

УДК 532.526.2:533.6.011.55

© 1995 г. А. А. КОВАЛЕНКО

МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ: РЕЖИМ СИЛЬНОГО ВЯЗКО-НЕВЯЗКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Предлагается метод решения уравнений ламинарного пограничного слоя, учитывающий сильное взаимодействие этого слоя с внешним гиперзвуковым невязким потоком. Метод предназначен для решения задач, принципиальной особенностью которых является возможность распространения возмущений вверх по потоку на расстояния, сравнимые с длиной обтекаемого тела. Подробно рассматривается лежащая в основе метода процедура подбора самосогласованного контура «эффективного» тела с помощью искусственно сформулированной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Приводятся результаты применения метода к решению задач обтекания пластины с расположенной на ней неровностью — валом или траншеей.

Гиперзвуковое вязкое обтекание тонких тел с искривленной поверхностью нередко сопровождается образованием зон возвратного течения. Реализация численных методов решения такого рода задач с помощью уравнений Навье — Стокса весьма сложна и трудоемка. К тому же эффективность этих методов падает по мере увеличения характерного числа Рейнольдса. В таких ситуациях широко применяется искусственный прием, связанный с разделением ударного слоя на пристеночную область (пограничный слой), существенную роль в которой играет вязкость, и внешнюю по отношению к ней область, в которой вязкими эффектами можно пренебречь. При обтекании тонких тел с острой передней кромкой потоком с большой сверхзвуковой скоростью течение в этой внешней области сверхзвуковое и раздельное решение уравнений Прандтля и Эйлера, описывающих течение во всем ударном слое, не допускает распространения возмущений вверх по потоку. Но это находится в противоречии с физической реальностью. Дело в том, что из-за необходимости выполнения условия прилипания потока к поверхности обтекаемого тела в непосредственной близости к нему всегда существует область дозвукового течения. Распространение возмущений в ней имеет эллиптический характер — возникнув в каком-либо сечении, они не только сносятся вниз, но и проникают в область, лежащую выше по потоку от данного сечения.

Асимптотический анализ задач вязко-невязкого взаимодействия позволяет оценить масштабы области возмущенного течения. Так, на режиме слабого вязко-невязкого взаимодействия протяженность такой области асимптотически мала по сравнению с длиной обтекаемого тела. Принципиально иная ситуация имеет место на режимах умеренного и сильного взаимодействия. Возмущения, в каком бы сечении пограничного слоя они не возникали, распространяются навстречу основному невязкому потоку вплоть до передней кромки тела даже при отсутствии в поле течения возвратных токов [1]. При определенных условиях передача возмущений вверх по потоку может служить причиной практически глобальной, т. е. по всей длине обтекаемого тела, перестройки течения. Проявление эффекта распространения возмущений в такой крайней степени сопровождается существенным изменением не только локальных, но и суммарных аэродинамических характеристик.

Предлагаемый метод предназначен для решения именно таких задач. В основе его, как и многих численных методов, учитывающих эффект распространения возмущений вверх по потоку, лежит теория вязко-невязкого взаимодействия.

Эта теория, опирающаяся на известную концепцию «эффективного» тела [2], оказалась весьма плодотворной и ее активное использование продолжается по сей день. В сочетании с применением при аппроксимации уравнений движения ориентированных против потока разностных схем она позволяет получать решения, содержащие весьма протяженные замкнутые зоны отрыва. Достаточно полный обзор соответствующей отечественной и зарубежной литературы можно найти в [3]. Предлагаемый метод использует релаксационную процедуру коррекции толщины вытеснения пограничного слоя. Однако в отличие от перечисленных в [3] он учитывает квадратичную зависимость индуцированного давления от наклона поверхности «эффективного» тела, характерную для режима сильного вязко-невязкого взаимодействия [2]. Кроме того, метод предоставляет возможность выбора одного из двух вариантов постановки краевого условия на задней кромке обтекаемого тела. Это может быть не только широко применяемое условие постоянства давления, но и условие постоянства толщины вытеснения пограничного слоя в этом сечении.

1. Предполагается, что характерное число Рейнольдса задачи имеет большое, но докритическое значение, и, следовательно, течение является ламинарным. Постулируется режим сильного вязко-невязкого взаимодействия, что справедливо при достаточно больших значениях числа Маха набегающего потока. Предполагается также, что максимальный угол наклона поверхности тела относительно направления набегающего потока имеет тот же порядок величины, что и характерный угол наклона внешней границы невозмущенного пограничного слоя. При выполнении этого условия ошибка от снесения краевых условий с поверхности тела на ось абсцисс по порядку величины не превосходит квадрата характерного угла наклона внешней границы пограничного слоя и, следовательно, остаются справедливыми положения гиперзвуковой теории малых возмущений.

Далее индексом ноль отмечены размерные величины, индексом ∞ — параметры набегающего потока, индексом c — характерные величины.

Для вывода безразмерных уравнений пограничного слоя необходимо нормировать все переменные, входящие в исходные полные уравнения Навье—Стокса, на соответствующие характерные величины по правилу $\Phi^{\circ}(x^{\circ}, y^{\circ}) = \Phi^{\circ} \Phi(x, y)$. Нормировка подразумевает введение безразмерных переменных с учетом порядка их величин в рассматриваемой области течения. Нормировочные множители Φ° зависят от длины тела l° , скорости u_{∞}° и плотности ρ_{∞}° набегающего потока, малого параметра задачи $d_c \ll 1$, представляющего собой характерный угол наклона внешней границы невозмущенного пограничного слоя. Согласно [2], характерными являются следующие величины: для декартовых координат $x_c^{\circ} = l^{\circ}$, $y_c^{\circ} = d_c l^{\circ}$, для компонент скорости $u_c^{\circ} = u_{\infty}^{\circ}$, $v_c^{\circ} = d_c u_{\infty}^{\circ}$, для угла наклона поверхности обтекаемого тела $b_c = d_c$, для плотности $\rho_c^{\circ} = d_c^2 \rho_{\infty}^{\circ}$, для статического давления $p_c^{\circ} = d_c^2 \rho_{\infty}^{\circ} (u_{\infty}^{\circ})^2$, для полной энтальпии $h_c^{\circ} = (u_{\infty}^{\circ})^2 / 2$. Можно показать, что при такой нормировке полной энтальпии в качестве характерного значения абсолютной температуры удобно использовать величину $t_c^{\circ} = (u_{\infty}^{\circ})^2 / (2c_p^{\circ})$, где c_p° — удельная теплоемкость при постоянном давлении. С учетом принятой в работе степенной зависимости динамического коэффициента вязкости от абсолютной температуры в качестве характерной для него используется величина $\mu_c^{\circ} = \mu^{\circ}(t_c^{\circ})$. В соответствии с ранее сделанным предположением нормировка угла наклона поверхности обтекаемого тела имеет вид $b = d_c B$.

Уравнения пограничного слоя могут быть получены после подстановки нормированных таким образом переменных в полные уравнения Навье—Стокса и последующего предельного перехода для числа Рейнольдса $Re = \rho_{\infty}^{\circ} u_{\infty}^{\circ} l^{\circ} / \mu_c^{\circ} \rightarrow \infty$ при соблюдении условия равенства порядков конвективного и диффузионного членов уравнения импульса. Характерный угол наклона внешней

границы вязкого слоя, при котором выполняется это условие, связан с числом Рейнольдса соотношением $d_c = Re^{-1/4}$.

Система уравнений и краевых условий для вязкой части ударного слоя в нормированных переменных принимает вид

$$(\rho u)_x + (\rho v)_y = 0, \quad p = c_1 \rho (h - u^2), \quad \mu = h - u^2$$

$$\rho u u_x + \rho v u_y + p_x = [\mu u_y]_y, \quad p_y = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho u h_x + \rho v h_y = c_{01} [\mu h_y]_y + c_{10} [\mu (u^2)_y]_y$$

$$y = 0: v = u = h - h_B = 0$$

$$y = y_B: u = h = 1$$

$$c_{01} = \frac{1}{Pr}, \quad c_{10} = 1 - \frac{1}{Pr}, \quad c_1 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}, \quad c_2 = \frac{\gamma + 1}{2}$$

где γ — отношение удельных теплоемкостей совершенного газа, Pr — число Прандтля. Индексы B и L относятся к значениям переменных на поверхности обтекаемого тела и на внешней границе пограничного слоя.

Продольный градиент давления, входящий в уравнение импульса системы (1.1), заранее неизвестен. Он должен определяться в процессе решения из условия взаимодействия пограничного слоя с внешним невязким потоком. В данной работе в качестве такого условия используется предельная форма связи давления с местным наклоном поверхности «эффективного» тела, вытекающая из приближения касательных клиньев при больших значениях параметра взаимодействия

$$p = c_2 [d_x]^2 = c_2 [(d_B + d_L)_x]^2 = c_2 [B + (d_L)_x]^2 \quad (1.2)$$

где $d_B(x)$ и $d_L(x)$ представляют собой толщину обтекаемого тела и толщину вытеснения пограничного слоя, а их сумма $d(x)$ — толщину «эффективного» тела. С учетом (1.2) градиентный член уравнения импульса зависит от второй производной этой толщины по продольной координате. Это обстоятельство можно трактовать как проявление свойственной уравнениям взаимодействующего пограничного слоя «остаточной эллиптичности», унаследованной ими от исходных уравнений Навье—Стокса. Присутствие такой производной в уравнениях пограничного слоя имеет принципиальное значение, поскольку следствием его является зависимость решения от условия на задней кромке обтекаемого тела. Возможны различные варианты задания этого условия. В настоящей работе на постоянном в процессе решения заранее заданном уровне поддерживается давление на этой кромке.

Для численного решения задачи вводятся независимые переменные, позволяющие исключить из (1.1) плотность и придать расчетной области прямоугольную форму. В качестве зависимых используются переменные, учитывающие вид известного автомодельного решения Лиза — Стюартсона [2]

$$X = x, \quad Y = c_1 x^{-1/4} \int_0^y \rho dy, \quad V = xu \frac{\partial Y}{\partial x} + c_1 x^{3/4} \rho v, \quad P = x^{1/2} p$$

$$U = u, \quad H = h, \quad D_B = d_B, \quad D_L = x^{-3/4} d_L, \quad D = x^{-3/4} d$$

В этих переменных система (1.1) и соотношение (1.2) принимают удобный для расчетов на ЭВМ вид

$$V_Y + \frac{1}{4} U + XU_X = 0$$

$$XUU_X + VU_Y + c_1 \left(G - \frac{1}{2} \right) (H - U^2) = c_1 P U_{YY} \quad (1.3)$$

$$XUH_X + VH_Y = c_1 P [c_{01} H_{YY} + c_{10} (U^2)_{YY}]$$

$$Y = 0: V = U = H - H_B = 0$$

$$Y = \infty: U = H = 1$$

$$S_L = \int_0^{\infty} (H - U^2) dY, \quad D_B = \int_0^X B(X) dX, \quad D_L = S_L/P$$

$$D = X^{-3/4} D_B + D_L, \quad P = c_2 \left(X D_X + \frac{3}{4} D \right)^2, \quad G = \frac{X}{P} P_X = 2 \frac{X^2 D_{XX} + 7/4 X D_X}{X D_X + 3/4 D}$$

2. В системе (1.3) формальным признаком «остаточной эллиптичности» является зависимость функции $G(X)$, входящей в градиентный член уравнения импульса, от второй производной функции $D(X)$. С учетом этого обстоятельства организуется процедура подбора самосогласованного контура «эффективного» тела, центральная в предлагаемом методе.

Пусть задано некоторое стартовое распределение $D_S(X)$. Тогда, пользуясь формулами системы (1.3) для $P(X)$ и $G(X)$, можно организовать итерационный процесс решения уравнений неразрывности, импульса и энергии, входящих в эту систему, при фиксированном распределении $D(X) = D_S(X)$. По полученным сеточным значениям скорости $U(X, Y)$ и энтальпии $H(X, Y)$ легко рассчитать продольное распределение интеграла $S_L(X)$. Пользуясь определением толщины вытеснения, несложно получить, что $D_L(X) = S_L(X)/P(X)$. Тогда ответом системы (1.3) на заданное стартовое распределение $D_S(X)$ является промежуточное распределение $D_I(X) = X^{-3/4} D_B(X) + D_L(X)$. За исключением некоторых специальных случаев, между стартовым и промежуточным распределениями на начальном этапе решения задачи имеется существенное различие. Возникает вопрос: как с учетом знания $D_I(X)$ корректировать $D_S(X)$, чтобы в результате очередной итерации добиться сближения, а в конечном итоге и совпадения в пределах требуемой точности этих распределений?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения относительно так называемой корректирующей функции $Z(X) = D_F(X) - D_S(X)$

$$X^2 Z_{XX} - C^2 Z = C^2 (D_S - D_I) \quad (2.1)$$

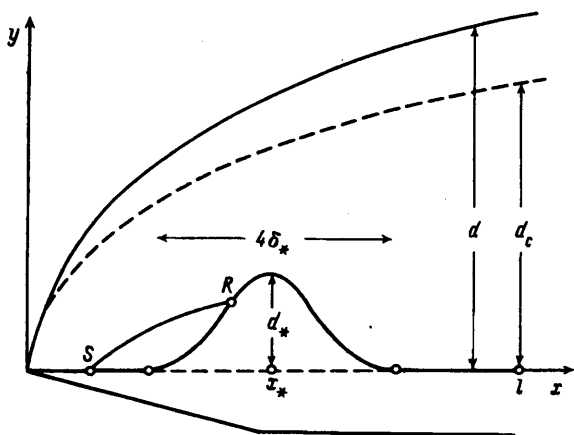
$$X = 0: Z = 0 \quad X = 1: XZ_X + \frac{3}{4} Z = 0$$

$$D_I = X^{-3/4} D_B + \frac{S_L}{c_2 \left(X D_X^2 + 3/4 D^2 \right)}, \quad D^T = D_S + C_L Z$$

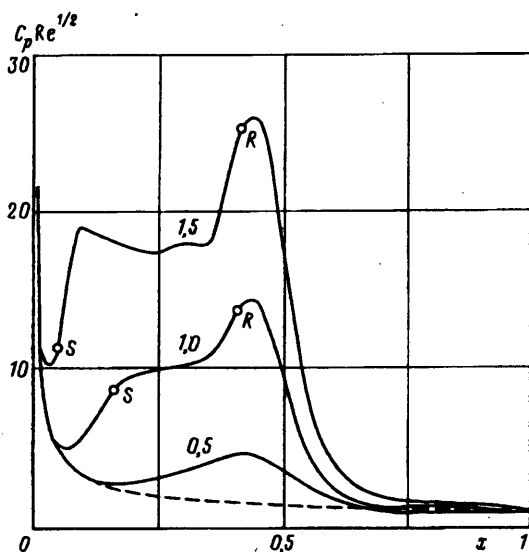
Эта краевая задача умышленно сформулирована так, что при стремлении к нулю значений $Z(X)$ в каждом сечении расчетного интервала должны уменьшаться и отличия в соответствующих значениях $D_S(X)$, $D_I(X)$ и $D_F(X)$. Процесс поиска самосогласованной толщины «эффективного» тела считается успешно завершенным, если абсолютная величина $Z(X)$ всюду меньше некоторой заранее выбранной малой величины. Ранее уже отмечалось, что на начальном этапе решения конкретной задачи $Z(X)$, как правило, не удовлетворяет этому условию. Тем не менее краевые условия задачи (2.1) позволяют держать постоянным давление на правом краю расчетного интервала, что благоприятно влияет на поведение решения по ходу итерационного процесса.

Если постоянная C_L выбрана равной нулю, то дифференциальное уравнение задачи (2.1) является линейным. Если C_L равна единице, то решение указанной задачи требует организации итераций по нелинейности. Эти итерации не требуют больших затрат машинного времени, поскольку совершаются при фиксированных сеточных значениях скорости и энтальпии. Специально проведенные сравнительные расчеты показали, что нелинейный вариант предпочтительнее. Величина постоянной C в каждом конкретном случае подбирается с целью минимизации времени расчета.

После получения очередного распределения корректирующей функции $Z(X)$ в качестве нового стартового распределения используется линейная комбинация $D_S(X)$ и $D_F(X) = D_S(X) + Z(X)$. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока с требуемой точностью не установится



Фиг. 1

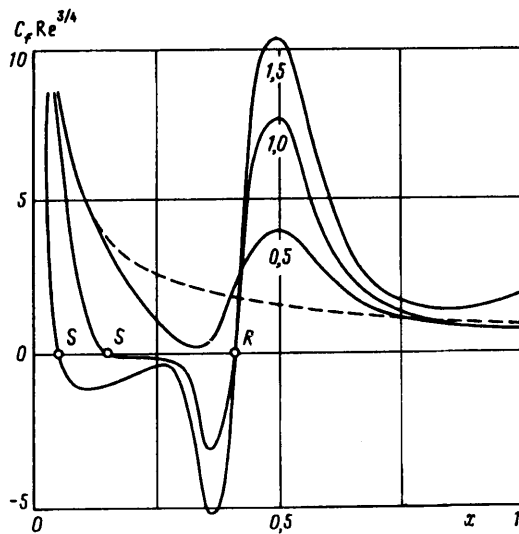


Фиг. 2

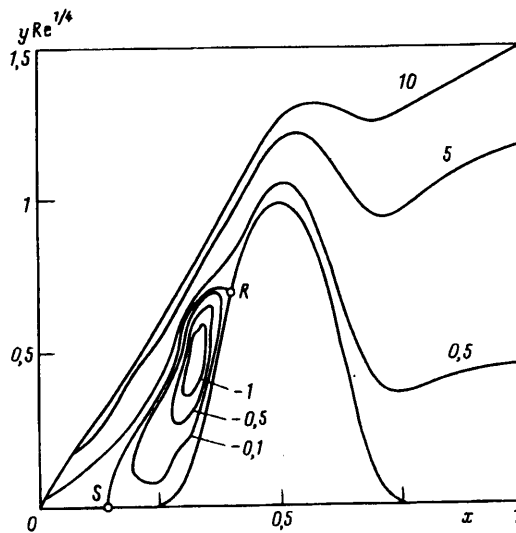
соответствующее контуру «эффективного» тела распределение $D(X)$ при обязательном сопутствующем установлении сеточных значений скорости и энтальпии. Именно такая ситуация имеется в виду при использовании термина «самосогласованность». Описанная итерационная процедура подбора контура «эффективного» тела в определенном смысле моделирует процесс вязко-невязкого взаимодействия. Более подробное изложение этой процедуры можно найти в [4].

3. Расчеты проводились для одноатомного совершенного газа при единичных значениях числа Прандтля и температурного фактора поверхности тела. Предполагалась также линейная зависимость динамического коэффициента вязкости от абсолютной температуры. Такой выбор исходных параметров был сделан в связи с необходимостью апробации метода в условиях, когда возмущения распространяются вверх по потоку с наибольшей интенсивностью. Прогнозирование интенсивности распространения возмущений проводилось на основе анализа зависимости собственных значений от свойств газа и обтекаемой поверхности [5—7].

Результаты представлены в переменных подобия, содержащих характерное число Рейнольдса задачи. Для наглядности картины линий тока «растянуты» по вертикали в $Re^{1/4}$ раз. Символами S и R отмечены значения функций в точках



Фиг. 3



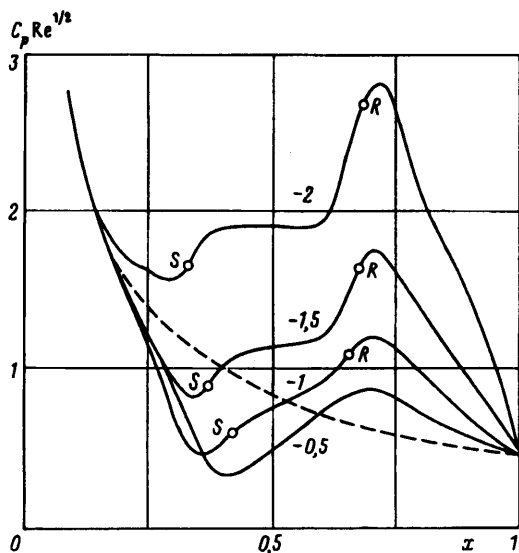
Фиг. 4

отрыва и присоединения. Штриховой линией показано автомодельное решение, соответствующее обтеканию плоской полубесконечной пластины.

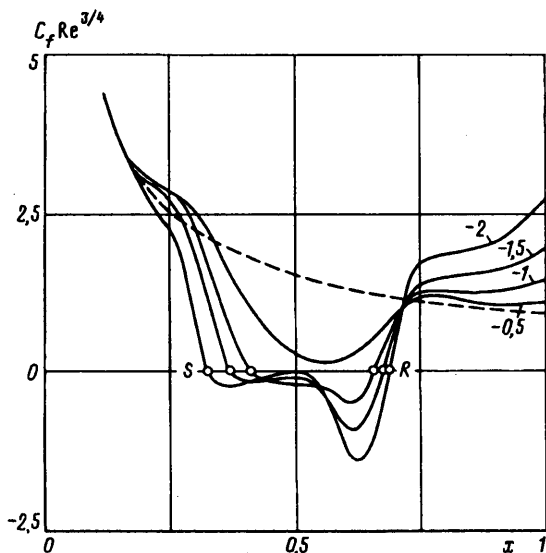
Решены задачи обтекания пластины с искривленной в виде вала или траншеи поверхностью. Профиль неровности формировался из фрагментов квадратных парабол, а весь контур обтекаемого тела задавался с помощью системы соотношений

$$Re^{1/4} \frac{d_B^\circ}{l^\circ} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x^\circ \leq x_*^\circ - 2\delta_*^\circ \\ C_B (\delta - 1)^2, & x_*^\circ - 2\delta_*^\circ \leq x^\circ \leq x_*^\circ - \delta_*^\circ \\ C_B (1 - 2\delta^2), & x_*^\circ - \delta_*^\circ \leq x^\circ \leq x_*^\circ + \delta_*^\circ \\ C_B (\delta + 1)^2, & x_*^\circ + \delta_*^\circ \leq x^\circ \leq x_*^\circ + 2\delta_*^\circ \\ 0, & x_*^\circ + 2\delta_*^\circ \leq x^\circ \leq l^\circ \end{cases}$$

$$\delta = \frac{\delta^\circ}{\delta_*^\circ} = \frac{x^\circ - x_*^\circ}{2\delta_*^\circ}$$



Фиг. 5

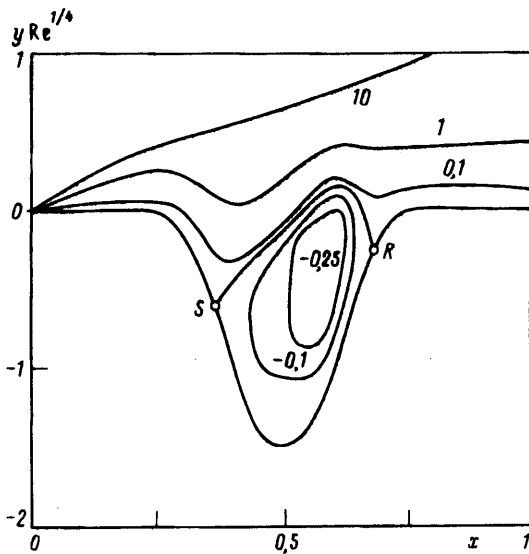


Фиг. 6

Смысл параметров x_*° и δ_*° понятен из схемы, приведенной на фиг. 1. Положительные значения параметра C_B соответствуют обтеканию вала, отрицательные — траншеи. Его абсолютная величина регулирует поперечный размер неровности, измеряемый в долях толщины невозмущенного пограничного слоя на расстоянии l° от передней кромки: $d_*^\circ = d_B^\circ(x_*^\circ) = C_B d_c^\circ = C_B Re^{-1/4} l^\circ$. При фиксированном C_B крутизна склонов обратно пропорциональна величине параметра δ_*° .

Все обсуждаемые результаты получены для неровностей, расположенных на середине пластины $x_*^\circ = l^\circ/2$ и имеющих протяженность $4\delta_*^\circ = l^\circ/2$. Варьировался лишь поперечный размер неровности d_*° .

Первая серия результатов получена при решении задачи обтекания пластины с расположенным на ней валом. На фиг. 2 представлены продольные распределения коэффициента давления $C_p = p^\circ / [\rho_\infty^\circ (u_\infty^\circ)^2]$. При всех значениях параметра C_B пик



Фиг. 7

давления располагается на наветренном склоне вала в непосредственной близости к его вершине, а в случае отрывного обтекания — сразу же за точкой присоединения. Низкий вал $C_B = 0,5$ обтекается безотрывным образом. С увеличением высоты вала около его наветренной стороны формируется зона рециркуляционного течения. Причем протяженность ее растет в основном за счет смещения точки отрыва к передней кромке. Это хорошо видно из приведенных на фиг. 3 распределений местного коэффициента поверхностного трения $C_F = [\mu^\circ \partial u^\circ / \partial y^\circ]_B / [\rho_\infty^\circ (u_\infty^\circ)^2]$. Максимум поверхностного трения при всех значениях высоты вала приходится на его вершину. Формирование локального максимума поверхностного трения между точками отрыва и присоединения свидетельствует о том, что дальнейший рост высоты вала приведет к образованию так называемого вторичного отрыва. С ростом высоты вала наблюдается также смещение к передней кромке точки отхода распределений давления и поверхностного трения от соответствующих автомодельных. Характерная для отрывного обтекания картина линий тока представлена на фиг. 4. Это решение получено для вала с параметром $C_B = 1$. Каждая изолиния отмечена соответствующим значением постоянной $Re^{-1/4} \Psi^\circ / \mu_c^\circ$. Здесь нелишне еще раз напомнить, что картина линий тока «растянута» и для представления реального обтекания необходимо «сжать» ее по поперечной координате в $Re^{1/4}$ раз.

Вторая серия результатов получена при решении задачи обтекания пластины с расположенной на ней траншеей. Мелкая траншея $C_B = -0,5$ обтекается безотрывным образом. При этом давление на ее подветренном склоне ниже, а на наветренном выше, чем на плоской пластине (фиг. 5). По мере углубления траншеи формируется, заполняя ее профиль, рециркуляционное течение. При обтекании глубокой траншеи $C_B = -2$ в распределении давления наблюдается характерная для развитых отрывных зон область «плато». При всех значениях глубины пик давления расположен на наветренном склоне траншеи, а в случае отрывного обтекания — сразу же за точкой присоединения. Расчеты показывают, что область развитого рециркуляционного течения может даже выступать за пределы профиля траншеи. Для такой ситуации характерен столь интенсивный рост толщины вытеснения пограничного слоя, при котором даже около траншеи толщина «эффективного» тела растет. Происходит интенсивное отеснение невязких струек от поверхности обтекаемого тела и связанное с этим увеличение индуцированного

давления. В свою очередь присущий задачам вязко-невязкого взаимодействия эффект распространения возмущений приводит к охвату зоной повышенного давления почти всего обтекаемого тела. Примером такой ситуации может служить решение при $C_B = -2$, согласно которому давление на всем протяжении пластины с траншеей превышает давление на плоской пластине. Так же как и в случае обтекания пластины с валом, протяженность зоны рециркуляционного течения растет в основном за счет смещения точки отрыва к передней кромке (фиг. 6). По мере углубления траншеи отчетливо проявляется тенденция к образованию в ее самом глубоком месте вторичного отрыва, о чем свидетельствует формирование локального максимума поверхностного трения. Картина линий тока для случая $C_B = -1,5$ показана на фиг. 7. Пристеночные струйки тока с малым скоростным напором сначала стекают в траншею, а затем энергично вытесняются за пределы ее профиля развитым возвратным течением.

Как уже отмечалось, по мере увеличения поперечного размера неровности проявлялась тенденция к образованию зоны вторичного отрыва. Однако попытки получить соответствующее решение были безуспешны. Причина состояла в появлении неустраиваемых колебаний расчетных величин, в особенности поверхностного трения, в той части расчетной области, где как раз и ожидалось появление вторичного отрыва. Аналогичная ситуация встречалась, например, при расчете обтекания траншеи потоком несжимаемой жидкости [8]. Таким образом, на данном этапе развития метода границей его применимости можно считать режимы, непосредственно предшествующие появлению вторичного отрыва. В настоящее время предпринимаются усилия по преодолению возникших трудностей и расширению диапазона применимости метода.

Кроме представленных здесь решений с помощью одной из ранних версий метода были решены задачи об обтекании пластины с отклоненным щитком [4] и о течении в симметричном следе за плоской пластиной конечной длины [9, 10]. Успешное применение разработанного метода к решению такого широкого спектра задач вязко-невязкого взаимодействия свидетельствует о его высокой эффективности. К привлекательным чертам метода несомненно можно отнести простоту его реализации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-16399).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нейланд В. Я.* Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем//Иzv. АН СССР. МЖГ. 1970. № 4. С. 40—49.
2. *Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф.* Теория гиперзвуковых течений: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.
3. *Рубан А. И.* Численные методы в теории взаимодействия пограничного слоя с невязким потоком//Уч. зап. ЦАГИ. 1990. Т. 21. № 5. С. 3—25.
4. *Коваленко А. А.* Численное моделирование течения в гиперзвуковом ламинарном пограничном слое//Тр. ЦАГИ. 1989. Вып. 2417. С. 3—39.
5. *Werle M. J., Dwoyer D. L., Hankey W. L.* Initial conditions for the hypersonic-shock/boundary-layer interaction problem//AIAA Journal. 1973. V. 11. № 4. P. 525—530.
6. *Коваленко А. А.* Исследование отрыва пограничного слоя при сильном взаимодействии с гиперзвуковым потоком газа//Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 6. С. 39—47.
7. *Brown S. N., Stewartson K., Williams P. G.* Hypersonic self-induced separation//Phys. Fluids. 1975. V. 18. № 6. P. 633—639.
8. *Rubin S. G., Himansu A.* Convergence properties of high Reynolds number separated flow calculations//Internat. J. Numer. Meth. Fluids. 1989. V. 9. P. 1395—1411.
9. *Коваленко А. А., Лунатов И. И.* Исследование перехода от закритического к докритическому режиму вязко-невязкого взаимодействия в следе за пластиной//ПМТФ. 1991. Т. 3. С. 72—78.
10. *Коваленко А. А., Лунатов И. И.* Гиперзвуковое обтекание пластины конечной длины//Иzv. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 66—73.