

УДК 532.546

© 1995 г. А. Р. КАСИМОВ, Ю. В. ОБНОСОВ

## ТЕЧЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД В СРЕДЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Изучается задача двумерной напорной стационарной фильтрации в пласте, коэффициент фильтрации которого — кусочно-постоянная функция, а зоны однородности представляют собой прямоугольные включения (блоки) и матрицу (трещины). Для такой двоякопериодической структуры при условиях непрерывности напора и нормальной составляющей потока на границе контакта фаз найдены распределения скорости, линии тока, изохроны движения меченых частиц, время их движения через элементарную ячейку. На основе этих существенно двумерных гидродинамических характеристик делаются выводы о «конвективной составляющей» продольной и поперечной дисперсии. Полученные точные решения сопоставлены с результатами численных расчетов методом конечных разностей.

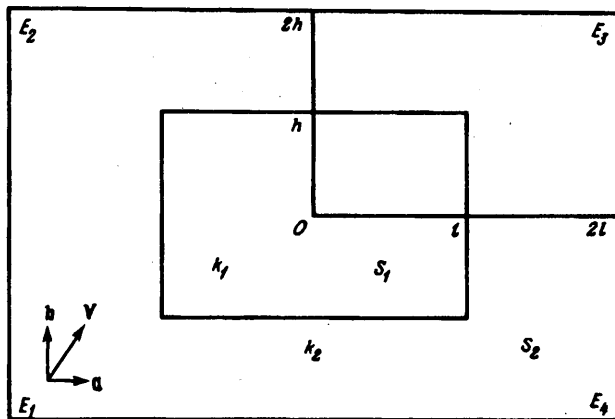
Для периодических структур с произвольным направлением внешнего потока и без допущений о нулевом или бесконечном значении отношения проводимостей компонент аналитические решения в строгой постановке отсутствуют даже для простейших эллиптических уравнений 2-го порядка, а явные решения обычно строятся либо для искусственно подобранных полей проводимости, либо для одномерных течений, которые в том или ином смысле считаются близкими к реальным двух- или трехмерным [1, 2].

В настоящей работе наряду с точным решением из [3], справедливым для специального типа решетки, когда «включения» занимают 1/4 площади среды, используется метод конечных разностей [4].

Сопоставления с многочисленными данными лабораторных и полевых наблюдений и экспериментов показали, что прогнозируемые поля концентрации, построенные на основе известной модели конвективной диффузии [5], обладают зачастую серьезными дефектами. В частности, отмечается несоответствие между моделированием и опытом по форме «хвостов» загрязнений, выходным концентрационным кривым в наблюдательных скважинах при запуске трассеров, зависимостям дисперсивности от направления и другим характеристикам [6].

Известно, что дисперсия определяется в первую очередь фильтрационной неоднородностью пластов, которая зачастую не детектируется на стадии разведки, а на стадии опытных откачек может включаться в модель лишь через эффективные характеристики, что недостаточно при решении задач миграции [7].

Неполнота и невозможность получения детальной информации о фильтрационных свойствах пласта диктуют необходимость фрагментации области в виде слоистой или блоковой системы с использованием макродисперсионных моделей миграции. Исследуемая область разбивается в плане-разрезе на зоны, фильтрационное поле в которых считается по упрощенным схемам, а для расчета динамики концентраций используется модель микродисперсии в хорошо проницаемых слоях и диффузионного оттока в слабопроницаемые блоки. В большинстве моделей конвективный перенос в блоках не учитывается и их влияние на поле концентраций определяется диффузионной (сорбционной) емкостью.



Фиг. 1

Для систем геометрически, а следовательно, и гидродинамически неодномерных типа «матрица — включения» учет конвекции внутри слабопроницаемых блоков проводился на основе допущения об одномерности фильтрации внутри блоков [8—10]. Модели двупористых сред [11] учитывают неодномерную картину движения внутри двух континуумов, моделирующих два компонента среды. Однако такие модели справедливы при определенном соотношении проводимостей компонентов и используют феноменологический закон перетока из трещин в блоки [12], т. е. не являются строгими.

Реальное поле скоростей и концентраций в матрице и включениях не одномерно [1, 13], что может оказаться определяющим фактором в задачах транспорта загрязнений, когда образуются «концентрационные языки» даже в рамках модели чисто конвективного переноса меченых частиц [14].

1. Постановка задачи и аналитическое решение. Пласт представляет собой бесконечную двухкомпонентную среду, состоящую из периодической решетки прямоугольных включений ширины  $2l$ , высоты  $2h$ , удаленных друг от друга на расстояние  $2l$  и  $2h$  соответственно в направлении основания и ортогональном ему, а также матрицы, заполняющей оставшиеся  $3/4$  объема среды (фиг. 1). Коэффициент фильтрации материала включения равен  $k_1$ , его пористость  $m_1$ , матрицы —  $k_2$  и  $m_2$  соответственно (здесь и всюду в дальнейшем нижний индекс 1 будет относиться к включениям, а 2 — к матрице).

Пусть в пласте постоянной толщины происходит плоская установившаяся фильтрация в рамках закона Дарси и в предположении несжимаемости среды и жидкости. В силу периодичности среды выделим элементарную ячейку  $E_1E_2E_3E_4$  (фиг. 1), введем систему координат  $x, y$  с началом в центре этой ячейки и комплексную координату  $z = x + iy$ . Внешний поток задается вектором скорости фильтрации  $V$  с компонентами  $a$  и  $b$ , такими, что расход через  $E_3E_4$  равен  $4ha$  и  $4lb$  — через  $E_2E_3$ . На границе ячейки выполняются обычные условия периодичности:  $v_2(x - 2ih) \equiv v_2(x + 2ih)$ ,  $v_2(2l + iy) \equiv v_2(-2l + iy)$ , причем  $E_1E_2E_3E_4$  является трубкой тока только при  $a = 0$  или  $b = 0$ .

В силу сделанных предположений относительно фильтрации и грунта напоры  $h_1$  в блоках и  $h_2$  в матрице удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta h_{1,2}(x, y) = 0 \quad (1.1)$$

а скорости фильтрации  $v_{1,2} = -k_{1,2}\Delta h_{1,2}$ . После стандартного введения комплексных потенциалов  $w_{1,2}(z) = \varphi_{1,2}(x, y) + i\psi_{1,2}(x, y)$ , где  $\varphi_{1,2} = -h_{1,2}/k_{1,2}$  — потенциал,  $\psi_{1,2}$  — функция тока, получим  $v_{1,2} = dw_{1,2}/dz$  (черта сверху означает комплексное сопряжение), т. е. функции скорости  $v_{1,2}$  антиголоморфны.

На границе включения выполняются обычные условия сопряжения: условия непрерывности напора и нормальной составляющей скорости, т. е.

$$\frac{v_{1\tau}}{k_1} = \frac{v_{2\tau}}{k_2}, \quad v_{1n} = v_{2n} \quad (1.2)$$

где  $v_{1\tau}$  и  $v_{1n}$  — касательная и нормальная составляющие вектора скорости  $V$ .

Как уже отмечалось

$$a = \frac{1}{4h} \int_{-2h}^{2h} \operatorname{Re} v_2 (2l + iy) dy, \quad b = \frac{1}{4l} \int_{-2l}^{2l} \operatorname{Im} v_2 (x + 2ih) dx \quad (1.3)$$

Для периодических структур «матрица — включения» строгие явные аналитические решения построены, насколько известно авторам, только для предельных по проницаемости случаев абсолютно непроницаемых и идеально дренирующих блоков. Здесь под явными понимаются представления в виде элементарных или специальных функций в отличие от строгого, но неявного представления в виде, например, сингулярного уравнения (системы уравнений). Подчеркнем, что помимо строгого выполнения условий сопряжения на границах сопряжения зон требуется строгое выполнение условия периодичности на гранях элементарной ячейки (известны решения со строгим выполнением условий сопряжения, но нестрогим выполнением условий периодичности; см., например, [15]).

Задача (1.1) — (1.3) приводится к обобщенной задаче Римана относительно  $v_{1,2}(z)$ , а ее решение имеет вид [3]

$$\overline{v_1(z)} = -A^{-1} \{a' \exp(-i3\pi\gamma) \chi(z) + b' \exp(i3\pi\gamma) \chi^{-1}(z)\} \quad (1.4)$$

$$\overline{v_2(z)} = a' \exp(i\pi\gamma) \chi(z) + b' \exp(-i\pi\gamma) \chi^{-1}(z)$$

$$a' = \frac{a\sigma' - b\sigma \operatorname{sign} U}{(2+U)^{1/2}}, \quad b' = \frac{a\sigma' + b\sigma \operatorname{sign} U}{(2+U)^{1/2}}, \quad A = \frac{k_1 + k_2}{2k_1}$$

$$\chi(z) = \omega^\lambda(z), \quad \omega(z) = \frac{ue^{\delta} - k'}{u - k'e^{\delta}}, \quad u = \operatorname{dn}^2\left(\frac{Kz}{2l}, k\right), \quad e^{\delta} = k' + ik \quad (1.5)$$

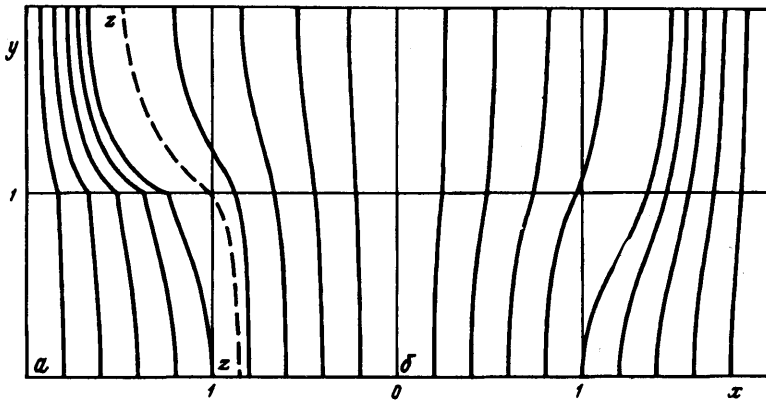
$$U = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad \lambda = \frac{1}{\pi} \arccos\left(1 - \frac{U^2}{2}\right), \quad \gamma = \frac{1}{4}(\lambda + \operatorname{sign} U) \quad (1.6)$$

$$\sigma = \sigma(\lambda, k) = \frac{F(1/2, 1/2; 1; k^2)}{F((1-\lambda)/2, (1+\lambda)/2; 1; k^2)}, \quad \sigma' = \sigma(\lambda, k') \quad (1.7)$$

Модуль  $k$  эллиптического интеграла первого рода стандартно определяется по размерам включения из уравнения  $K'/K = h/l$ , где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл,  $K' = K(k')$ ,  $k' = (1 - k^2)^{1/2}$ .

Функция  $\zeta = \omega(z)$  конформно отображает элементарную ячейку на двулистую поверхность. Последняя представляет собой склеенные «крест-накрест» две расширенные плоскости, разрезанные вдоль дуги  $\zeta = \exp(i\varphi)$ ,  $\pi - \delta < \varphi < \pi + \delta$ . Полную периодическую структуру  $\omega(z)$  отображает на бесконечнолистую риманову поверхность. Склеюке боковых граней ячеек в плоскости  $z$  при этом соответствует переход на этой поверхности с листа на лист по соответствующим дугам единичной окружности, попарно соединяющим образы  $\pm \exp(\pm i\delta)$  вершин ячеек.

Для эллиптических функций Якоби  $\operatorname{dn}$ ,  $\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{sn}$  и гипергеометрической функции  $F$  использовались стандартные обозначения и разложения в ряды [16].



Фиг. 2

Выделив в (1.4) действительную и мнимую часть, для горизонтальной составляющей  $u_x$  и вертикальной  $u_y$  вектора скорости фильтрации  $V$  получим

$$u_{x1} = -A^{-1}R_x \cos(\varphi\lambda - 3\pi\gamma), \quad u_{y1} = A^{-1}R_y \sin(\varphi\lambda - 3\pi\gamma) \quad (1.8)$$

$$u_{x2} = R_x \cos(\varphi\lambda + \pi\gamma), \quad u_{y2} = -R_y \sin(\varphi\lambda + \pi\gamma)$$

Здесь  $R_{x,y} = a'r^\lambda \pm b'r^{-\lambda}$ , а  $r = |\omega(z)|$ ,  $\varphi = \arg \omega(z)$  и, следовательно

$$r = \left( \frac{F^2 + G^2 + k'^2 - 2k'(k'F + kG)}{F^2 + G^2 + k'^2 - 2k'(k'F - kG)} \right)^{1/2},$$

$$F = \frac{d^2 d'^2 c'^2 - k^4 s^2 c^2 s'^2}{(1 - d^2 s'^2)^2}$$

$$G = \frac{2k^2 s c d s' c' d'}{(1 - d^2 s'^2)^2}, \quad \varphi = \delta + \arctg \frac{2kk'(F - k'^2)}{(F - k'^2)^2 + G^2 - k^2 k'^2}$$

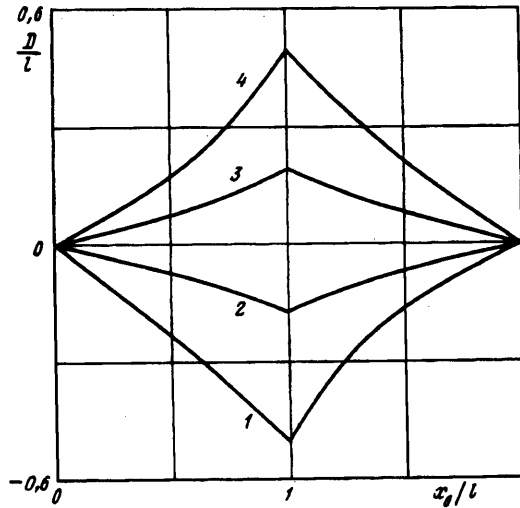
$$d = \operatorname{dn}(Kz/2l, k), \quad c = \operatorname{cn}(Kz/2l, k), \quad s = \operatorname{sn}(Kz/2l, k)$$

$$d' = \operatorname{dn}(Kz/2l, k'), \quad c' = \operatorname{cn}(Kz/2l, k'), \quad s' = \operatorname{sn}(Kz/2l, k')$$

2. Анализ поведения линий тока. Истинные скорости движения жидкости в пористой среде есть

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_{x1,2}}{m_{1,2}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{u_{y1,2}}{m_{1,2}} \quad (2.1)$$

Для нахождения линий тока и времени миграции частиц по ним методом Рунге — Кутты решалась задача Коши для системы (2.1) (описание алгоритмов см., например, в [17]). Для произвольного  $V$  в силу симметрии рассматривалась верхняя половина ячейки (для определенности выбиралось  $a_x > 0$ ), а для трубок тока ( $a = 0$ ) — верхняя правая четверть  $S_1 \cup S_2$ . Далее на оси  $x$  равномерно выбирались точки (меченые частицы)  $x_{0n} = \pm nd_x$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_x$ , и в случае  $a \neq 0$  на левой грани ячейки — точки с ординатами  $y_{0j} = jd_y$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_y$ , где  $N_x, N_y, d_x, d_y$  — число точек и шаг вдоль соответствующих осей. Далее система (2.1) решалась, пока линия тока не достигала границы ячейки. Сумма всех шагов по времени при этом давала суммарное время движения трассера внутри ячейки. На фиг. 2 показаны сетки линий тока для  $h/l = 1$  и  $k_1/k_2 = 0,1$ ,  $b = 1$ ,  $a = 0$  (а),  $k_1/k_2 = 5$ ,  $b = 1$ ,  $a = 0$  (б). Подчеркнем, что эти линии построены по равноотстоящим координатам  $x_{0n}$  и не соответствуют, разумеется, постоянному шагу по  $\psi$ .



Фиг. 3

Результаты расчетов показывают, что схемы течения в случае  $k_1 > k_2$  и  $k_1 < k_2$  для трубки тока различны: в первом случае в масштабе правой половины ячейки одна часть потока проходит мимо включения, а другая входит и выходит из него, т. е. два раза «меняет среду» в пределах  $E_1 E_2 E_3 E_4$ . Во втором случае часть потока входит во включение через нижнюю горизонтальную границу, выходит из него через нижнюю половину вертикальной границы, огибая точку  $(1, 0)$ , вновь входит через верхнюю половину вертикальной стороны прямоугольника  $S_1$  и, наконец, выходит через верхнюю горизонтальную сторону, т. е. реализуются четыре «смены среды». Кривая  $Z-Z$  на фиг. 2,  $a$  есть верхняя половина такой линии раздела. Для  $a = 0$  остановимся на качественных свойствах поля скоростей и линий тока.

**Лемма 1.** Для четверти ячейки  $S_1 \cup S_2$  если  $x = x(y) = x(y; x_0)$  — фазовая траектория системы (2.1), проходящая через точку  $(x_0, 0)$ , то функция  $x(y)$  монотонно возрастает при  $k_1 > k_2$  и убывает при  $k_1 < k_2$ , т. е. в первом случае все линии тока отклоняются строго вправо, во втором случае — влево.

**Доказательство.** Для доказательства в силу (1.4)–(1.6), (2.1) достаточно показать, что функция

$$x'(y) = R \begin{cases} \operatorname{ctg}(3\pi\gamma - \lambda\varphi), & z \in S_1 \\ -\operatorname{ctg}(\pi\gamma + \lambda\varphi), & z \in S_2, \end{cases} \quad R = \frac{r^{2\lambda} - 1}{r^{2\lambda} + 1} \quad (2.2)$$

сохраняет знак в четверти ячейки.

При  $k_1 > k_2$  ( $U > 0$ ) в  $S_1$  имеет место

$$\operatorname{ctg}(3\pi\gamma - \lambda\varphi) = \operatorname{ctg} \left[ \frac{3}{4}\pi + \lambda \left( \frac{3}{4}\pi - \varphi \right) \right] = \operatorname{ctg} \left[ \lambda \left( \frac{3}{4}\pi - \varphi \right) - \frac{1}{4}\pi \right] < 0$$

ввиду  $-\pi/3 < \lambda(3\pi/4 - \varphi) - \pi/4 < -\pi/6$ , что в свою очередь следует из оценок  $1/4 < \gamma < 1/3$ ,  $0 < \lambda < 1/3$  ( $\gamma = (\lambda + 1)/4$ ), вытекающих из (1.6) (напомним, что  $\pi/2 < \varphi < \pi$ ). Аналогично

$$\operatorname{ctg}(\pi\gamma + \lambda\varphi) = \operatorname{ctg} \left[ \frac{1}{4}\pi + \lambda \left( \frac{1}{4}\pi + \varphi \right) \right] > 0$$

в  $S_2$ , поскольку здесь  $-\pi < \varphi < \pi/2$  и  $0 < \pi/4 + \lambda(\pi/4 + \varphi) < \pi/2$ . Из (2.2) теперь следует, что  $y'(x) > 0$  вдоль любой линии тока, лежащей в  $S_1 \cup S_2$ , ибо здесь

$r < 1$  и, следовательно,  $R < 0$ . Неравенство  $y'(x) < 0$  для случая  $k_1 < k_2$  доказывается аналогично.

Обозначим через  $x_1 = x_1(x_0) = x(2h; x_0)$  абсциссу конца линии тока, выходящей из точки  $x_0$  в рассматриваемой четверти ячейки (фиг. 1). Вклад конвекции в поперечную дисперсию определяется степенью отклонения траекторий от направления  $V$ . Охарактеризуем такое отклонение на полуячейке величиной  $D(x_0) = x_1 - x_0$ . На фиг. 3 показаны графики зависимости  $D(x_0)$  для  $h/l = 1$ ,  $a = -0$ ,  $b = 1$  и  $k_1/k_2 = 0,2, 0,6, 1,8, 5,4$  (кривые 1—4 соответственно). Построенные зависимости характеризуются единственным на четверти ячейки внутренним максимумом, приходящимся (согласно расчетам) на линию тока, проходящую через  $x_0 = l$ . Докажем этот результат строго.

**Лемма 2.** Максимальное отклонение  $D(x_0)$  линий тока в четверти ячейки достигается для  $x_0 = l$ .

*Доказательство.* Допустим противное. В силу теоремы о непрерывной дифференцируемости решения задачи Коши по начальным данным существует и непрерывна производная  $x_1'(x_0)$ . Значит, в точке экстремума  $D'(x_0) = 0$  или  $x_1'(x_0) = 1$  либо на  $(0, l)$ , либо на  $(l, 2l)$ .

Пусть сначала  $0 < x_0 < l$ . Из очевидного условия совпадения расходов жидкости через отрезки  $[0, x_0]$  и  $[2ih, x_1 + 2ih]$  следует

$$\int_0^{x_0} v_1(x) dx = \int_{2ih}^{x_1+2ih} v_2(\tau) d\tau$$

Отсюда после дифференцирования по  $x_0$  вытекает, что в точке экстремума должно выполняться равенство  $v_1(x_0) = v_2(x_1 + 2ih)$ . С использованием (1.4)—(1.7) это необходимое условие экстремума может быть записано в виде

$$(1 + U) \sin(\pi\gamma - \lambda\varphi_0) = \sin(\pi\gamma + \lambda\varphi_1) \quad (2.3)$$

где  $\varphi_0 = \pi - \arg \omega(x_0) \in (0, \delta)$  и  $\varphi_1 = \arg \omega(x_1 + 2ih) \in (-\delta, \delta)$ , а  $0 < \delta < \pi/2$ .

Если  $k_1 > k_2$ , тогда в силу (1.6)  $U > 0$ ,  $1/2 > \gamma > 1/3$ ,  $4\gamma - \lambda = 1$  и, следовательно,

$$\sin(\pi\gamma - \lambda\varphi_0) > \sin\left[\pi\left(\gamma - \frac{1}{2}\lambda\right)\right] = \cos(\pi\gamma) = (2 - U)^{1/2}/2$$

$$\sin(\pi\gamma + \lambda\varphi_1) < \sin\left[\pi\left(\gamma + \frac{1}{2}\lambda\right)\right] = (1 + U)(2 - U)^{1/2}/2$$

Отсюда и из (2.3) следует

$$\frac{1}{2}(1 + U)(2 - U)^{1/2} < (1 + U) \sin(\pi\gamma - \lambda\varphi_0) = \sin(\pi\gamma + \lambda\varphi_1) < \frac{1}{2}(1 + U)(2 - U)^{1/2}$$

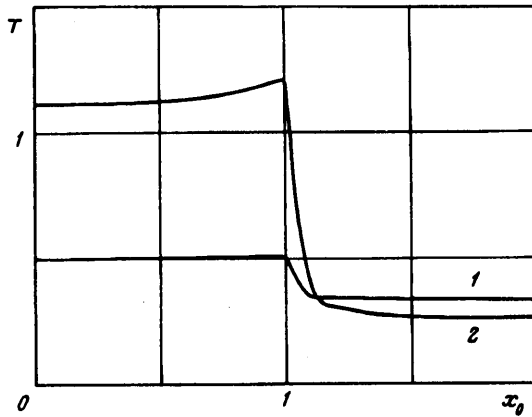
т. е. противоречие.

Аналогично при  $k_1 < k_2$  имеем  $U < 0$ ,  $-1/4 < \gamma < -1/6$ ,  $4\gamma - \lambda = -1$  и справедливы оценки

$$\sin(\pi\gamma - \lambda\varphi_0) > \sin\left[\pi\left(\gamma - \frac{1}{2}\lambda\right)\right] = -\cos(\pi\gamma) = -\frac{1}{2}(2 - U)^{1/2}$$

$$\sin(\pi\gamma + \lambda\varphi_1) < \sin\left[\pi\left(\gamma + \frac{1}{2}\lambda\right)\right] = -\frac{1}{2}(1 + U)(2 - U)^{1/2}$$

Значит, равенство (2.3) не выполняется и в этом случае. Итак, на участке  $0 < x_0 < l$  максимум  $D$  не достигается.



Фиг. 4

При  $l < x_0 < 2l$  из балансового соотношения

$$\int_{x_0}^{2l} v_2(x) dx = \int_{x_1+2lh}^{2l+2lh} v_2(\tau) d\tau$$

следует, что в точке максимума  $D$  должно выполняться условие

$$\sin(3\pi\gamma - \lambda\varphi_0) = \sin(\pi\gamma + \lambda\varphi_1) \quad (2.4)$$

Аналогично первому случаю строятся оценки для различных соотношений проницаемости матрицы и включения и показывается, что равенство (2.4) невыполнимо и при  $l < x_0 < 2l$ . Утверждение леммы теперь вытекает из непрерывности функции  $D(x_0)$  на отрезке  $[0, 2l]$ , доказанной монотонности ее изменения на интервалах  $(0, l)$  и  $(l, 2l)$  и очевидного равенства  $D(0) = D(2l) = 0$ .

Приведенные в доказательстве леммы 2 оценки устанавливают справедливость следующего утверждения.

**Лемма 3.** Если  $x_1(l) = \alpha$ , то справедливы четыре неравенства: а) при  $k_1 > k_2$

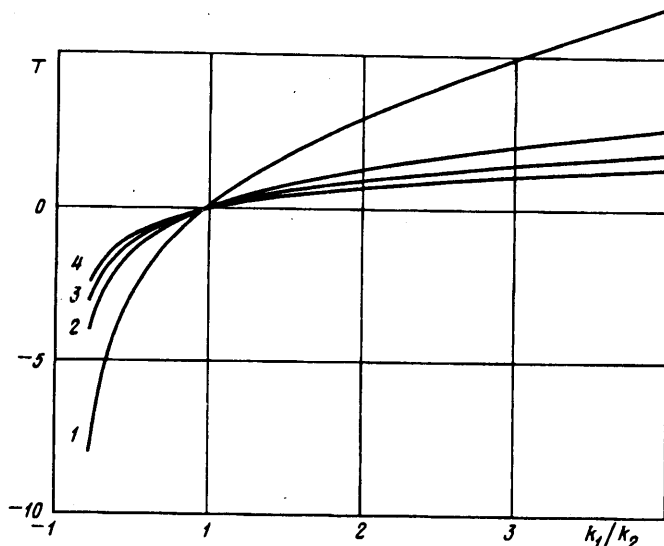
$$\min_{0 < x < l} |v_1(x)| > \max_{0 < x < \alpha} |v_2(x + 2ih)|, \quad \max_{kx < 2l} |v_2(x)| < \min_{\alpha < x < 2l} |v_2(x + 2ih)|$$

б) при  $k_1 < k_2$

$$\max_{0 < x < l} |v_1(x)| < \min_{0 < x < \alpha} |v_2(x + 2ih)|, \quad \min_{kx < 2l} |v_2(x)| > \max_{\alpha < x < 2l} |v_2(x + 2ih)|$$

**3. Характеристики продольной дисперсии.** Параметрами, определяющими продольную дисперсию, являются суммарное время  $T$  движения частиц через ячейку и соответствующая выходная концентрационная кривая. Последняя в данной модели определяется для  $a = 0$  в предположении, что в момент времени  $t = 0$  все помеченные частицы  $x_{0n} = nd_x$  получают концентрацию  $c = c_0$ , тогда как  $c = 0$  всюду в области при  $t < 0$ . Поскольку вытеснение поршневое, параметр  $T(x_0)$  и характеризует такую кривую.

На фиг. 4 показаны графики зависимости  $T(x_0)$  для  $h/l = 1$ ,  $b = 1$ ,  $m_1 = m_2 = -0,2$ , и  $k_2/k_1 = 2, 9$  (кривые 1, 2 соответственно). Эти зависимости иллюстрируют увеличение разности времени движения частиц с ростом различия проницаемости фаз (что вполне естественно). Нетривиальным является наличие внутреннего максимума времени, который, согласно расчетам, попадает в точку  $x_0 = l$  (к сожалению, не удалось показать аналитически, что максимально отклоняющаяся, согласно лемме 2, на четверти ячейки линия тока дает и максимальное время



Фиг. 5

движения частицы). Для двух крайних на четверти ячейки линий тока  $x=0$  и  $x=2l$  время движения удастся выразить явно. По определению времени миграции имеем

$$T(0) = \int_0^{2h} \frac{d\tau}{v_1(\tau)} + \int_h^{2h} \frac{d\tau}{v_2(\tau)}, \quad T(2l) = \int_0^{2h} \frac{d\tau}{v_2(\tau)}$$

Используя (1.5), после замены  $\zeta = \exp(i\varphi) = \omega(\tau)$  найдем

$$d\tau = \frac{2il}{K} \frac{d\zeta}{X(\zeta)}, \quad X(\zeta) = \sqrt{(\zeta^2 - e^{2i\delta})(\zeta^2 - e^{-2i\delta})} \quad (3.1)$$

Ветвь корня здесь фиксируется в плоскости с разрезами вдоль дуг  $\zeta = \exp(i\varphi)$ ,  $-\delta < \varphi < \delta$  и  $\pi - \delta < \varphi < \pi + \delta$  условием  $X(0) = 1$ . С учетом этого и соотношений (1.4)–(1.7) последние интегралы преобразуются к виду

$$T(0) = \frac{\Lambda}{1+U} \int_{2\delta}^{\pi} \frac{(1+U/2)^2 \cos(\lambda x/2) - |U|(1-U^2/4)^{1/2} \sin(\lambda x/2)}{[\cos(\lambda x) + U/2][\cos(2\delta) - \cos x]^{1/2}} dx \quad (3.2)$$

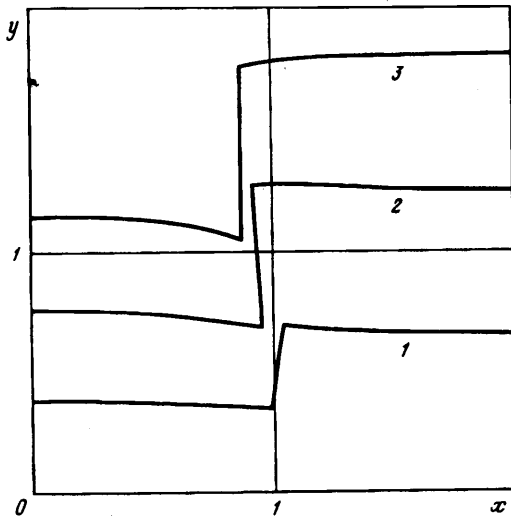
$$T(2l) = \Lambda \sin(\pi\gamma) \int_{\delta}^{\pi-\delta} \frac{dx}{\sin(\pi\gamma - \lambda x)[\cos(2\delta) - \cos(2x)]^{1/2}} \quad (3.3)$$

где  $\Lambda = \sqrt{2h}/(bK'\sigma)$ .

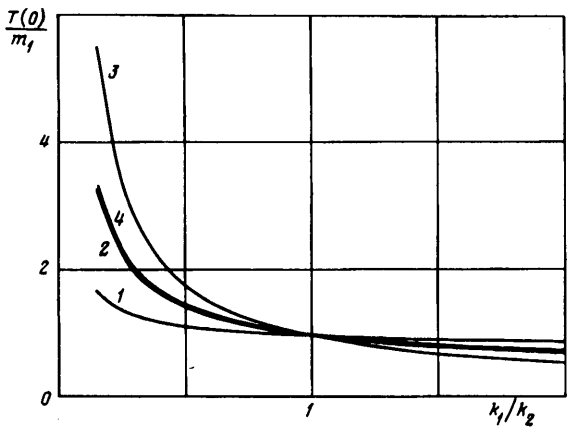
На фиг. 5 показана зависимость функции  $\Delta T = T(0) - T(2l)$  от  $k_1/k_2$  при  $h/l = 3,81, 1,87, 1,42$  и  $1,126$  (кривые 1–4 соответственно). Строго говоря, продольная дисперсия определяется временным лагом между «самой быстрой» линией тока ( $x=0$  или  $2l$  в зависимости от соотношения проницаемостей) и «самой медленной» (проходящей через точку  $x=l$ ). Однако если кривые  $T(x_0)$  на четверти ячейки имеют вид двух «полочек», т. е. пик  $T(l)$  является невыраженным или «узким», то можно заменить реальную среду с существенно двумерной гидродинамикой на двухкомпонентную «двухколенную» среду, в которой движутся два одномерных фронта со скоростями  $2h/T(0)$  и  $2h/T(2l)$ , и использовать известные аналитические и приближенные решения, учитывающие продольную и поперечную микродисперсию в двухслойной среде [18].

Для характеристики продвижения фронтов загрязнений используют изохроны,





Фиг. 6



Фиг. 7

т. е. геометрическое место выбранного набора фильтрующих частиц в заданные моменты времени. Ограничившись тем же набором  $x_{0n} = nd_x$  при  $t=0$ , построим изохроны при  $h/l=1$ ,  $m_1 = m_2 = 0,2$ ,  $k_2/k_1 = 2$  (фиг. 6, кривые 1—3 соответственно для  $t=0,104$ ,  $0,204$ ,  $0,304$ ). Эти кривые характеризуются двумя внутренними «язычками», причем «язык» запаздывания не выравняется с приближением изохрон к выходной границе и соответствует «внутреннему» максимуму времени на концентрационных кривых фиг. 4.

Важный интегральный параметр среды — зависимость между перепадом напора и расходом. Для  $a=0$  связь между расходом  $Q$  и падением напора  $H$  на полной ячейке имеет вид

$$H = 2 \int_0^{2h} \text{Im} [\nabla h(0, iy)] dy = 2i \left\{ \frac{1}{k_1} \int_0^{ih} \text{Im} [\bar{v}_1(t)] dt + \frac{1}{k_2} \int_{ih}^{2ih} \text{Im} [\bar{v}_2(t)] dt \right\}$$

Отсюда и из (1.4)—(1.7) после замены  $\zeta = \omega(\tau)$  с учетом (3.1) получим

$$\frac{Q}{Hk_2} = \frac{l}{h} \frac{\sigma}{\sigma'} \sqrt{\frac{2+U}{2-U}} \quad (3.4)$$

Например, для квадратной ячейки ( $\sigma = \sigma'$ ) эта величина меняется от  $1/\sqrt{3}$  (непроницаемое включение) до  $\sqrt{3}$  (идеально дренирующее включение).

Помимо получения явных выражений для других функционалов типа (3.2)—(3.4) проведены серии расчетов с использованием метода конечных разностей [4]. На фиг. 7 показаны графики зависимости времени  $T(0)/m_1$  как функции  $k_1/k_2$  для  $l/h = 1$ ,  $m_1 = m_2$  и квадратных включений. Кривые 1—3 соответствуют конечно-разностным расчетам для  $l_i/h = 1/6$ ,  $1/2$  и  $5/6$ , кривая 4 — аналитическому решению для  $l_i/h = 1/2$ , где  $l_i$  — горизонтальный размер включения.

Работа поддержана грантом РФФИ № 94-01-01366-а, грантом программы Фулбрайта № 18967 и грантом АЗ.0а7 Специального фонда для выплаты стипендий и грантов талантливым молодым ученым.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
2. Швидлер М. И. Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985. 288 с.
3. Обносов Ю. В. Решение одной краевой задачи  $R$ -линейного сопряжения с кусочно-постоянными коэффициентами//Иzv. вузов. Математика. 1992. № 4. С. 39—48.
4. Huyakorn P. S., Pinder G. F. Computational methods in subsurface flows. N. Y.: Acad. Press, 1983. 473 p.
5. Николаевский В. Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
6. Carena J. An overview of uncertainties in modelling groundwater solute transport//J. Contaminant Hydrology. 1993. V. 13. P. 23—48.
7. Davis A. D. Deterministic modelling of dispersion in heterogeneous permeable media//Ground Water. 1986. V. 24. № 5. P. 609—615.
8. Шестаков В. М. Динамика подземных вод. М.: Изд-во МГУ, 1979. 368 с.
9. Birkholzer J., Rubin H., Daniels H., Rouve G. Contaminant advection and spreading in a fractured permeable formation: Pt 1. Parametric evaluation and analytical solution//J. Hydrol. 1993. V. 144. P. 1—33.
10. Magnico P., Leroy C., Bouchaud J. P. et al. Tracer dispersion in porous media with a double porosity//Phys. Fluids. 1993. V. A5. № 1. P. 46—57.
11. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
12. Ромм Е. С. Структурные модели порового пространства горных пород. Л.: Недра, 1985. 240 с.
13. Дутьнев Г. Н., Заричьяк Ю. П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Л.: Энергия, 1974. 264 с.
14. Бочевер Ф. М., Лапшин Н. Н., Орадовская А. Е. Защита подземных вод от загрязнений. М.: Недра, 1979. 254 с.
15. Nicorovici N. A., McPhedran R. C., Milton G. W. Transport properties of a three-phase composite material: the square array of coated cylinders//Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1993. V. 442. P. 599—620.
16. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами//Под ред. М. Абрамович и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
17. Kinzelbach W., Marburger M., Chiang W.-H. Determination of groundwater catchment areas in two and three spatial dimensions//J. Hydrology. 1992. V. 134. P. 221—246.
18. Van Duijn C. J., Van Der Zee S. E. A. T. M. Solute transport parallel to an interface separating two different porous materials//Water Resour. Res. 1986. V. 22. № 13. P. 1779—1789.