

$$\operatorname{grad} \Phi = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$$

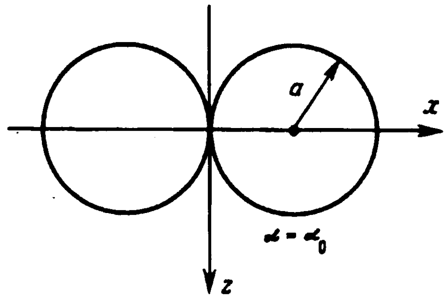
Продолжая потенциал Ф нечетным образом через свободную поверхность, приходим к внешней задаче Неймана. Представляется Ф в виде

$$\Phi = V_0 \Phi_1 + \omega \Phi_2 \qquad (1.1)$$

Функция Φ_1 соответствует тому случаю, когда тор движется вдоль оси симметрии z с единичной скоростью. Функция Φ_2 соответствует вращению тела вокруг оси y с угловой скоростью, равной единице.

2. Поступательное движение. Во вращательно-симметричном случае можно ввести функцию тока ψ

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}$$



Для нахождения ψ используем выроженные биполярные координаты α, β, φ [7], которые связаны с цилиндрическими r, z соотношениями

$$z = \frac{C\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad r = \frac{C\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \tag{2.1}$$
$$C = 2\alpha_0 a, \quad 0 \le \alpha < \infty, \quad -\infty < \beta < \infty$$

где a — радиус круга поперечного сечения тора. Угловую координату φ оставляем неизменной: $0 \le \varphi \le 2\pi$. Координатные поверхности $\alpha = \alpha_0 = \mathrm{const}$ представляют собой вырожденные торы, образованные вращением окружности вокруг своей касательной (вокруг оси z, фигура). Поверхности $\beta = \mathrm{const}$ суть сферы, имеющие общую точку соприкосновения в начале координат. Для функции тока $\psi(\alpha, \beta)$ имеем краевую задачу в вырожденных биполярных координатах

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right) = 0 \tag{2.2}$$

$$\psi(\alpha_0, \beta) = -\frac{r^2}{2} = -\frac{C^2\alpha_0^2}{2(\alpha_0^2 + \beta^2)^2}$$

$$\psi \to 0, \quad r^2 + z^2 \to \infty$$

Метод разделения переменных для задачи (2.2) приводит с учетом того, что ψ должна быть четной функцией переменной β и обращаться в ноль на оси z: $\psi(0, \beta) = 0$, к решениям вида

$$\psi(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int_0^\infty g(\lambda) \frac{I_1(\alpha\lambda)}{I_1(\alpha_0\lambda)} \cos\beta\lambda \, d\lambda$$

где $I_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода. Удовлетворяя граничному условию, приходим к разложению заданной функции в косинус интеграл Фурье

$$\int_0^\infty g(\lambda) \cos\beta\lambda \, d\lambda = -\frac{C^2\alpha_0}{2(\alpha_0^2 + \beta^2)^{3/2}}$$

Откуда, используя значение интеграла [8, 390 с.]

$$\int_0^\infty \frac{\cos\beta\lambda \, d\beta}{(\alpha_0^2 + \beta^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{\alpha_0} K_1(\alpha_0\lambda) \tag{2.3}$$

находим $g(\lambda) = -(c^2/\pi)\lambda K_1(\alpha_0\lambda)$, где $K_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя третьего рода. Запишем окончательное выражение для функции тока

$$\psi(\alpha, \beta) = -\frac{c^2}{\pi} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int_0^\infty \lambda \frac{K_1(\alpha_0\lambda)}{I_1(\alpha_0\lambda)} I_1(\alpha\lambda) \cos\beta\lambda \, d\lambda$$

Потенциал Φ_1 восстанавливается по функции тока в виде

$$\Phi_1(\alpha, \beta) = \int_0^\beta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right) d\beta$$

Здесь учтено условие на свободной поверхности. Используя формулу дифференцирования и рекуррентные соотношения для функции Бесселя [9, с. 24, 33]

$$\frac{d}{dx} I_1(x) = \frac{1}{2}(I_0(x) + I_2(x))$$

$$I_2(x) = I_0(x) - \frac{2}{x} I_1(x) \tag{2.4}$$

$$K_1(x) I_0(x) + I_1(x) K_0(x) = \frac{1}{x}$$

найдем формулу для подынтегрального выражения Φ_1 и потенциал $\Phi_1(\alpha_0, \beta)$ на смоченной поверхности тора

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = -\frac{C}{\pi} \Bigg[-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int_0^\infty \lambda \frac{K_1(\alpha_0 \lambda)}{I_1(\alpha_0 \lambda)} I_1(\alpha\lambda) \cos \beta\lambda \, d\lambda +$$

$$+ \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \int_0^\infty \lambda^2 \frac{K_1(\alpha_0 \lambda)}{I_1(\alpha_0 \lambda)} I_0(\alpha\lambda) \cos \beta\lambda \, d\lambda \Bigg] \tag{2.5}$$

$$\Phi_1(\alpha_0, \beta) = -\frac{C}{\pi} \left[-\frac{\pi\beta}{\alpha_0^2 + \beta^2} + \frac{1}{\alpha_0} \int_0^\beta \sqrt{\alpha_0^2 + S^2} \, dS \int_0^\infty \frac{\lambda \cos \lambda S \, d\lambda}{I_1(\alpha_0 \lambda)} \right]$$

Здесь также учтено значение интеграла [9, 98 с.]

$$\int_0^\infty \cos bt K_0(t) \, dt = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{1 + b^2}}$$

Вычислим присоединенную массу жидкости

$$m = -\rho \int\int_{S_p} \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} ds$$

где S_p — смоченная поверхность тора, ρ — плотность жидкости. Переходя в интеграле для m к вырожденным биполярным координатам (2.1), учитывая следующие выражения для $\partial\Phi_1/\partial n$ на смоченной поверхности и используя (2.5) и (2.3), окончательно получим:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = n_z = \frac{2\alpha_0 \beta}{\alpha_0^2 + \beta^2}$$

$$m = \nu \rho a^3 \left(\nu = -\pi^2 + 8 \int_0^\infty \frac{s^2 K_1(s)}{I_1(s)} ds \approx 10{,}158 \right) \tag{2.6}$$

3. **Вращение вырожденного тора.** Рассмотрим теперь задачу о вращении вырожденного тора в идеальной жидкости. Уравнение Лапласа и граничное условие в вырожденных биполярных координатах имеют вид

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \beta^2} + \frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} - \frac{2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = z n_x - x n_z = -\frac{c\beta}{\alpha_0^2 + \beta^2} \cos \varphi \tag{3.1}$$

Функцию Φ_2 разыскиваем в виде

$$\Phi_2(\alpha, \beta, \varphi) = a^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos\varphi \int\limits_0^\infty f(\mu) I_1(\alpha\mu) \sin\beta\mu \, d\mu \tag{3.2}$$

Здесь учтено, что Φ_2 — нечетная функция переменной β и ограниченна при $\alpha = 0$. Удовлетворяя граничному условию с учетом выражения для $\partial\Phi_2/\partial n$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = -\frac{\alpha_0^2 + \beta^2}{C} \frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0}$$

$$\frac{\alpha_0^2}{\alpha_0^2 + \beta^2} \int\limits_0^\infty f(\mu) I_1(\alpha_0\mu) \sin\beta\mu \, d\mu + \int\limits_0^\infty f(\mu) \left[\alpha_0\mu I_0(\alpha_0\mu) - I_1(\alpha_0\mu)\right] \sin\beta\mu \, d\mu =$$

$$= \frac{4\alpha_0^3\beta}{(\alpha_0^2 + \beta^2)^{5/2}}$$

Здесь были использованы формулы (2.4). Применяя к последнему уравнению синус преобразование Фурье, используя значения интегралов [8, с. 390, 395]

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos\beta z \, d\beta}{\alpha_0^2 + \beta^2} = \frac{\pi}{2\alpha_0} e^{-\alpha_0 z}, \quad z \geq 0$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\beta \sin\beta\mu \, d\beta}{(\alpha_0^2 + \beta^2)^{5/2}} = \frac{\mu^2}{3\alpha_0} K_1(\alpha_0\mu), \quad \mu > 0 \tag{3.3}$$

и делая замену переменной $\alpha_0\mu = y$, приходим к интегральному уравнению второго рода

$$h(y) + \int\limits_0^\infty h(x)\, b(x) \left[e^{-|y-x|} - e^{-(y+x)}\right] dx = \frac{8}{3\pi} y^2 K_1(y) \tag{3.4}$$

$$b(x) = \frac{I_1(x)}{2\,(xI_0(x) - I_1(x))}, \quad f\left(\frac{x}{\alpha_0}\right) \left[xI_0(x) - I_1(x)\right] = h(x)$$

Вычислим присоединенный момент инерции

$$J = -\rho \iint\limits_{S_p} \Phi_2 \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} ds$$

Переходя в последнем интеграле к координатам (2.1), учитывая (3.1), (3.2) и формулу (3.3), окончательно получим

$$J = \gamma\rho a^5, \quad \gamma = \frac{16\pi}{3} \int\limits_0^\infty \mu^2 h(\mu)\, b(\mu)\, K_1(\mu)\, d\mu \tag{3.5}$$

После замены переменных $x = -\ln s$, $y = -\ln t$ интегральное уравнение (3.4) сводится к интегральному уравнению на отрезке [0, 1], которое было решено численно. Найдено приближенное значение γ: $\gamma \approx 2{,}728$.

4. Условие безотрывности удара. Координата точки приложения импульса

$$x_0 = -J\omega/mv_0 \tag{4.1}$$

Условие безотрывности удара состоит в том, что импульсное давление $P_t = -\rho\Phi$ неорицательно всюду на смоченной поверхности тела. Учитывая (1.1), (2.5), (3.2) и производя замену переменной $\beta \to \alpha_0\beta$ в формуле для P_t, запишем условие безотрывности в виде

$$\frac{v_0}{\pi}\left[-\frac{\pi\beta}{1+\beta^2}+\int_0^\beta \sqrt{1+s^2}\,ds\int_0^\infty \frac{\lambda\cos\lambda s\,d\lambda}{I_1(\lambda)}\right]- \tag{4.2}$$

$$-a\omega\sqrt{1+\beta^2}\cos\varphi\int_0^\infty h(\mu)\,b(\mu)\sin\beta\mu\,d\mu \ge 0,\quad \beta\ge 0$$

Представляется очевидным и подтверждается вычислениями, что отрыв начинается в окрестности точки $x = 2a$ ($\beta = 0$, $\varphi = 0$). Таким обарзом, условие безотрывности эквивалентно неотрицательности производной по β при $\beta = 0$, $\varphi = 0$ от левой части (4.2). Вычисляя производную, получаем условие безотрывности

$$\frac{v_0}{\pi}\left[-\pi+\int_0^\infty \frac{s\,ds}{I_1(s)}\right]-a\omega\int_0^\infty \mu h(\mu)\,b(\mu)\,d\mu \ge 0 \tag{4.3}$$

Из (4.1), (4.3), (2.6), (3.5) получим необходимое и достаточное условие безотрывности удара

$$|x_0| \le ka,\quad k=\frac{\gamma}{\nu}\left[-1+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{I_1(s)}\right]\left[\int_0^\infty \mu h(\mu)\,b(\mu)\,d\mu\right]^{-1}$$

Численное значение $k \approx 0{,}36$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hicks. On toroidal functions//Phil. Trans. Ser. A. 1881. V. 172. P. 609—652.
2. *Жуковский Н. Е.* Собр. соч. Т. 2. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 763 с.
3. *Седов Л. И.* Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости//Тр. ЦАГИ. 1934. Вып. 187.
4. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
5. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
6. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1. 583 с.; Ч. 2. 727 с.
7. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С.* Сборник задач по математической физике. М.: Гостехиздат, 1955. 420 с.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.
9. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 287 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
7.IV.1994