

УДК 532.517.4

© 1995 г. О. С. АЛФЕРОВ, А. Г. ПЕТРОВ

## ДВУХСЛОЙНОЕ ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ НАД ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Предложена модель турбулентного течения несжимаемой жидкости над шероховатой поверхностью под действием силы Кориолиса с коэффициентом турбулентного обмена, соответствующим пути смещения Прандтля. Представлено асимптотическое по малому параметру Кориолиса решение задачи об установившемся однородном по горизонтали течении. Показано, что профиль скорости и коэффициент турбулентного обмена при малом параметре Кориолиса могут существенно отличаться от предельных выражений, известных из теории Прандтля. Отличие оказывается тем больше, чем меньше коэффициент шероховатости.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается однородное по горизонтали установившееся течение слоя жидкости толщины  $H$ .

При отсутствии градиента давления под действием силы Кориолиса турбулентное течение определяется из уравнения

$$\frac{d}{dZ} \left( \nu_T \frac{dv}{dZ} \right) = -F_c, \quad \nu_T = \kappa^2 (Z + Z_0)^2 \left| \frac{dv}{dZ} \right| \quad (1.1)$$

где  $Z$  — вертикальная координата,  $v$  — вектор скорости с двумя горизонтальными компонентами  $v_x, v_y$  по осям  $x$  и  $y$ ,  $F_c$  — сила Кориолиса с компонентами  $fv_y, -fv_x$  по осям  $x$  и  $y$ ,  $\nu_T$  — коэффициент турбулентного обмена, определяемый согласно теории пути смещения Прандтля [1, 2],  $\kappa = 0,4$  — безразмерный коэффициент Кармана,  $Z_0$  — средняя толщина выступов шероховатости.

На горизонтальной шероховатой поверхности  $Z = 0$  примем обычное условие прилипания

$$Z = 0: \quad v = 0 \quad (1.2)$$

Пусть  $U$  — скорость верхнего слоя жидкости на уровне  $Z = H$ , вообще говоря, не равная скорости  $V(H)$  на этом же уровне нижнего слоя жидкости. Будем считать, что касательное напряжение  $\tau$  на границе двух потоков пропорционально квадрату скачка скорости.

Таким образом, на границе  $Z = H$  имеем условие

$$\tau = \rho C (U - v(H)) |U - v(H)| = \rho \nu_T dv/dz \quad (1.3)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $C$  — безразмерная постоянная.

Введем следующие безразмерные величины:

$$z = \frac{Z}{H}; \quad z_0 = \frac{Z_0}{H}; \quad V = \frac{v}{U}; \quad \varepsilon = \frac{fH}{U\kappa^2}; \quad C' = \frac{\sqrt{C}}{\kappa} \quad (1.4)$$

Тогда из (1.1)—(1.4) получим краевую задачу для определения комплексной скорости  $V(z)$  как функции действительной переменной  $z$

$$0 \leq z \leq 1: \frac{d}{dz} \left( (z + z_0)^2 \left| \frac{dV}{dz} \right| \frac{dV}{dz} \right) = i\varepsilon V \quad (1.5)$$

$$z = 0: V = 0 \quad (1.6)$$

$$z = 1: (1 - V(1)) C' = \frac{dV}{dz} \quad (1.7)$$

Предельное граничное условие  $C' \rightarrow \infty$  соответствует отсутствию скачка скорости на границе раздела жидкостей; при этом последнее выражение примет более простой вид

$$z = 1: V(1) = 1 \quad (1.8)$$

Решение задачи (1.5), (1.6), (1.8) зависит от двух безразмерных параметров:  $\varepsilon$  и  $\mu_0$ . Предельное решение при  $\varepsilon = 0$  (сила Кориолиса отсутствует) соответствует известному логарифмическому профилю

$$V = \mu_0 \ln((z + z_0)/z_0), \quad \mu_0 = 1/\ln(1/z_0) \quad (1.9)$$

Ниже будут получены асимптотические разложения решения краевой задачи (1.5), (1.6), (1.8) по малым параметрам  $\varepsilon$ ,  $\mu_0$ , из которых следует, что предельное решение (1.9) является равномерным приближением решения краевой задачи при  $\varepsilon \rightarrow 0$  только при условии  $\lambda_0 = \mu_0^2/\varepsilon \geq 1$ . Решение в этом случае во всей области  $0 \leq z \leq 1$  представляется рядом по степеням  $\varepsilon$ . В противоположном случае при  $\lambda_0 \ll 1$  решение представляется в виде внутренних асимптотических разложений в области  $0 \leq z \leq \lambda$  и внешних асимптотических разложений в области  $z \geq \lambda$ , в которой решение характеризуется существенным отличием от предельного решения (1.9).

*Первый интеграл.* Представим вектор комплексной скорости в тригонометрической форме:  $V = ue^{i\varphi}$ . Модуль скорости  $u(z)$  и аргумент  $\varphi(z)$  являются функциями высоты  $z$ . При  $z = 0$  модуль скорости имеет логарифмическую асимптотику (1.9) с множителем  $\mu \approx \mu_0$  вместо  $\mu_0$ , откуда следует  $u(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = \varphi_0$

$$(z + z_0) \frac{dV}{dz} = z_0 \left( \frac{du}{dz} + iu \frac{d\varphi}{dz} \right) e^{i\varphi} = \mu e^{i\varphi_0}, \quad z = 0 \quad (1.10)$$

где значения  $\varphi_0$  и  $\mu$  следует определить из решения всей краевой задачи.

Проинтегрируем уравнение (1.5) от  $z = 0$  до произвольного значения  $z \leq 1$ , принимая во внимание (1.10)

$$(z + z_0)^2 \left| \frac{dV}{dz} \right| \frac{dV}{dz} = e^{i\varphi_0} (i\varepsilon F(z) + \mu^2) \quad (1.11)$$

$$F(z) = e^{-i\varphi_0} \int_0^z V dz \quad (1.12)$$

Из (1.11) для модуля производной скорости получим

$$(z + z_0) \left| \frac{dV}{dz} \right| = |i\varepsilon F(z) + \mu^2|^{1/2} = \sqrt{\varepsilon} |iF(z) + \lambda|^{1/2} \quad (1.13)$$

Подставляя (1.13) в (1.11), придем к следующему уравнению:

$$(z + z_0) \frac{dV}{dz} = \sqrt{\varepsilon} e^{i\varphi_0} \frac{iF(z) + \lambda}{|iF(z) + \lambda|^{1/2}}, \quad \lambda = \frac{\mu^2}{\varepsilon} \quad (1.14)$$

Уравнение (1.14) существенно упрощает получение асимптотических разложений по сравнению с исходным (1.5).

2. Асимптотические разложения. Внутреннее разложение ( $z/\lambda \ll 1$ ). Для этого представим уравнение (1.14) в следующем виде:

$$(z + z_0) \frac{d^2 F}{dz^2} = \mu \frac{1 + iF/\lambda}{|1 + iF/\lambda|^{1/2}} \quad (2.1)$$

Для функции  $F$ , определенной по (1.12), выполняются следующие условия:

$$F(0) = 0, F'(0) = 0, F'(1) = e^{-\epsilon_0} \quad (2.2)$$

Разложим правую часть уравнения (2.1) по малому параметру  $F/\lambda$

$$\frac{1 + iF/\lambda}{|1 + iF/\lambda|^{1/2}} = 1 + \frac{iF}{\lambda} + \frac{F_y}{2\lambda} - \frac{F_x^2}{4\lambda^2} - \frac{F_y^2}{8\lambda^2} + \frac{iF_x F_y}{2\lambda^2} + \dots \quad (2.3)$$

где  $F_x, F_y$  — действительная и мнимая функции  $F$ .

Решение задачи (2.1)–(2.2) с учетом (2.3) можно получить в виде разложения по малому параметру  $z/\lambda \ll 1$ . Первые два члена этого разложения имеют вид

$$F(z) = \mu z \left( \ln \frac{z + z_0}{z_0} - 1 \right) + i \frac{\mu z}{\lambda} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{z + z_0}{z_0} - \frac{5}{4} \right) + \dots \quad (2.4)$$

$$V(z) = e^{\epsilon_0} \mu \left( \ln \frac{z + z_0}{z_0} + i \mu \frac{z}{\lambda} \left( \ln \frac{z + z_0}{z_0} - 2 \right) + \dots \right)$$

Для угла поворота отсюда следует разложение:

$$\varphi = \varphi_0 + \mu \frac{z}{\lambda} \left( 1 - 2/\ln \frac{z + z_0}{z_0} \right) + \dots \quad (2.5)$$

Внешнее разложение  $z/\lambda \gg 1$ . При  $z/\lambda \gg 1$  решение уравнения представимо в виде

$$V = 1 + i\sqrt{\epsilon} V_1 + \dots, F = e^{-\epsilon_0} (z + i\sqrt{\epsilon} F_1 + \dots) \quad (2.6)$$

Подставим разложение (2.6) в уравнение (1.14), получим

$$z \frac{dV}{dz} = \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{z}} (iz - \sqrt{\epsilon} F_1 + \lambda e^{\epsilon_0}) + \dots \quad (2.7)$$

Из (2.6) и (2.7) находим функцию  $V_1$  и затем из (1.12) интегрированием — функцию  $F_1$

$$V_1 = 2(\sqrt{z} - 1), F_1 = 4/3 z^{3/2} - 2z \quad (2.8)$$

Подставляя  $F_1$  из (2.8) в разложение (2.6) для  $F$ , найдем

$$|iF + \lambda|^2 = z^2 + \lambda^2 + O(\epsilon) \quad (2.9)$$

Подставляем (2.9) в правую часть (1.14), тогда для  $z \gg \lambda$  получим

$$z \frac{dV}{dz} = \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{z}} \left( iz + \sqrt{\epsilon} \left( 2z - \frac{4}{3} z^{3/2} \right) + \lambda e^{\epsilon_0} \right) \quad (2.10)$$

Интегрируя уравнение (2.10) с учетом граничного условия  $V(1) = 1$ , получим разложения по малым параметрам  $\epsilon$  и  $\lambda$

$$V = 1 + 2i\sqrt{\epsilon} (\sqrt{z} - 1) + \epsilon (4\sqrt{z} - 4/3 z - 8/3) + 2\sqrt{\epsilon} \lambda (1 - 1/\sqrt{z}) + \dots \quad (2.11)$$

$$F = (z + i\sqrt{\epsilon} (4/3 z^{3/2} - 2z) + \dots) e^{-\epsilon_0} \quad (2.12)$$

Отсюда имеем внешние разложения

$$u = 1 - 2/3\varepsilon(1-z) + 2\lambda\sqrt{\varepsilon}(1-1/\sqrt{z}) + \dots \quad (2.13)$$

$$\varphi = 2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{z}-1) + \dots \quad (2.14)$$

Для безразмерной турбулентной вязкости из (1.1), (1.13) и (2.9) следует

$$v = z^2 \left| \frac{dV}{dz} \right| = z\sqrt{\varepsilon} |iF(z) + \lambda|^{1/2} = z\sqrt{\varepsilon}(z^2 + \lambda^2)^{1/4} \quad (2.15)$$

В пределе при  $\varepsilon = 0$  из (1.9) следует  $v_0 = z\mu_0$ . Для отношения имеем  $v/v_0 = (z^2/\lambda^2 + 1)^{1/4}$ , т. е.  $v$  близко к  $v_0$  только в области  $z \ll \lambda$ . В области  $z > \lambda$  отличие достигает большой величины порядка  $1/\sqrt{\lambda}$ .

3. Составное разложение. Сравнение асимптотических разложений можно осуществить, если подставить разложения (2.9) и (2.12) в уравнение (1.14) и проинтегрировать его по  $z$

$$V = \sqrt{\varepsilon} \int_0^z \frac{iz + \sqrt{\varepsilon}(2z - 4/3z^{3/2}) + \lambda e^{\mu_0}}{(z+z_0)(z^2 + \lambda^2)^{1/4}} dz \quad (3.1)$$

Введем функции  $\Phi(x, x_0)$  и  $\Psi(x)$

$$\Phi(x, x_0) = \int_0^x \frac{dt}{(t+x_0)(t^2+1)^{1/4}}, \quad \Psi(x) = \int_0^x ((t^2+1)^{-1/4} - t^{-1/2}) dt \quad (3.2)$$

Эти функции имеют следующие разложения:

$$x \gg 1: \Phi(x, x_0) = 1,825 + \ln \frac{1}{x_0} - 2x^{-1/2} + x^{-3/2} + \dots,$$

$$\Psi(x) = -1,198 + 1/6x^{-3/2} + \dots \quad (3.3)$$

$$x \ll 1: \Phi(x, x_0) = \ln \frac{x+x_0}{x_0} - \frac{x^2}{8} + \dots, \quad \Psi(x) = -2\sqrt{x} + x - \frac{x^3}{12} + \dots \quad (3.4)$$

Интеграл (3.1) выразим через функции  $\Phi$  и  $\Psi$

$$V = i \left( 2\sqrt{\varepsilon}z + \mu\Psi\left(\frac{z}{\lambda}\right) \right) + \varepsilon \left( 4\sqrt{z} - \frac{4}{3} \right) + \\ + 2\sqrt{\varepsilon} \mu\Psi\left(\frac{z}{\lambda}\right) + \mu e^{\mu_0} \Phi\left(\frac{z_0}{\lambda}, \frac{z}{\lambda}\right) \quad (3.5)$$

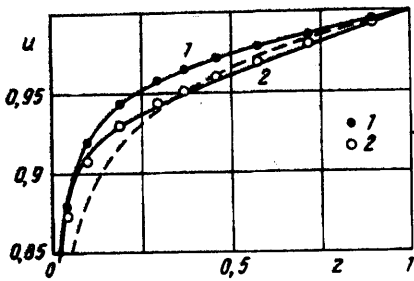
Постоянные  $\mu$  и  $\varphi_0$  находятся из условия для комплексной скорости (3.5):  $V(1) = 1$ . Записывая это условие отдельно для действительных и мнимых частей, получим систему уравнений для  $\varphi_0$  и  $\mu$

$$\mu e^{\mu_0} \Phi\left(\frac{z_0}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right) = 1 - \frac{8}{3}\varepsilon - 2\sqrt{\varepsilon} \mu\Psi\left(\frac{1}{\lambda}\right) - i \left( 2\sqrt{\varepsilon} + \mu\Psi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \\ \varphi_0 = -\arctg \frac{2\sqrt{\varepsilon} + \mu\Psi(1/\lambda)}{1 - 8/3\varepsilon - 2\sqrt{\varepsilon} \mu\Psi(1/\lambda)}, \quad \mu = \frac{1 - 8/3\varepsilon - 2\sqrt{\varepsilon} \mu\Psi(1/\lambda)}{\Phi(z_0/\lambda, 1/\lambda) \cos \varphi_0} \quad (3.6)$$

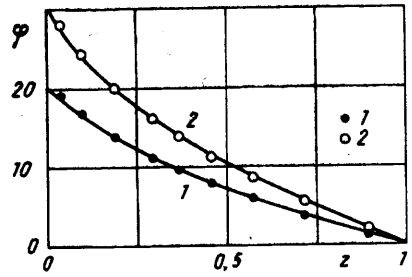
Из (3.6)  $\varphi_0$  и  $\mu$  находятся с помощью итерационного процесса, в котором за начальное приближение принимается  $\mu_0 = 1/\ln(1/z_0)$ .

Решение (3.5), (3.6) согласуется с асимптотиками (2.4) и (2.11) и поэтому равномерно пригодно во всей области изменения переменной  $z$ .

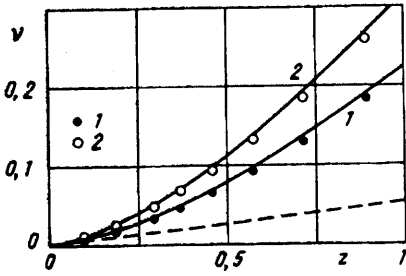
Более простые выражения для составного разложения решения можно получить



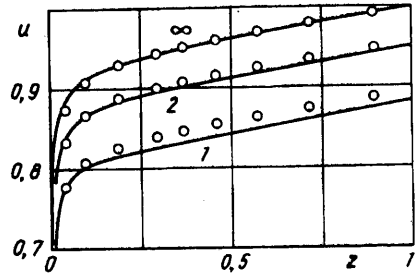
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

следующим образом. Запишем внешние разложения (2.13) и (2.14) для модуля скорости  $u$  и угла поворота  $\varphi$  в виде

$$u = 1 - \frac{2}{3} \varepsilon (1 - z) + 2\lambda \sqrt{\varepsilon} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{z + z_*}} \right) + \dots \quad (3.7)$$

$$\varphi = 2\sqrt{\varepsilon} (\sqrt{z + z_{**}} - \sqrt{1 + z_{**}}) + \dots$$

где  $z_*$  находится из условия  $u(0) = 0$ , а  $z_{**}$  — из условий срачивания с внутренним асимптотическим разложением (2.5); откуда вытекает

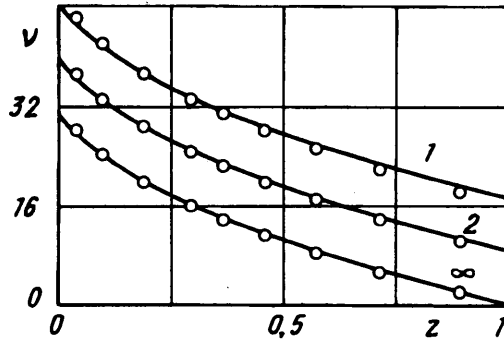
$$z_* = 4\varepsilon\lambda^2 / (1 - 2/3\varepsilon + 2\lambda\sqrt{\varepsilon})^2, \quad z_{**} = \lambda$$

Величины  $z_*$  и  $z_{**}$  являются малыми и поэтому внешние разложения (3.7) отличаются от (2.13) и (2.14) на малые более высокого порядка по сравнению с самыми малыми членами этих разложений. Кроме того, разложения (3.7) согласуются с внутренними разложениями для  $u$  и  $\varphi$ .

*Сравнение асимптотического и численного решений.* Численное решение краевой задачи (1.5), (1.6), (1.8) находилось по разностной неявной абсолютно устойчивой схеме второго порядка методом установления. Делалась замена переменной

$$z + z_0 = \exp(y), \quad dz = \exp(y) dy, \quad -1/\mu_0 \leq y \leq 0$$

Интервал  $y$  разбивался на  $N$  равных отрезков с промежуточными точками  $y_j = -1/\mu_0 + \Delta y \cdot j$ , где  $\Delta y = 1/(N\mu_0)$ . Значения скоростей  $V_j$  определялись в промежуточных точках  $y_j - \Delta y/2$ , а значения коэффициента вязкости  $\nu_j = |V_{j+1} - V_j|/\Delta y$  в точках  $y_j$  считались на предыдущем шаге по времени. Из соответствующей системы уравнений и граничных условий  $V_0' = -V_1'$ ,  $V_N' + V_{N+1}' = 2$  методом прогонки определялись значения скоростей  $V_j'$  на следующем шаге по времени. Шаг по времени выбирался из соображений максимальной скорости сходимости итерационного процесса  $\Delta t = 3\Delta y/\sqrt{\varepsilon}$ .



Фиг. 5

На фиг. 1, 2 и 3 изображены соответственно зависимости  $u(z)$ ,  $\varphi(z)$  и  $v(z)$  при  $\mu = 0,05$ . Цифрами 1 и 2 помечены зависимости, соответствующие  $\varepsilon = 0,05$  и  $0,1$ . Сплошными линиями обозначены решения, полученные по формулам (3.5) для  $u(z)$  и  $\varphi(z)$  и (2.15) для турбулентной вязкости  $v(z)$ , а точками 1, 2 — численные решения соответственно при  $\varepsilon = 0,05$  и  $0,1$ .

На фиг. 1 и 3 штриховой линией изображены зависимости  $u(z) = \mu_0 \ln((z+z_0)/z_0)$  и  $v(z) = \mu_0 z$ , соответствующие предельному решению при  $\varepsilon = 0$ . Как следует из фиг. 1 и 2, предельные решения при  $\varepsilon = 0$ , соответствующие классическому логарифмическому профилю, существенно отличаются от решения краевой задачи (1.5), (1.6), (1.8) даже при очень малых значениях  $\varepsilon$ .

4. Решение общей задачи. Асимптотическое решение общей краевой задачи (1.5)—(1.7) можно получить из найденного решения частной краевой задачи (1.5), (1.6), (1.8).

Пусть решение  $V(\varepsilon, z)$  общей краевой задачи (1.6) с параметром  $\varepsilon$  удовлетворяет условиям

$$V(\varepsilon, 0) = 0, \quad V(\varepsilon, 1) = se^{\theta}, \quad (4.1)$$

тогда это решение найдется из решения  $V^{\circ}(z, \varepsilon/s)$  краевой задачи (1.5)—(1.7) с параметром  $\varepsilon' = \varepsilon/s$  в следующем виде:

$$V(\varepsilon, z) = se^{\theta} V^{\circ}(z, \varepsilon/s) \quad (4.2)$$

Для доказательства (4.2) достаточно подставить его в уравнение (1.6) и разделить на  $s^2 e^{\theta}$ .

Таким образом, асимптотическое решение общей краевой задачи (1.6) можно найти с помощью (3.5), (3.7) и (4.2), заменив  $\varepsilon$  на  $\varepsilon/s$ ,  $\lambda$  на  $\lambda s$ .

Для производной в точке  $z = 1$  из (2.10) получим

$$\frac{dV}{dz} = i \sqrt{\frac{\varepsilon}{s}} + \frac{2\varepsilon}{3s} + \lambda s$$

Подставив эти значения в граничное условие (1.6) при  $z = 1$ , получим (с точностью до  $\lambda^2$ )

$$(1 - se^{\theta}) C' = e^{\theta} \sqrt{\varepsilon s} (i + 2/3 \sqrt{\varepsilon/s} + \lambda s)$$

Отсюда уравнение для  $\theta$  и  $s$  можно представить в виде

$$e^{-\theta} C' = s C' + i \sqrt{\varepsilon s} + 2/3 \varepsilon + \sqrt{\varepsilon} \lambda s^{3/2}$$

Параметры  $s$  и  $\theta$  можно найти с помощью итераций из следующих уравнений:

$$s = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon s}{C'}} - \frac{2/3 \varepsilon + \sqrt{\varepsilon} \lambda s^{3/2}}{C'}, \quad \theta = -\arcsin \frac{\sqrt{\varepsilon s}}{C'} \quad (4.3)$$

На фиг. 4 и 5 представлены зависимости  $u(z)$  и  $\varphi(z)$ : символами  $\infty$ , 2, 1, помечены графики, соответствующие  $C' = \infty$ , 2, 1. Значения  $\varepsilon$  и  $\mu$  для всех зависимостей выбраны одинаковыми:  $\varepsilon = 0,1$  и  $\mu = 0,05$ . Сплошные линии — аналитические зависимости, определяемые формулами (3.5), (3.6) и (4.2), (4.3); точки — результаты численного решения полной краевой задачи.

Из приведенных на фиг. 1—5 сравнений видно, что асимптотические и численные решения практически совпадают.

Подытоживая проведенные исследования, можно сделать следующий вывод. Отношение коэффициента турбулентной вязкости  $\nu$  (формула (2.15)) с учетом силы Кориолиса к  $\nu_0$ , определенного без учета силы Кориолиса, равно  $\nu/\nu_0 = (1 + z^2/\lambda^2)^{1/4}$ . Вблизи верхней границы пограничного слоя это отношение достигает величины  $\nu/\nu_0 \approx 1/\sqrt{\lambda} = \sqrt{\varepsilon}/\mu_0$  и тем больше, чем меньше параметр шероховатости  $\mu_0$ .

Таким образом, учет даже весьма малого параметра Кориолиса в рамках локальной теории турбулентности Прандтля в пограничном слое атмосферы приводит к существенному отличию характеристик турбулентного обмена от соответствующих характеристик в отсутствие силы Кориолиса. Этим, по-видимому, можно объяснить причину, по которой локальная теория турбулентности Прандтля не соответствует натурным наблюдениям и не применяется для количественного описания процессов теплообмена в атмосфере.

Авторы благодарят А. Г. Куликовского и А. А. Бармина за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
3. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
4. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.

Москва

Поступила в редакцию  
8.II.1994