

УДК 532.529.2:536.421

© 1995 г. П. Т. ЗУБКОВ, К. М. ФЕДОРОВ

КОНВЕКЦИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЯЧЕЙКЕ С ЗАМЕРЗАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

Численно исследуется влияние конвекции в цилиндрической ячейке на процессы замерзания (плавления) в широком диапазоне чисел Рэлея (Ra). Анализируются процесс установления стационарных решений и теплопередача через ячейку. Обнаружен автоколебательный режим, который характеризуется возникновением и затуханием вторичных вихрей вблизи поверхности раздела мерзлой и талой зон. При больших числах Рэлея решение неустойчиво.

Проблема прогнозирования фазовых переходов в жидкости при наличии конвекции актуальна для целого ряда геофизических и технологических процессов. Экспериментально данный процесс исследовался для воды [1], стеариновой кислоты и других неорганических веществ [2], углеводородов [3] и для металлов [4]. Во всех исследованиях отмечается определяющее влияние конвекции на процессы плавления (замерзания). Обзор теоретических исследований, численных методов расчета подобных процессов приведен в [5]. Неединственность стационарных решений в задачах конвекции отмечена в [6], наличие автоколебательных решений — в [5].

1. Рассматриваются задачи о замерзании и плавлении жидкости в цилиндрической ячейке, высота которой равна ее диаметру. Фазовый переход жидкости происходит при температуре T_i . Нагревание (охлаждение) ячейки приводит к возникновению конвективного течения жидкости. Анализируются процесс установления стационарного решения и теплопередача через ячейку.

Развитие теплового поля и конвективного течения жидкости описывается системой уравнений в приближении Буссинеска

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P + \mu \Delta \mathbf{V} + \rho_0 \mathbf{g} (1 - \beta (T - T_0)) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{V} T = a \Delta T, \quad a = \frac{\lambda}{c \rho_0}$$

где \mathbf{V} — скорость, P — давление, \mathbf{g} — ускорение свободного падения, μ — динамическая вязкость, T — температура, λ — коэффициент теплопроводности, ρ_0 — плотность жидкости при температуре T_0 , β — коэффициент температурного расширения, a — коэффициент теплопроводности, c — удельная теплоемкость.

Не снижая общности рассматриваемой постановки, будем считать, что теплопроводность, плотность и теплоемкость вещества в жидком и твердом состоянии одинаковы. Наличие фазовых переходов в жидкости учитывается в зависимости от температуры, которую полагаем кусочно-линейной функцией

$$h = c (T - T_0) \quad (T < T_i), \quad h = c (T_i - T_0) + \alpha k \quad (T = T_i),$$

$$h = c (T - T_0) + k \quad (T > T_i) \quad (1.2)$$

где T_i — температура фазового перехода, k — скрытая теплота плавления вещества, α — доля жидкости в двухфазном объеме.

В мерзлой зоне $T < T_0$, система уравнений (1.1) выражается в уравнении теплопроводности ($V = 0$), на фронте плавления выполняется условие сохранения потоков тепла

$$-[\lambda \nabla T] = k \rho_0 D, \quad [f] = f_+ - f_-$$

где D — скорость поверхности плавления.

В цилиндрической системе координат, в которой ось Z проходит через центр цилиндра, а точка отсчета лежит в плоскости нижнего торца ячейки, обезразмеренная система уравнений сводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial U}{\partial Z} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \tau} + V \frac{\partial V}{\partial R} + U \frac{\partial V}{\partial Z} &= - \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} - \frac{V}{R^2} \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} + V \frac{\partial U}{\partial R} + U \frac{\partial U}{\partial Z} &= - \frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} + \frac{Ra}{Pr} \Theta \\ \frac{\partial H}{\partial \tau} + V \frac{\partial H}{\partial R} + U \frac{\partial H}{\partial Z} &= \frac{1}{Pr} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$H = \Theta, \quad \Theta < \Theta_0; \quad H = \Theta_0 + \frac{\alpha}{Ja}, \quad \Theta = \Theta_0; \quad H = \Theta_0 + \frac{1}{Ja}, \quad \Theta > \Theta_0,$$

$$R = \frac{r}{d}, \quad Z = \frac{z}{d}, \quad \tau = \frac{t \mu}{\rho_0 d}, \quad V = \frac{V_r \rho_0 d}{\mu}, \quad U = \frac{V_z \rho_0 d}{\mu}$$

$$P = \frac{\rho d^2 \rho_0}{\mu^2}, \quad \Theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \quad \Theta_0 = \frac{T_s - T_0}{T_1 - T_0}$$

$$Ra = \frac{\rho_0^2 \beta g (T_1 - T_0) c d^3}{\mu \lambda}, \quad Pr = \frac{c \mu}{\lambda}, \quad Ja = \frac{c (T_1 - T_0)}{k}$$

Здесь d — диаметр цилиндра, T_0 , T_1 — минимальная и максимальная температура в ячейке.

Таким образом, поведение системы описывается четырьмя безразмерными параметрами: Θ_0 , Ra , Pr , Ja . Задача о замерзании жидкости в ячейке соответствует следующим начальным и граничным условиям:

$$\tau = 0: \quad U = V = 0, \quad \Theta = 1$$

$$Z = 0, \quad U = V = 0, \quad \Theta = 1; \quad Z = 1, \quad U = V = 0, \quad \Theta = 0 \quad (1.4)$$

$$R = 0,5, \quad U = V = \frac{\partial \Theta}{\partial R} = 0$$

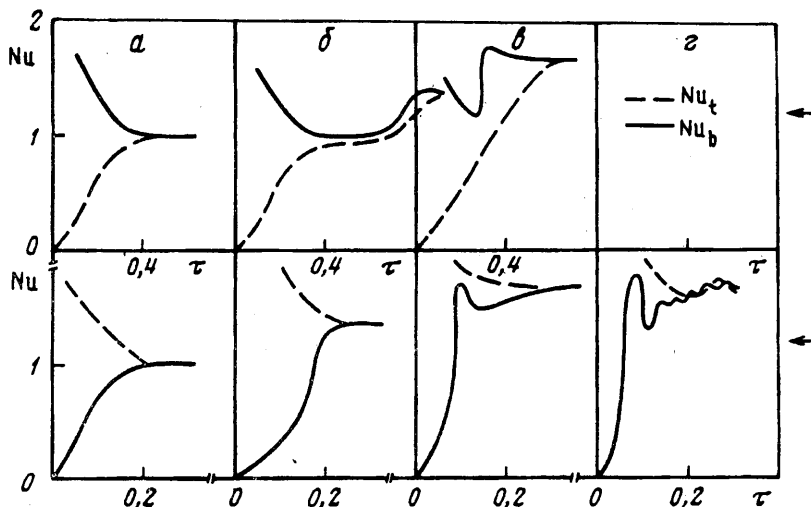
Задача о плавлении отличается лишь начальными условиями

$$\tau = 0: \quad U = V = 0, \quad \Theta = 0 \quad (1.5)$$

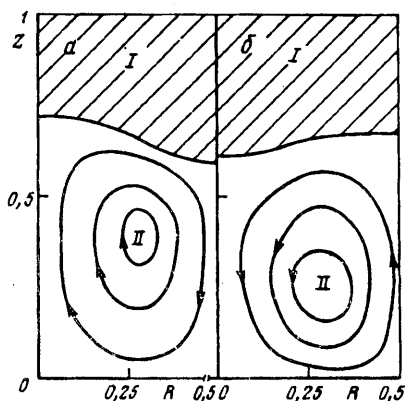
Исследовалось влияние лишь безразмерного числа Рэлея на решение поставленных задач. Значения других параметров были равны: $\Theta_0 = 0,5$, $Ja = 10$, $Pr = 1$.

Теплопередача через ячейку определяется безразмерными величинами теплового потока на верхнем и нижнем торцах цилиндра (индексы t и b). Эти величины называются числом Нуссельта и определяются по формулам

$$Nu_t = -8 \int_0^{0,5} \frac{\partial \Theta}{\partial Z} \Big|_{z=1} R dR, \quad Nu_b = -8 \int_0^{0,5} \frac{\partial \Theta}{\partial Z} \Big|_{z=0} R dR \quad (1.6)$$



Фиг. 1



Фиг.

Необходимым условием выхода решения на стационарное состояние является равенство тепловых потоков $Nu_t = Nu_b$. Это условие использовалось при численном решении задач как один из параметров сходимости процесса к стационарному состоянию.

Система уравнений (1.3) с начальными и граничными условиями (1.4)—(1.5) исследовалась численно на сетке размером 14×26 узлов. Подсистема гидродинамических уравнений рассчитывалась по методу SIMPLE [7], а уравнение притока тепла — по методу энтальпии [8]. Численная модель тестировалась путем сравнения результатов расчетов с точными решениями задачи Стефана в одномерной постановке и с численными решениями задач свободной конвекции в прямоугольной области [5, 9, 10]. Оказалось, что различие по температуре в задаче Стефана не превышает 7% при расчете на сетке в 12 узлов, а сравнение результатов расчетов естественной конвекции показывает, что поведение изотерм и функции тока на даже весьма грубой сетке 15×15 различается незначительно.

2. Анализ численных решений задач замерзания (плавления) будем проводить по мере возрастания числа Рэлея (фиг. 1; $Ra = 0 - 2 \cdot 10^4$; $6 \cdot 10^4$; $1,1 \cdot 10^5$; $1,76 \cdot 10^5$, верхний ряд — плавление, нижний — замерзание). При малых числах $Ra = 0 - 2 \cdot 10^4$ никакого конвективного течения в ячейке не возникает в обоих решениях. В этом случае развитие мерзлой зоны описывается решением задачи

Стефана. Решение обеих задач стремится к стационарному, при котором мерзлая зона занимает верхнюю половину ячейки, безразмерная теплопередача на верхней и нижней границах ячейки характеризуется значением безразмерного числа Nu , равного единице. Граница, разделяющая мерзлую и талую зоны, плоская в течение всего процесса. Установление стационарного решения происходит за время $\tau \sim 0,4$. Изменение теплопередачи верхней и нижней границ во время процесса установления приведено на фиг. 1, а.

При увеличении числа Рэлея $2 \cdot 10^4 \leq Ra \leq 6 \cdot 10^4$ в задаче о плавлении мерзлой зоны в ячейке первоначально процесс плавления не сопровождается развитием конвективного течения и лишь после момента, когда талая зона занимает половину ячейки, начинается развитие конвективного течения. Конвективное течение имеет вид вихря, вращения жидкости в котором происходит по часовой стрелке (фиг. 2, а). Формирование конвективного течения приводит к увеличению теплопередачи как через верхнюю границу ячейки, так и через нижнюю. Динамика изменения теплопередачи приведена на фиг. 1, б. Формирование стационарного температурного распределения происходит к моменту времени $\tau \sim 1$. Граница мерзлой зоны изогнута и в центре ячейки имеет максимальную толщину. Увеличение теплопередачи приводит к тому, что мерзлая зона занимает менее половины ячейки в стационарном состоянии.

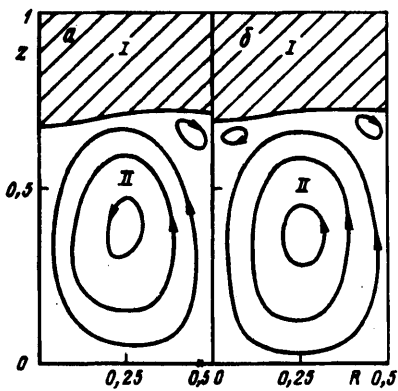
В задаче о замерзании жидкости в ячейке первоначально происходит развитие конвективного течения, а затем уже развитие мерзлой зоны. В результате установление стационарного теплового поля происходит значительно быстрее. Конвективное течение жидкости имеет вид вихря, закрученного в противоположную сторону против часовой стрелки (фиг. 2, б). Впервые наличие двух стационарных решений в задачах конвекции, различающихся направлением вихревого течения, было установлено в [6]. В этой работе рассматривался процесс развития конвективного течения в задачах охлаждения плоской ячейки с жидкостью сверху и нагревании ее снизу. Однако в обоих случаях жидкость не претерпевала фазового перехода.

В полученном решении изменение направления вращения жидкости приводит к перераспределению теплового поля, в результате чего мерзлая зона имеет минимальную толщину уже не в центре, а на боковых границах ячейки. Конвективное течение в этом случае менее интенсивное и теплопередача в стационарном состоянии несколько меньше, чем в решении о плавлении мерзлой зоны.

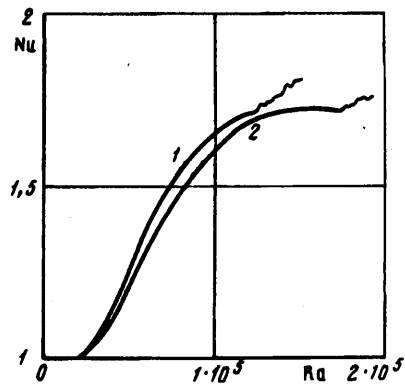
Дальнейшее возрастание числа Рэлея приводит к тому, что интенсивное конвективное вихревое течение зарождается у стенки, на которой начинается тепловое воздействие. Это течение порождает резкое изменение коэффициента теплопередачи у этой стенки (фиг. 1). Развитие конвективного течения во всей области ячейки приводит к снижению скорости течения и снижению теплопередачи.

При превышении второго критического значения числа Рэлея наблюдается автоколебательное решение. Оно связано с образованием и затуханием вторичных вихрей вблизи поверхности раздела мерзлой и талой зон. Автоколебательное решение для двух моментов времени приведено на фиг. 3 (а — $\tau = 0,2$, б — $\tau = 0,23$). Поверхность раздела мерзлой и талой зон в этом решении колеблется и меняет свою конфигурацию. Отсутствие в этом случае стационарного решения приводит к тому, что теплопередача через ячейку также меняется в ограниченном диапазоне (фиг. 1). Значение второго критического значения числа Рэлея различно для задач плавления и замерзания и равно соответственно $12 \cdot 10^4$ и $16,7 \cdot 10^4$.

Автоколебательное решение имеет место в ограниченном диапазоне значений числа Рэлея. Существует третье критическое число $Ra = 2 \cdot 10^5$, при котором решение разваливается, т. е. неустойчиво. Интегральная зависимость стационарного значения числа Nu от числа Ra приведена на фиг. 4. На этом рисунке кривые 1 и 2 отвечают задачам плавления и замерзания жидкости в ячейке. Первое критическое число Рэлея, отделяющее область покоя от области развития конвективного течения, совпадает для обеих задач: плавления и замерзания. В



Фиг. 3



Фиг. 4

области стационарного конвективного течения теплопередача и характер конвективного потока зависят от исходного состояния системы. Для задачи замерзания коэффициент теплопередачи ниже, чем для задачи плавления. Развитие автоколебательных процессов в задаче замерзания начинается и кончается при меньших числах Ra .

Исследование ветвей решений проводилось лишь для двух типов начальных условий: среда в ячейке в начальный момент находится в жидком состоянии при однородной температуре и среда в ячейке находится в твердом состоянии при однородной температуре.

Возможно, что при других начальных условиях либо при внесении в систему возмущений будут получаться другие решения или одно из решений будет неустойчивым (например, при закрутке цилиндрической ячейки относительно ее оси).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brewster R. A., Gebhart B. An experimental study of natural convection effects on downward freezing of pure water//Intern. J. Heat Mass Transfer. 1988. V. 31. № 2. P. 331—348.
2. Hale N. W., Viskanta R. Solid — liquid phase-change heat transfer and interface motion in material cooled or heated from above or below//Intern. J. Heat Mass Transfer. 1980. V. 23. № 3. P. 283—292.
3. Ho C.-J., Viskanta R. Heat transfer during melting from an isothermal vertical wall//Intern. J. Heat Mass Transfer. 1984. V. 27. № 5. P. 705—716.
4. Gau C., Viskanta R. Melting and solidification of a metal system in a rectangular cavity//Intern. J. Heat Mass Transfer. 1984. V. 27. № 1. P. 113—124.
5. Тарунин Е. Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.
6. Полежаев В. И. Течение и теплообмен при естественной конвекции газа в замкнутой области после потери устойчивости гидростатического равновесия//Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 5. С. 124—129.
7. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.
8. Шамсудар, Спэрроу. Влияние изменения плотности на фазовые превращения в условиях многомерной теплопроводности//Теплопередача. 1976. № 4. С. 16—27.
9. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Численное исследование конвективного движения в замкнутой полости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 5. С. 56—62.
10. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Численное исследование конвекции жидкости, подогреваемой снизу//Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 6. С. 93—99.