

УДК 532.546:536.42:551.328

© 1995 г. А. Г. ЕГОРОВ, А. В. КОСТЕРИН, А. Е. ШЕШУКОВ

ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ПРОТАИВАНИЯ МЕРЗЛОГО ГРУНТА ФИЛЬТРУЮЩИМ РАСТВОРОМ

Рассматриваются одномерные задачи протаивания пористого мерзлого грунта при интенсивной закачке в него рассола. В предположениях о бездиффузионности и локальном термодинамическом равновесии изучаемого процесса эти задачи носят автомодельный характер и допускают свое полное аналитическое исследование.

В зависимости от характера плавления льда на температурном и концентрационном фронтах выделяются четыре режима протаивания грунта. Получены в терминах температуры и концентрации закачиваемого рассола критерии их реализации. Обсуждаются возможности упрощенных постановок.

1. Постановка задачи. Мерзлая порода представляет собой сложную физико-химическую грунтовую систему, включающую в себя три фазы влаги: лед, пар, воду [1]. Наличие последней в мерзлом грунте при температуре $T_{\infty} < T_f = 0^{\circ}\text{C}$ может быть обусловлено, в частности, присутствием примеси, концентрация которой связана с температурой кристаллизации воды линейным соотношением $\gamma c_{\infty} = T_f - T_{\infty}$. Предположим, что незамерзшая часть порового пространства вне зависимости от того, содержит она газ или раствор концентрации c_{∞} , связана, и рассмотрим процесс закачки с постоянным расходом в полупространство $x \geq 0$ раствора концентрации c_0 и температуры T_0 , отличных от c_{∞} , T_{∞} . Допустим, кроме того, что темп закачки достаточно высок, так что теплопроводностью и диффузией можно пренебречь по сравнению с конвективным переносом тепла и примеси. Противоположный этому случай диффузионного переноса изучался ранее [2—4].

Законы сохранения массы, энтальпии [5] и количества примеси принимают в рассматриваемом случае вид

$$m \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \mu + \rho_l (1 - \mu)) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i V) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_i V) = 0 \quad (1.2)$$

$$H = (1 - m) h_m + m \mu h_s + m (1 - \mu) h_l \quad (1.3)$$

$$m \frac{\partial \mu c}{\partial t} + \frac{\partial c V}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

Здесь m — пористость, μ — влажность (доля пор, не занятых льдом), V — скорость фильтрации, c — объемная концентрация примеси в растворе, H — объемная энтальпия среды, ρ , h — плотность и удельная объемная энтальпия. Индексы m , i , s указывают на скелет, лед и раствор соответственно.

Помимо выписанных балансовых уравнений необходимо указать реологические соотношения, связывающие плотность ρ , раствора и энтальпии фаз с концентрацией c раствора и температурой T среды.

Принимается, что ρ_s не зависит от температуры и отличается от плотности ρ_w чистой воды на линейный по концентрации член. В этом случае уравнение (1.1) преобразуется с учетом (1.4) к виду

$$m(\rho_w - \rho_l) \frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_w \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

В достаточно широком интервале температур и концентраций справедлива линейная по температуре и концентрации аппроксимация фазовых энтальпий

$$h_m = h_m^\circ + C_m(T - T_f), \quad h_l = h_l^\circ + C_l(T - T_f), \quad h_s = h_w^\circ + C_w(T - T_f) + \alpha c$$

Здесь $h_m^\circ, h_l^\circ, h_w^\circ$ и C_m, C_l, C_w — объемные энтальпии и теплоемкости скелета, льда и чистой воды при 0°C . Подставив эти выражения в (1.2), (1.3) и воспользовавшись тем, что массовые энтальпии льда и воды отличаются друг от друга при 0°C на скрытую теплоту L плавления ($h_w^\circ/\rho_w - h_l^\circ/\rho_l = L$), можно преобразовать (1.2) с учетом (1.4), (1.5) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} (C_0(T - T_f) + \rho_l m L \mu) + C_w \frac{\partial}{\partial x} (V(T - T_f)) = 0 \quad (1.6)$$

$$C_0 = (1 - m) C_m + m(1 - \mu) C_l + m \mu C_w \quad (1.7)$$

Полученная таким образом система уравнений (1.4)—(1.7) замыкается в двухфазной зоне (при $\mu < 1$) условием локального термодинамического равновесия

$$T_f - T = \gamma c \quad (1.8)$$

В однофазной зоне ($\mu \equiv 1$) ее замыкает само условие однофазности.

Обратим внимание на то, что величины C_0 и V в (1.6) являются, вообще говоря, функциями x, t и исключение T_f из (1.6) в общем случае невозможно.

Система уравнений (1.4)—(1.8) должна быть дополнена стандартными условиями на разрывах и подчинена граничным и начальным условиям

$$x = 0: \quad V = V_0, \quad T = T_0, \quad c = c_0$$

$$t = 0: \quad T = T_\infty, \quad \mu = \mu_\infty$$

В силу бездиффузионности рассматриваемого процесса последние могут быть перенесены на передний фронт $x = l(t)$ закачиваемой жидкости. Движение указанного фронта при этом описывается уравнением

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \frac{V(t, l(t))}{m \mu_\infty}, \quad l(0) = 0$$

Сформулированная задача отыскания V, μ, c, T допускает автомодельное решение, при котором значения искомым функций переносятся с одной и той же скоростью в течение всего процесса. Введем соответствующую автомодельную переменную $\xi = mx/V_0 t$, имеющую смысл безразмерной скорости переноса влажности (и других величин), и нормируем $V, (T - T_\infty), c$ на $V_0, (T_f - T_\infty), c_\infty$, сохранив за ними прежние обозначения (под T понимается $(T - T_\infty)/(T_f - T_\infty)$). При этом исходная задача сводится к отысканию на интервале $0 < \xi < \xi_0$ решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \delta \xi \mu' &= V', \quad \xi (\mu c)' = (Vc)' \\ \xi ((1 + \lambda \mu) T + (A + \beta_w \delta - \lambda) \mu)' &= \beta_w (VT)' \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$T + c = 1, \quad 0 < \mu < 1 \quad (1.10)$$

$$V(0) = 1, \quad T(0) = T_0, \quad c(0) = c_0$$

$$T(\xi_0) = 0, \quad \mu(\xi_0) = \mu_\infty, \quad V(\xi_0) = \mu_\infty \xi_0 \quad (1.11)$$

$$\delta \xi [\mu] = [V], \quad \xi [\mu c] = [Vc]$$

$$\xi [(1 + \lambda \mu) T + (A + \beta_w \delta - \lambda) \mu] = \beta_w [VT] \quad (1.12)$$

$$\delta = \frac{P_w - P_i}{P_w}, \quad \beta_w = m \frac{C_w}{C_*}, \quad \beta_i = m \frac{C_i}{C_*}, \quad \lambda = \beta_w - \beta_i$$

$$A = \frac{mL\rho_i}{C_* (T_f - T_\infty)}, \quad C_* = (1 - m) C_m + m C_i$$

* В (1.12) через $[\cdot]$ обозначен скачок соответствующей функции. Величина ξ_0 в (1.11) заранее неизвестна и должна определяться в ходе решения задачи.

Для безразмерных параметров имеют место следующие ограничения: $0 \leq \delta, \beta_w, \beta_i, \lambda \leq 1; A > 0$. Для того чтобы дать более точное представление о типичных величинах этих параметров, приведем их значения, рассчитанные при $m = 0, 1, T_\infty = -6^\circ \text{C}, C_m = 2500 \text{ кДж/м}^3 \text{K}$

$$\delta = 0,08, \quad \beta_i = 0,1, \quad \beta_w = 0,2, \quad A = 2 \quad (1.13)$$

Дальнейшее изложение будет проводиться в частном предположении неизменности плотностных и теплофизических характеристик среды до и после таяния льда в ней: $\delta = 0, \lambda = 0$. Указанное упрощение является главным образом упрощением изложения и связано со стремлением избежать громоздкости, сопутствующей рассмотрению общего случая. Для полной постановки будут приведены лишь окончательные результаты. Рассматриваемая предельная ситуация представляет дополнительный интерес в связи с тем, что соответствующее решение не только охватывает все характерные особенности решения общей задачи, но и хорошо согласуется с ним количественно.

2. Решение в двухфазной зоне. Отыщем решение рассматриваемой задачи в двухфазной зоне, включающей точку ξ_0 . В силу сделанных предположений из (1.9), (1.11) видно, что $V = 1, \xi_0 = 1/\mu_\infty$, и система (1.9) после исключения из нее температуры приводится к виду

$$\xi d(\mu c) = dc, \quad \xi d(A\mu - c) = -\beta dc \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что комплекс $(A\mu - c + \beta \mu c)$ не зависит от ξ . Кроме того, из соотношений на разрыве

$$\xi [\mu c] = [c], \quad \xi [T + A\mu] = \beta [T] \quad (2.2)$$

ясно, что он непрерывен всюду в двухфазной зоне. Используя граничные условия (1.11), в точке ξ_0 получим отсюда

$$c = c(\mu) = 1 + (A + \beta) \frac{\mu - \mu_\infty}{1 - \beta \mu} \quad (2.3)$$

Привлекая далее любое из соотношений (2.1), найдем скорость ξ как функцию влажности μ

$$\frac{\beta}{\xi(\mu)} = 1 - \frac{A(1 - \beta \mu)^2}{(A + \beta)(1 - \beta \mu_\infty)} \quad (2.4)$$

Формулы (2.3), (2.4) справедливы всюду в двухфазной зоне, даже если внутри нее искомые функции $c(\xi), \mu(\xi)$ претерпевают разрыв.

Можно показать, что $c(\mu)$ монотонно возрастает при $0 \leq \mu \leq 1$, а $\xi(\mu)$ монотонно убывает в физически допустимой области изменения μ ($0 \leq \mu \leq 1$, $c(\mu) \geq 0$). Следствием последнего факта является [6], в частности, невозможность разрыва $[\mu] < 0$ внутри двухфазной зоны. Другого типа разрывы — на границе между однофазной и двухфазной зонами и разрыв $[\mu] > 0$ (аналог скачка уплотнения в газовой динамике) — не только возможны, но и реализуются в рассматриваемой задаче.

Укажем также на то, что

$$\xi(\mu_\infty) = \frac{A + \beta}{1 + A\mu_\infty} < \frac{1 + A}{1 + A\mu_\infty} < \frac{1}{\mu_\infty} = \xi_0$$

и, следовательно, начальные значения влажности, концентрации, температуры сохраняются не только на переднем фронте, но и в некоторой прилегающей к нему области.

Интересно отметить, что зависимость (2.3) сохраняется и в общем случае ($\delta \neq 0$, $\lambda \neq 0$), если вместо β в ней фигурирует β_r .

Формулы (2.3), (2.4) дают решение исходной задачи в двухфазной зоне. Граница этой зоны должна определяться при сращивании полученного решения с граничными условиями (1.11) при $\xi = 0$ посредством соотношений (2.2) на разрывах. При этом необходимо допустить наличие двух разрывов. В тривиальном случае ($\mu_\infty = 1$) отсутствия фазового перехода таковыми являются температурный фронт (T -фронт), движущийся со скоростью $\xi_T = \beta$, и концентрационный фронт (C -фронт), движущийся со скоростью $\xi_C = 1 > \xi_T$. В общем случае на каждом из двух фронтов разрыв может претерпевать и температура, и концентрация. Тем не менее будем и здесь говорить о C - и T -фронтах, подразумеваемая под C -фронтом тот, скорость которого больше.

Как это будет видно из дальнейшего анализа, величина β является максимально возможной скоростью движения T -фронта, в то время как скорость C -фронта совпадает с некоторым значением $\xi(\mu)$ ($\mu_\infty \leq \mu \leq 1$) либо превышает их все. Следующее из (2.4) неравенство $\beta < \xi$ делает при этом, вообще говоря, необходимую проверку выполнимости условия $\xi_T < \xi_C$ излишней.

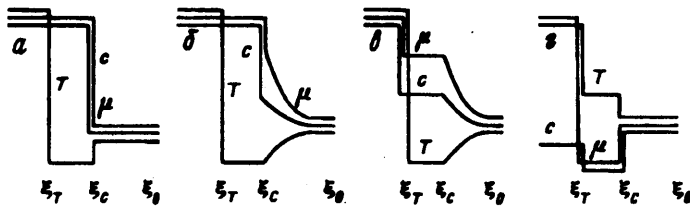
3. Полное плавление на C -фронте. Режимы 1, 2. Анализ возможных картин процесса при вариации входных значений концентрации c_0 и температуры T_0 приводит к выводу о наличии четырех возможных режимов его реализации. Первые два объединены тем, что полное таяние льда происходит на C -фронте. Слева от ξ_C , таким образом, имеет место однофазная зона, в которой $\mu \equiv 1$, $c \equiv c_0$, а T является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения T_0 и T_* на промежутках $[0, \xi_T]$ и $[\xi_T, \xi_C]$ соответственно. Величина T_* здесь подлежит определению, а $\xi_T = \beta$.

Режим 1 характеризуется дополнительно равенством влажности на правом берегу C -фронта, а значит, и всюду на отрезке $[\xi_C, \xi_0]$ своему начальному значению. Таким образом, справа от ξ_C имеем $\mu \equiv \mu_\infty$, $c \equiv 1$, $T \equiv 0$. Схематично зависимости $\mu(\xi)$, $c(\xi)$, $T(\xi)$ представлены на фиг. 1, а. Величины ξ_C , T_* определяются из (2.2)

$$\xi_C = \frac{c_0 - 1}{c_0 - \mu_\infty}, \quad T_* = -\frac{A\xi_C(1 - \mu_\infty)}{\xi_C - \beta} = -\frac{A(1 - \mu_\infty)(c_0 - 1)}{(1 - \beta)c_0 - 1 + \beta\mu_\infty} \quad (3.1)$$

Условием реализации этого режима является требование того, что скорость C -фронта превышает скорость переноса любого, большего μ_∞ , значения влажности: $\xi_C \geq \xi(\mu_\infty)$. Оно приводится к виду

$$\frac{c_0 - 1}{c_0} \geq (A + \beta) \frac{1 - \mu_\infty}{1 - \beta\mu_\infty} \quad (3.2)$$



Фиг. 1

Из (3.1) видно, что $T_* < 0$ и температура понижается при прохождении С-фронта, а скорость ξ_c движения этого фронта монотонно растет с ростом c_0 от величины $\xi(\mu_\infty)$ при наименьшем допусаемом (3.2) значении c_0 до единицы при $c_0 \rightarrow \infty$. В том случае, когда $\xi(\mu_\infty) > 1$, условия (3.2) запрещают реализацию рассматриваемого режима.

Режим 2 в отличие от предыдущего таков, что значение влажности μ_* на правом берегу С-фронта больше, чем μ_∞ . Справа от С-фронта, таким образом, имеет место двухфазная зона, решение в которой дается формулами (2.3), (2.4). Вид зависимостей $\mu(\xi)$, $c(\xi)$, $T(\xi)$ для этого режима схематично представлен на фиг. 1, б. Константы ξ_{cT_*} , μ_* полностью определяют решение задачи. Для их нахождения необходимо воспользоваться соотношениями (2.2) на разрыве и условием того, что скорость движения С-фронта совпадает со скоростью переноса влажности на его правом берегу: $\xi_c = \xi(\mu_*)$. При этом первое из соотношений (2.2) приводит к уравнению для нахождения μ_*

$$(1 - \xi(\mu_*)) c_0 = c(\mu_*) (1 - \xi(\mu_*) \mu_*) \quad (3.3)$$

после решения которого T_* определится вторым условием в (2.2)

$$T_* - T|_{\xi=\xi_c+0} = T_* - 1 + c(\mu_*) = -A(1 - \mu_*) \frac{\xi(\mu_*)}{\xi(\mu_*) - \beta} \quad (3.4)$$

Остается, решив (3.3), найти μ_* как функцию входной концентрации c_0 и выразить в терминах c_0 условие $\mu_\infty \leq \mu_* \leq 1$ реализации данного режима. Решение уравнения (3.4) выписывается в явном виде

$$\frac{\mu_* - \mu_\infty}{1 - \mu_\infty} = \frac{F(c_0)}{F(c_2)} \left(1 - \sqrt{\frac{f(c_0)}{f(c_1)}} \right) \quad (3.5)$$

$$F(c) = \frac{c - 1}{A + \beta c}, \quad f(c) = \frac{c(c - c_2)}{c - 1}$$

$$c_1 = \frac{1 - \beta\mu_\infty}{1 - \beta - A(1 - \mu_\infty)}, \quad c_2 = c(1) = 1 + (A + \beta) \frac{1 - \mu_\infty}{1 - \beta}$$

Выбор отрицательного знака при квадратном корне означает, что вторая ветвь решения отброшена, так как на ней $\mu_* > 1$.

Рассматривая μ_* , определяемую (3.5) как функцию c_0 , легко показать, что она монотонно убывает на интервале $[c_2, c_1]$, принимая на его концах значения 1 и μ_∞ . Следовательно, в терминах входной концентрации условие реализации рассматриваемого режима имеет вид $c_2 \leq c_0 \leq c_1$ или

$$A + \beta \leq \frac{1 - \beta}{1 - \mu_\infty} (c_0 - 1) \leq A c_0 + \beta \quad (3.6)$$

Правое из этих неравенств противоположно условию (3.2) реализации режима 1.

Характер поведения ξ_c, μ_*, T_* в зависимости от c_0 следует из полученных выше формул и физически очевиден. С увеличением c_0 в указанном (3.6) диапазоне μ_* убывает от 1 до μ_∞ , ξ_c возрастает от $\xi(1) < 1$ до $\xi(\mu_\infty)$ при $\xi(\mu_\infty) > 1$ или до 1 при $\xi(\mu_\infty) < 1$, температурный скачок увеличивается от нуля до величины $(A + \beta)(1 - \mu_\infty)/(1 - \beta\mu_\infty)$.

Основные полученные здесь формулы сохраняются и в общем случае ($\delta \neq 0, \lambda \neq 0$) с минимальными изменениями. Так, в (3.2), (3.5), (3.6) для реализации режимов необходима лишь упомянутая выше замена β на β_* . В формуле (3.1), определяющей скорость движения C -фронта, необходимо добавить в знаменатель величину $-\delta(1 - \mu_\infty)$.

4. Плавление на T -фронте. Режимы 3, 4. В обоих рассмотренных выше режимах процесс таяния льда полностью определялся концентрационными эффектами. Не так обстоит дело в двух исследуемых ниже режимах, характеризующихся наличием двухфазной зоны вплоть до T -фронта.

Рассмотрим структуру решения в двухфазной зоне справа от T -фронта. Обозначим через $\mu_*, c_* = c(\mu_*)$, $T_* = 1 - c(\mu_*)$ значения соответствующих величин на правом берегу T -фронта. Определяющее влияние на характер решения при $\xi > \xi_T$ оказывает значение μ_* . Если $\mu_* > \mu_\infty$, то решение описывается формулами (2.3), (2.4). Оно не имеет разрывов и говорить о C -фронте здесь имеет смысл лишь как о точке $\xi = \xi(\mu_*) > \xi_T$, левее которой вплоть до ξ_T искомые функции постоянны. Об этом случае будем говорить далее как о режиме 3. Общая картина процесса для него изображена на фиг. 1, а.

Иначе устроена двухфазная зона при $\mu_* < \mu_\infty$ (режим 4). Действительно, для монотонно убывающей $\xi(\mu)$ значение $\mu_* < \mu_\infty$ при $\xi = \xi_T + 0$ может быть сопряжено со значением μ_∞ при $\xi = \xi_0$ лишь посредством разрыва влажности μ на C -фронте. Общая картина процесса в этом случае выглядит так, как это представлено на фиг. 1, б. Значения искомых функций на интервале $[\xi_T, \xi_c]$ постоянны и совпадают с μ_*, c_*, T_* . Справа от ξ_c они принимают начальные значения. Величина ξ_c определяется по любому из пары соотношений (2.2) на разрыве C -фронте

$$\xi_c = \frac{c_* - 1}{\mu_* c_* - \mu_\infty} = \frac{A + \beta}{1 + A\mu_*} \quad (4.1)$$

Из условий на разрыве на T -фронте определяются ξ_T и μ_* как функции c_0 и T_0

$$\begin{aligned} \xi_T(c_0 - \mu_* c_*) &= c_0 - c_* \\ \xi_T(T_0 + A - A\mu_* - 1 + c_*) &= \beta(T_0 - 1 + c_*) \end{aligned} \quad (4.2)$$

При записи (4.2) учтено, что при $\xi < \xi_T$ $\mu \equiv 1$, $T \equiv T_0$, $c \equiv c_0$.

При заданной концентрации c_0 температура T_0 жидкости на входе не может быть меньше соответствующего c_0 равновесного значения $T_{\min} = 1 - c_0$, так что в дальнейшем при решении системы уравнений (4.2) полагается, что $T_0 \geq T_{\min}(c_0)$. Режимы 3, 4 выделяются после нахождения μ_* из (4.2) неравенствами $\mu_\infty \leq \mu_* \leq 1$ и $0 \leq \mu_* \leq \mu_\infty$ соответственно.

Из (4.2) с учетом связи (2.3) c_* и μ_* следует, что

$$\frac{\xi_T}{\beta - \xi_T} = \frac{T_0 - T_{\min}}{(1 - \beta)(c(1) - c_0)} = \frac{T_0 - 1 + c_0}{(A + \beta)(1 - \mu_\infty) - (1 - \beta)(c_0 - 1)} \quad (4.3)$$

Для рассматриваемых режимов $c(1) \geq c_0$. Обратное неравенство подразумевает (см. (3.6)) реализацию режима 2. При этом знаменатель в правой части (4.3) положителен и, следовательно, ξ_T монотонно возрастает от 0 до β с ростом T_0 от T_{\min} до бесконечности.

Исключив далее ξ_T из второго соотношения в (4.2), найдем, что μ_* должна определяться из решения квадратного уравнения

$$\frac{1 - \beta\mu_{\min}}{1 - \mu_{\min}} (T_0 - T_{\min}) = \beta c_0 \frac{1 - \mu_{\min}}{\mu_* - \mu_{\min}} - (A + \beta) \frac{1 - \beta\mu_{\infty}}{1 - \beta\mu_*} \quad (4.4)$$

Величина $A\mu_{\min} = A - (1 - \beta)(c(1) - c_0) = (A + \beta)\mu_{\infty} + (1 - \beta)c_0 - 1 \leq A$ совпадает с решением (4.4) при $T_0 = \infty$. Из (4.4) видно, что при уменьшении T_0 от ∞ до T_{\min} значение μ_* монотонно увеличивается от μ_{\min} до μ_{\max} , определяемого из (4.4) при нулевой левой части и равного

$$\mu_{\max} = \mu_{\min} + \frac{(1 - \beta)(c(1) - c_0)}{A(A + \beta c_0)} = \frac{(A + \beta)\mu_{\infty} + c_0 - 1}{A + \beta c_0} > \mu_{\min}.$$

Условия реализации режима 3 $\mu_{\infty} \leq \mu_* \leq 1$ могут быть с использованием (4.4) выражены в терминах входных концентрации c_0 и температуры T_0

$$\frac{\beta(1 - \mu_{\infty})T_0}{T_0(1 - \beta) + A(1 - \mu_{\infty})} \leq c_0 - 1 \leq c(1) - 1 = (A + \beta) \frac{1 - \mu_{\infty}}{1 - \beta} \quad (4.5)$$

Нижняя по концентрациям граница этого режима, таким образом, монотонно возрастает с ростом T_0 от единицы при $T_0 = T_{\min}(c_0) = 1 - c_0$ до величины $(1 - \beta\mu_{\infty})/(1 - \beta)$ при $T_0 = \infty$.

Аналогично, условия реализации режима 4 $0 \leq \mu_* \leq \mu_{\infty}$ представляются в виде

$$c(0) \frac{A + (T_0 + c(0) - 1)}{A + (1 - \beta)(T_0 + c(0) - 1)} \leq c_0 \leq 1 + \frac{\beta(1 - \mu_{\infty})t_0}{T_0(1 - \beta) + A(1 - \mu_{\infty})} \quad (4.6)$$

Нижняя граница этого режима так же монотонно растет с ростом T_0 от $c(0) = 1 - (A + \beta)\mu_{\infty}$ при $T_0 = T_{\min}$ до $c(0)/(1 - \beta)$ при $T_0 = \infty$.

Основные формулы, полученные в этом разделе, лишь немногим усложняются в общем случае $\delta \neq 0$, $\lambda \neq 0$. Вместо (4.3), (4.1) имеем

$$\frac{\xi_T}{\beta_w - \xi_T} = \frac{T_0 - 1 + c_0}{(A + \beta_l)(1 - \mu_{\infty}) - (1 - \beta_w)(c_0 - 1) + \lambda T_0}$$

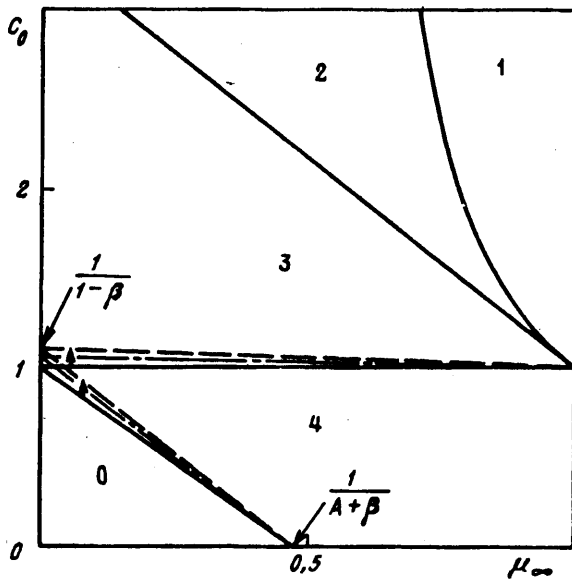
$$\xi_c = \frac{(1 - \xi_T \delta (1 - \mu_*)) (A + \beta_l)}{1 + A\mu_* - \delta (1 - \beta_l \mu_*)}$$

Условия реализации режима 4 принимают вид

$$c(0) \frac{T_0 - \mu_{\infty} + \Theta}{1 - c(0) - \mu_{\infty} + \Theta} \leq c_0 \leq 1 + \frac{(1 - \mu_{\infty})T_0}{\Theta}, \quad c(0) = 1 - (A + \beta_l)\mu_{\infty},$$

$$\Theta = \frac{1}{\beta_w(1 - \delta)} (T_0(1 - \beta_l) + (A - \lambda + \beta_w \delta)(1 - \mu_{\infty}))$$

Условия реализации режима 3 следуют из ограничений для режимов 2, 4.



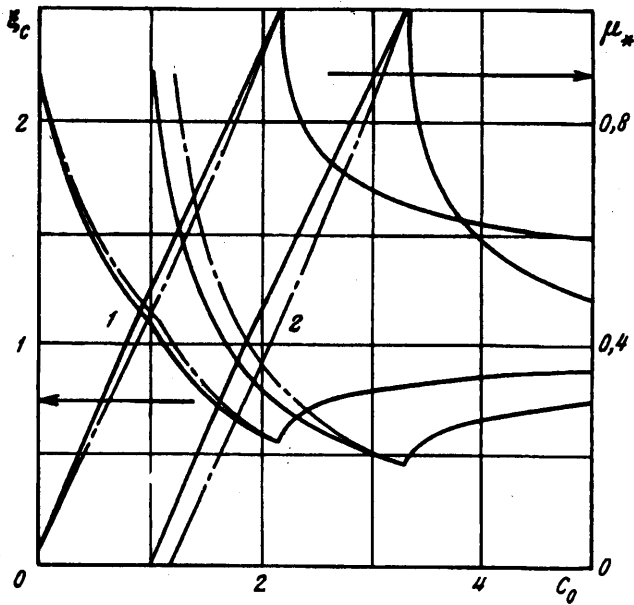
Фиг. 2

5. Анализ результатов. Полученные критерии (3.2), (3.6), (4.5), (4.6) реализации режимов 1—4 для наглядности сведены в карту режимов, изображенную на фиг. 2. Она построена для случая $\beta = 0,1$, $A = 2$. Цифры 1—4 указывают на режим процесса, реализующийся в соответствующей области изменения параметров μ_∞ , c_0 . Границы четвертого режима дополнительно к μ_∞ , c_0 зависят еще от входной температуры T_0 . Сплошными линиями на фиг. 2 они изображены для предельного случая $T_0 = T_{\min}$, штриховыми — для противоположной предельной ситуации $T_0 = \infty$. Промежуточным значениям T_0 отвечает штрихпунктир. Стрелки показывают перемещение данных границ с увеличением температуры жидкости на входе.

Представление о виде карты режимов при других значениях параметров A , β дают приведенные на фиг. 2 соотношения для ее характерных точек. Отметим дополнительно, что прямая, разделяющая режимы 2—3, пересекает ось ординат в точке $c_0 = (1 + A)/(1 - \beta)$, а гипербола, разделяющая режимы 1—2, имеет асимптотой $\mu_\infty = 1 - (1 - \beta)/A$; они касаются друг друга при $\mu_\infty = 1$.

Обращает на себя внимание наличие при малых μ_∞ , c_0 особой области 0, в которой отсутствует решение исходной задачи. Начальная температура и влажность грунта оказываются здесь столь низкими, что закачиваемая в грунт вода замерзает, полностью закупоривая собой свободные поры. Детали этого процесса зависят, разумеется, от кинетики процесса замерзания и в настоящей работе не рассматриваются. Далее об указанной области изменения параметров задачи будем говорить как о режиме полного промерзания грунта.

Принципиальным моментом является то, что граница режима полного промерзания зависит от входной температуры T_0 . Неожиданно при этом то, что область параметров μ_∞ , c_0 , для которых грунт полностью промерзает, увеличивается с ростом T_0 . Иначе говоря, реализуется парадоксальная ситуация, когда грунт принимает низкотемпературный раствор и не принимает (полностью промораживается) такой же раствор, но более высокой температуры. Это оказывается возможным даже тогда, когда концентрация раствора на входе выше равновесной ($c_0 > 1$).



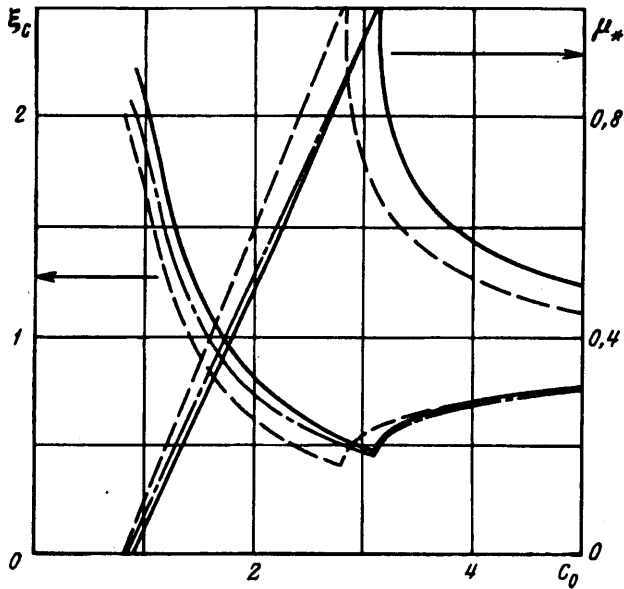
Фиг. 3

За исключением указанной достаточно экзотичной ситуации, влияние температуры на характеристики рассматриваемого процесса перед температурным фронтом относительно невелико. Это иллюстрирует фиг. 3, на которой изображены зависимости скорости ξ_c движения С-фронта и влажности μ_* на его правом берегу от входной концентрации в двух предельных ситуациях $T_0 = \infty$ (штрихпунктир) и $T_0 = T_{\min}(c_0)$ (сплошные линии). Цифры 1, 2 определяют $\mu_\infty = 0,5$ и $0,01$ соответственно. Значения принятых в расчетах параметров соответствовали (1.13). Изломы кривых отвечают смене режимов 4—3—2. Первый режим для обоих представленных на фиг. 3 значений μ_∞ и четвертый режим для $\mu_\infty = 0,01$ не реализовывались.

Слабая зависимость характеристик процесса от входной температуры позволяет надеяться на качественно верное их описание даже при максимальном упрощении исходной задачи принятием $\beta = 0$. Физически указанное условие означает, что теплота не переносится жидкостью и, таким образом, изменение температуры грунта связано лишь с подводом тепла за счет фазового перехода. Подтверждение этому можно найти на фиг. 4, изображающей ξ_c, μ_* как функции c_0 , вычисленные для общей постановки (1.13) (сплошные линии), для постановки $\delta = 0, \lambda = 0$ (штрихпунктир) и для максимально упрощенной постановки $\delta = 0, \beta_l = \beta_w = 0$ (штриховые линии). Расчеты проводились для $\mu_\infty = 0,1, T_0 = 3$, что соответствует входной температуре 12°C . Количественное совпадение результатов расчетов по полной (1.13) и упрощенной постановкам позволяет использовать последнюю во многих практически интересных случаях.

Полученные результаты легко обобщаются на более общую ситуацию. Речь идет о закачке с заданным темпом $q(t)$ в трубку тока заданного поперечного сечения $s(x)$. Этот случай сводится к рассмотренному заменой переменных

$$dx' = s(x) dx, dt' = q(t) dt, V' = Vs(x)/q(t)$$



Фиг. 4

6. Задача о струе. Близка по постановке к рассмотренной выше задача, возникающая при закачке с целью захоронения через одиночную скважину рассола в первоначально сухой, мерзлый грунт. Здесь, очевидно, несколько отступая от скважины, можно вести речь о струе рассола, фильтрующегося лишь под действием силы тяжести. Теплообменом струи с окружающим ее сухим грунтовым массивом при рассмотрении процессов таяния льда в струе можно, как правило, пренебречь. Несложно убедиться в этом, сравнив характерное время $t_1 = R^2/a$ прогрева струи радиуса R (a — коэффициент температуропроводности) с временем t_2 прихода в точку, лежащую на расстоянии x от начала струи, температурного фронта. Время t_2 выражается через скорость фильтрации V и отношение ω теплоемкостей среды и воды формулой $t_2 = \omega x/V$. Оно является максимально возможным временем полного плавления льда в данной точке. Отношение этих двух величин $t_2/t_1 = \pi \omega a x/q$, где $q = \pi R^2 V$ — расход жидкости в скважину. Принимая типичные значения $\omega = 0,5$, $a = 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $q = 10^3 \text{ м}^3/\text{сут}$ найдем, что даже при $x = 10^3 \text{ м}$ указанное отношение не превосходит 0,01, что подтверждает правомочность сделанного предположения. Кроме того, будем полагать, как и прежде, что $\delta = 0$, $\lambda = 0$.

При сделанных выше предположениях уравнения баланса количества примеси и энтальпии примут вид

$$m \frac{\partial}{\partial t} (s \mu c) = q \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (s (C_0 (T - T_f) + \rho_l m L \mu)) + C_w q \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Здесь все функции осреднены поперек струи, $s(x, t)$ — площадь поперечного сечения. Закон Дарси связывает дополнительно s и μ соотношением $s = q/k(\mu)$. Зависимость коэффициента фильтрации k от влажности μ существенна в данной задаче. Как правило, принимают $k = k_0 \mu^\alpha$ с показателем $\alpha = 2/3$ [2]. Ниже α считается произвольным числом между нулем и единицей.

Переходя далее к введенным ранее безразмерным переменным (роль V_0 при этом играет k_0), сформулируем исходную задачу как задачу отыскания на интервале $0 < \xi < \xi_0 = \mu_\infty^{\alpha-1}$ решения системы дифференциальных уравнений

$$\xi (\mu^{1-\alpha} c)' = c', \quad \xi (\mu^{-\alpha} (T - 1) + A \mu^{1-\alpha})' = \beta T'$$

дополненных при $\mu < 1$ соотношением $N + c = 1$. Начальные и граничные условия (1.11) при этом не изменяются, а условия на разрыве принимают вид

$$\xi [\mu^{1-\alpha} c] = [c], \quad \xi [\mu^{-\alpha} (T - 1) + A \mu^{1-\alpha}] = \beta [T]$$

При $\alpha = 0$ эта задача переходит в ранее изученную.

Решение в двухфазной зоне строится так же, как в разд. 2, и имеет вид

$$\frac{1 - \beta \mu}{A \mu} c(\mu) = 1 + \eta \mu^{\alpha-1}$$

$$\frac{\xi(\mu)}{\mu^{\alpha-1}} = \frac{y^{1-\alpha} + \alpha \eta + \eta \beta (1 - \alpha) \mu_\infty y}{(2 - \alpha) y^{1-\alpha} + \eta - \beta (1 - \alpha) \mu_\infty y^{2-\alpha}} \quad (6.1)$$

аналогичный (2.3), (2.4). В (6.1) $y = \mu/\mu_\infty$, $\eta + 1 = (1 - \beta \mu_\infty)/A \mu_\infty$. Характер поведения функций $c(\mu)$, $\xi(\mu)$ в рассматриваемом диапазоне изменения параметра α таков же, как при $\alpha = 0$. Как и прежде, $c(\mu)$ монотонно возрастает, а $\xi(\mu)$ монотонно убывает в физически допустимой области изменения μ . Следствием этого является то, что качественно решение в общем случае совпадает с уже рассмотренным предельным случаем $\alpha = 0$. По-прежнему существует четыре режима решения с тем же характером поведения искомых функций в каждом из них.

Есть, впрочем, одна особенность, отличающая функцию $c(\mu)$ при $\alpha = 0$ и при $\alpha > 0$. Она имеет место, если $(A + \beta) \mu_\infty < 1$, и состоит в том, что $c(0) > 0$ при $\alpha = 0$ и $c(0) = 0$ при $\alpha > 0$. Положительность $c(0)$ приводит при $\alpha = 0$ к тому, что в двухфазной зоне концентрации не может принимать меньшие, чем $c(0)$, значения и в конечном итоге — к отсутствию решения задачи при достаточно малых значениях входной концентрации c_0 . В отличие от этого при $\alpha > 0$ в двухфазной зоне допустимы любые значения концентрации и решение задачи существует для всех значений параметров.

Указанное отличие, однако, не привносит каких-то новых моментов в процесс построения решения. Опуская его, ограничимся тем, что приведем условия реализации режимов, указав их границы. Границы разделов режимов 1,2; 2,3 и 3,4 имеют соответственно вид

$$\frac{c_0 - 1}{c_0 \mu_\infty^{\alpha-1} - 1} = \frac{\alpha + (1 - \alpha) (A + \beta) \mu_\infty}{1 + (1 - \alpha) A \mu_\infty}$$

$$(1 - \beta) c_0 = A + \mu_\infty^{-\alpha} (1 - (A + \beta) \mu_\infty)$$

$$c_0 - 1 = \frac{\beta (1 - \mu_\infty^{1-\alpha}) T_0}{T_0 (1 - \beta) + A (1 - \mu_\infty^{1-\alpha}) + \mu_\infty^{-\alpha} - 1}$$

Последняя вырождается при минимально возможных входных температурах $T_0 = T_{\min}(c_0) = 1 - c_0$ в линию $c_0 = 1$; в другой предельной ситуации $T_0 = \infty$ она имеет вид $c_0 = (1 - \beta \mu_\infty^{-\alpha}) / (1 - \beta)$.

Соответствующая карта режимов при $A = 2$, $\beta = 0,1$, $\alpha = 2/3$ качественно совпадает с картой, построенной на фиг. 2 для $\alpha = 0$. Отличие состоит лишь в отсутствии зоны 0 — как было отмечено выше, в задаче о струе полное промерзание грунта оказывается невозможным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цытович Н. А.* Механика мерзлых грунтов. М.: Высш. шк., 1973. 446 с.
2. *Ентов В. М., Максимов А. М., Цыпкин Г. Г.* Образование двухфазной зоны при промерзании пористой среды: Препринт № 269. М.: Ин-т прикл. механики РАН, 1986. 54 с.
3. *Ентов В. М., Максимов А. М., Цыпкин Г. Г.* Об образовании двухфазной зоны при кристаллизации смеси в пористой среде//Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. № 3. С. 621—624.
4. *Максимов А. М., Цыпкин Г. Г.* Явление «перегрева» и образование двухфазной зоны при фазовых переходах в мерзлых грунтах//Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 5. С. 1117—1121.
5. *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука. 1987. 502 с.
6. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

Казань

Поступила в редакцию
15.XII.1993