

УДК 532.517.2:536.25

© 1995 г. А. П. ЗЫКОВ, Г. М. МАХВИЛАДЗЕ, В. И. МЕЛИХОВ, О. И. МЕЛИХОВ

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННО-КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ КУБЕ

На основе численного интегрирования уравнений Навье — Стокса в приближении Буссинеска проведено исследование естественной тепловой конвекции во вращающемся кубе, подогреваемом снизу, для трех значений числа Рэлея. Изучалось влияние скорости вращения на закономерности установления различных форм конвективных течений. Установлено существование нескольких типов конвективных движений, каждое из которых реализуется в своем диапазоне скорости вращения куба. Определены области существования различных типов. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными.

Вопросы конвективной устойчивости жидкости в областях различной формы рассматривались многими авторами (см. [1—4]). В полостях, подогреваемых снизу, конвекция возникает при превышении критического значения числа Рэлея. Наложение вращения повышает порог конвекции [1]. Для кубической полости проводились теоретические [5] и экспериментальные [6] исследования влияния вращения на величину критического числа Рэлея и характер конвективной неустойчивости. Однако закономерности надкритических течений (их формирование, типы, области существования, коэффициенты теплопередачи) ранее практически не исследовались.

1. Постановка задачи. Рассматривается движение вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости в замкнутой кубической полости $0 \leq x_i \leq L$, $i = 1; 2; 3$ (x_i — декартовы координаты), находящейся в поле силы тяжести и вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω . Ось вращения проходит через центры верхней и нижней граней куба; ускорение свободного падения направлено вдоль оси вращения.

Движение жидкости описывается системой уравнений Буссинеска во вращающейся системе координат [1]

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k u_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + 2\Omega \varepsilon_{i,k,3} u_k + \quad (1.2)$$

$$+ \Omega^2 (\delta_{i,3} \delta_{k,3} - \delta_{i,k}) (x_k - x_{0k}) \beta T' + \delta_{i,3} g \beta T'$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k T') = \chi \frac{\partial^2 T'}{\partial x_k \partial x_k} \quad (1.3)$$

где $x_{0k} = (x_{01}; x_{02}; x_3)$ — координаты точек оси вращения ($x_{01} = x_{02} = L/2$); t — время; u_i — проекция скорости на ось x_i ; $\rho = \text{const}$ — плотность; $p' = p - p_0$ — отклонение давления p от его начального распределения p_0 ; $T' = T - T_0$ — отклонение температуры T от ее начального значения T_0 ; Ω — угловая скорость

вращения полости; $g_k = -g\delta_{k,3}$ — ускорение свободного падения (g — его абсолютное значение); ν — кинематическая вязкость; χ — температуропроводность; β — коэффициент теплового расширения; $\varepsilon_{i,j,k}$ — единичный тензор Леви — Чивита; $\delta_{i,k}$ — символ Кронекера.

На границе полости Γ для скорости выполнены условия прилипания

$$u_i(x_k, t) = 0 \quad (x_i \in \Gamma)$$

Боковые стенки куба Γ , теплоизолированы, а верхняя грань поддерживается при начальной температуре

$$\partial T' / \partial n = 0 \quad (x_i \in \Gamma_i); \quad T(x_1, x_2, L, t) = T_0$$

На нижней грани после прогрева по определенному закону устанавливается температура T_b , которая на величину ΔT выше начальной. В работе использовались четыре закона прогрева нижней грани, которые ранее применялись при численном исследовании конвекции в неподвижном кубе [7]

$$T'(x_1, x_2, 0, t) = \Delta T \Theta(wt - x_1) \quad (1.4)$$

$$T'(x_1, x_2, 0, t) = \Delta T \Theta(wt - |2x_1 - L|) \Theta(wt - |2x_2 - L|) \quad (1.5)$$

$$T'(x_1, x_2, 0, t) = \Delta T \Theta(wt - |x_1 - x_2|) \quad (1.6)$$

$$T'(x_1, x_2, 0, t) = \Delta T \Theta(2wt - x_1 - x_2) \quad (1.7)$$

где Θ — функция Хевисайда; w — скорость распространения температурной волны.

В начальный момент времени среда неподвижна (во вращающейся системе координат). Кроме этого, отдельные режимы были рассчитаны, когда в качестве начального использовалось уже полученное для другой скорости вращения численное решение, при этом равномерно в течение времени $t_w = L/w$ менялась угловая скорость вращения до исследуемого значения.

При обезразмеривании задачи в качестве характерных значений длины, времени, скорости, отклонения температуры, отклонения давления были выбраны следующие величины: L — длина ребра куба; L^2/ν — время; L/ν — скорость; ΔT — перепад температуры между верхней и нижней гранью куба; $\rho\nu^2/L^2$ — масштаб динамического давления. Это привело к появлению в задаче следующих безразмерных параметров:

$$Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad Gr = \beta \Delta T \frac{gL^3}{\nu^2}, \quad D = \frac{2\Omega L^2}{\nu}, \quad Fr = \frac{\nu}{2L\sqrt{Lg}}$$

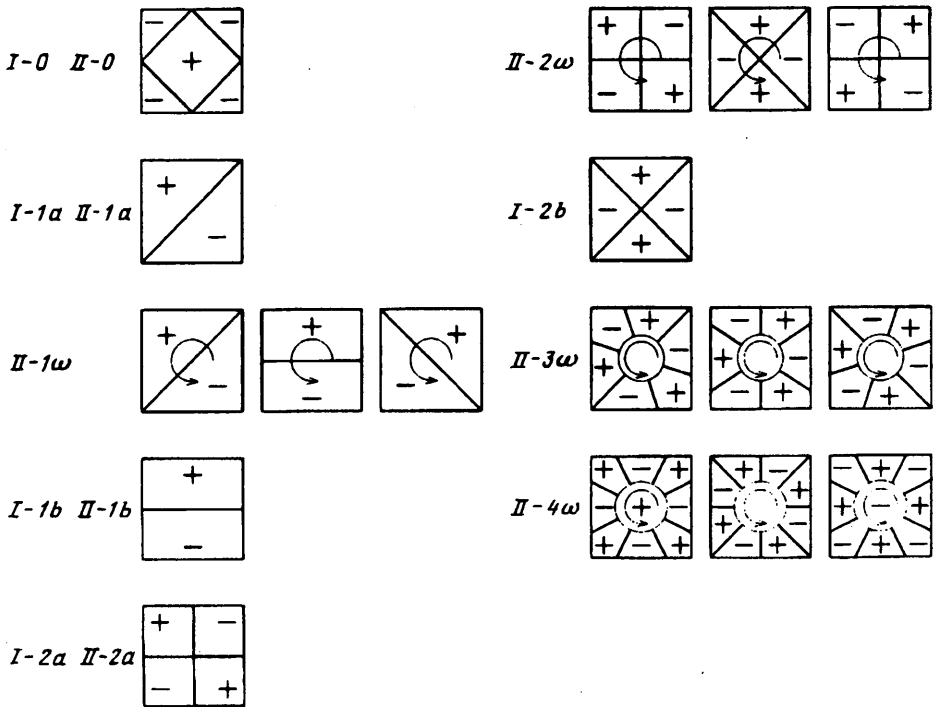
$$t^* = \frac{t_w \nu}{L^2}, \quad Ra = Pr Gr, \quad Ta = D^2$$

Здесь Pr — число Прандтля; Gr — число Грасгофа; D — вращательное число Рейнольдса; Fr — число Фруда; t^* — время действия внешних возмущений; Ra — число Рэлея; Ta — число Тейлора.

Для количественной характеристики исследуемых движений жидкости использовались величины безразмерного теплового потока через верхнее Nu_+ и нижнее Nu_- основания куба (числа Нуссельта), которые определялись следующим образом:

$$Nu_+(t) = Nu(L, t), \quad Nu_-(t) = Nu(0, t), \quad Nu(x_3, t) = -\frac{1}{L\Delta T} \int_0^L \int_0^L \frac{\partial T'}{\partial x_3} dx_1 dx_2$$

Основным критерием установления течения считалось равенство этих тепловых потоков.



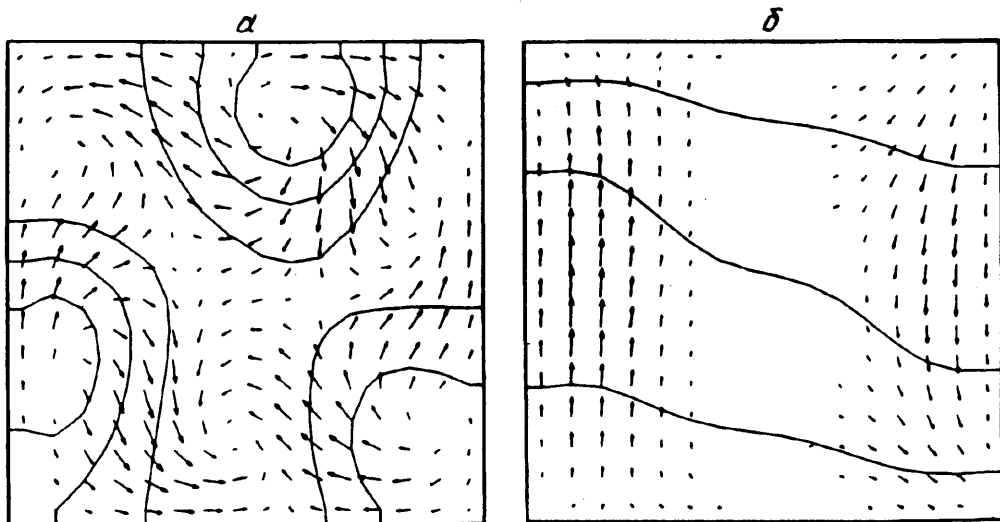
Фиг. 1

Поставленная задача решалась численно с помощью частично неявной конечно-разностной схемы, в основе которой лежит SMAC-метод в модификации, предложенной в [8]. Переход на новый временной слой осуществлялся в три этапа. На первом с помощью явной аппроксимации уравнений импульса (1.2) определялись предварительные значения скорости. На втором этапе с помощью итераций происходила совместная корректировка полей скорости и давления так, чтобы удовлетворялось уравнение неразрывности (1.1). При этом определялось давление на новом временном слое. На третьем этапе по явной схеме для уравнения (1.3) определялось распределение температуры с привлечением полученной на первых двух этапах скорости. Для пространственной аппроксимации уравнений использовалась «шахматная» сетка. При этом все скалярные величины определялись в центральных ее узлах, а компоненты векторных — в узлах, смещенных на половину шага по соответствующей оси.

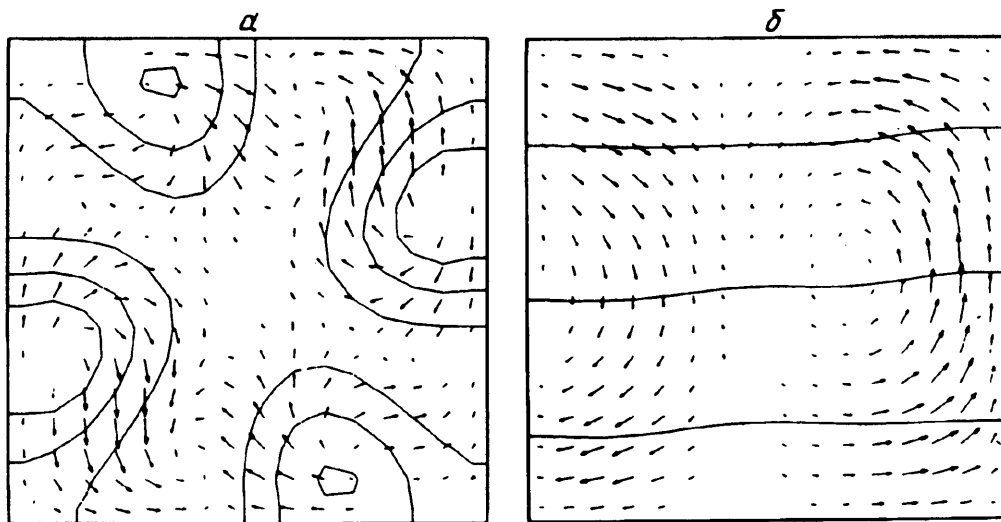
Расчеты проводились при следующих параметрах: $Pr = 6,75$; $Fr = 6,4 \cdot 10^{-4}$; $Gr = 1480, 2960, 5920$; $i^* = 0,7$ (соответствующие числа Рэлея $Ra = 10^4, 2 \cdot 10^4, 4 \cdot 10^4$). Значения вращательного числа Рейнольдса варьировались от нуля до величин, при которых конвективное движение затухает. Максимальное использованное значение D равнялось 1300.

Расчеты проводились на сетках $10 \times 10 \times 16$ ($Gr = 1480$), $16 \times 16 \times 16$ ($Gr = 2930$), $16 \times 16 \times 24$ ($Gr = 5920$). В первых двух случаях шаг по времени $\tau = 3,125 \cdot 10^{-4}$, а в третьем $\tau = 2,5 \cdot 10^{-4}$. Контрольные вычисления на более детальных сетках подтвердили достаточность выбранных параметров дискретизации, используемых в серийных расчетах.

2. Результаты расчетов. Формы надкритических движений в кубе. Расчеты, проведенные в исследованном диапазоне параметров, выявили несколько форм развивающихся надкритических движений. Все они были разделены на пять основных типов, отличавшихся друг от друга по количеству пар конвективных потоков у боковой поверхности. Пару составляют восходящий и нисходящий потоки, находящиеся у боковых стенок. На фиг. 1 изображены средние горизонтальные сечения куба с указанием областей восходящих (+) и нисходящих (—) потоков для каждого типа течения. Использованы следующие обозначения. Римские цифры I и II показывают отсутствие ($\Omega = 0$) и наличие ($\Omega \neq 0$) вращения



Фиг. 2



Фиг. 3

куба. Арабские цифры обозначают количество пар конвективных потоков у боковой поверхности куба. Формы I-0 и II-0 не содержат ни одной такой пары. В этих случаях жидкость поднимается в центре куба, а опускается возле боковых граней (конвективная колонка). Этот тип движения был получен при прогреве нижней грани куба по закону (1.5).

При отсутствии вращения обнаружены еще два типа надкритических движений, каждый из которых реализуется в двух режимах. Первый из них содержит одну конвективную пару и включает в себя формы I-1a и I-1b. Форма I-1a представляет собой конвективный вал с подъемным и опускным течением возле противоположных боковых двугранных углов куба. Такой же конвективный вал, но повернутый на угол $\pi/4$, классифицируется как форма I-1b. Этот тип движения был получен при прогреве нижней грани куба по закону (1.4). Второй тип

содержит две конвективные пары и включает формы I-2a и I-2b. При этом конвективные потоки расположены в двухгранных углах (I-2a) или у боковых граней (I-2b). Первая из них возникает при прогреве по закону (1.6), вторая при выбранных параметрах получена не была, однако факт устойчивого существования такой формы течения при других параметрах отмечен в [9].

Все упомянутые выше течения стационарны. Отметим, что данные формы для случая $\Omega = 0$ детально исследованы в [9].

Вращение куба расширяет спектр наблюдаемых форм надкритических конвективных движений. Наряду с течениями, аналогичными зафиксированным при $\Omega = 0$ (II-0, II-1, II-2), реализуются и течения с тремя и четырьмя парами вертикальных конвективных потоков у боковой стенки (II-3, II-4). Естественно, теперь конвективные потоки закручиваются силой Кориолиса и поэтому отличаются от движений в покоящемся кубе. Форма II-0 могла быть только стационарной, в то время как формы II-1 и II-2 наблюдались не только стационарными (II-1a, II-1b, II-2a), но и допускали нестационарный режим (II-1 ω , II-2 ω). Формы же II-3 и II-4 были исключительно нестационарными. Характер нестационарности для движений всех типов был одинаковым: восходящие и нисходящие конвективные потоки перемещались со временем вдоль боковой поверхности куба в направлении, обратном направлению вращения. В неподвижной системе координат эти потоки поворачивались вокруг оси вращения в ту же сторону, что и куб, но с меньшей угловой скоростью. Это схематично показано на фиг. 1. Временные зависимости характеристик конвекции в таких режимах имеют периодический вид.

Нестационарный режим во вращающемся кубе типа II-1 ω объединяет в себе оба стационарных (I-1a и I-1b) в отсутствие вращения. Точно так же движение II-2 ω включает в себя формы I-2a и I-2b.

Движение II-3 ω отличается тем, что в центре куба вдоль оси вращения существует область, в которой жидкость не участвует в конвективном движении, а вращается с полостью. На фиг. 2, а показаны изотермы и поле скорости в сечении куба $x_3 = 0,03$, а на фиг. 2, б — в сечении $x_2 = 0,47$.

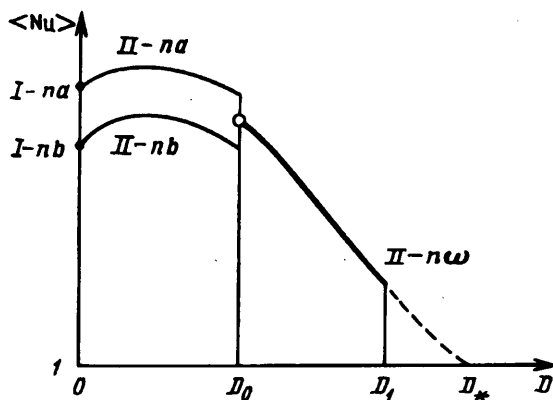
Для движения II-4 ω радиальный размер этой области больше, но в этом случае жидкость в центре двигается, периодически меняя направление, причем так, что оно совпадает с направлением движения в углах куба. На фиг. 3 показаны изотермы и поле скорости для этого движения в момент времени, соответствующий среднему положению на фиг. 1: фиг. 3, а — в сечении $x_3 = 0,03$; 3, б — в сечении $x_2 = 0,47$.

В целом с увеличением скорости вращения движение в полости усложняется от II-0 к II-4, а перенос тепла жидкостью происходит во все более тонком пристеночном слое.

3. Области существования различных типов конвективных движений. Результаты исследований, проведенных как в данной работе, так и в работах [7, 9], показали, что для некоторого набора параметров задачи существует одна или несколько устойчивых форм движений среды, и каким бы образом ни возбуждалась конвекция, в результате возникает одно из этих течений.

Каждому из конвективных движений, формы которых обсуждались выше, при фиксированных параметрах соответствует свое значение числа Нуссельта. В связи с этим существование и устойчивость того или иного решения при различных скоростях вращения куба удобно иллюстрировать на графике зависимости числа Нуссельта Nu от вращательного числа Рейнольдса D . Для нестационарных форм движения число Нуссельта является периодической функцией от времени. Поэтому рассматривалась зависимость среднего за период значения теплового потока $\langle Nu \rangle$ от D .

В выбранном диапазоне параметров было обнаружено пять различных типов решения рассматриваемой задачи. Общая картина реализации того или иного режима для некоторого типа решения, имеющего $n \neq 0$ пар конвективных потоков



Фиг. 4

у боковой поверхности, представлена на качественном графике зависимости $\langle Nu \rangle = f_n(D)$ на фиг. 4. Различные стационарные режимы для одного и того же типа решения могут существовать при одних и тех же параметрах в интервале вращательных чисел Рейнольдса от 0 до D_0 , причем движения в отсутствие вращения I-n есть частные случаи движений с вращением II-n. На фиг. 4 кривые, описывающие эти режимы, изображены тонкими линиями. Точка D_0 является точкой бифуркации решения, в которой оба стационарных режима объединяются в один нестационарный. Вращательный режим может существовать в интервале от D_0 до значения D_* , при котором рассматриваемое движение затухает и число Нуссельта становится равным единице.

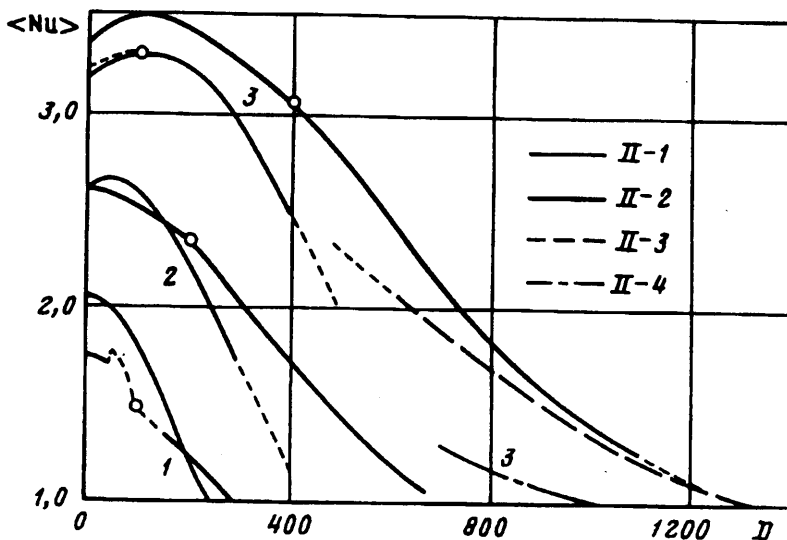
Для определенных параметров стационарные режимы при вращении куба вообще не существуют. В этом случае наложение даже слабого вращения на любое из движений I-n приводит к режиму II-n ω . Наблюдались ситуации, когда либо существует одно из стационарных движений II-na и II-nb, либо одно из них квазиустойчиво и через некоторое время перестраивается в другое. Вообще, решение может оказаться квазиустойчивым в некотором интервале чисел D (на фиг. 4 изображено пунктиром). Область квазиустойчивости может существовать в том случае, когда при этих же параметрах существует устойчивое решение другого типа.

Для движения типа II-0 кривая зависимости $Nu(D)$ не имеет точки бифуркации, а поэтому не раздваивается и является непрерывной.

Результаты проведенных расчетов представлены на фиг. 5. Кривые 1, 2, 3 получены соответственно при $Gr = 1480, 2960, 5920$. Здесь, как и на фиг. 4, пунктирными линиями обозначены участки квазиустойчивости и кружками показаны точки бифуркации решений. Сплошные линии, а также штриховая соответствуют устойчивым движениям. Для того чтобы не загромождать рисунок, кривые, отвечающие движению II-0, не нанесены.

При $Gr = 1480$ обнаружено три типа решений: II-0, II-1 и II-2. Для решения II-1 всегда существует и устойчив только нестационарный режим II-1 ω , точка затухания $D_* = 240$. Для движения II-2 $D_0 = 100$. При $D < D_0$ реализуется стационарный режим II-2a. Для данного решения существует квазиустойчивый участок в области точки бифуркации при значениях D от 40 до D_0 . Переход через границу устойчивости для режима II-2a при $D = 40$ приводит к излому на зависимости $\langle Nu \rangle = f_2(D)$. Решение этого типа затухает при $D_* = 280$. Эта точка соответствует порогу конвекции для данного значения числа Грасгофа. Движение типа II-0 всегда было квазиустойчивым.

Рассмотрим режимы движения при $Gr = 2960$. Для движения II-1 по-прежнему не существует стационарных режимов. Режим II-1 ω устойчив при $0 < D < 300$,



Фиг. 5

при $D \geq 300$ квазиустойчив, а при $D > 400$ вообще не обнаружен. Для движения типа II-2 $D_0 = 200$, $D_* = 660$. В этом случае квазиустойчивый участок отсутствует. Порог конвекции, как и в предыдущем случае, определяется движением II-2 ω . Движение II-0 также квазиустойчиво.

При $Gr = 5920$ общая картина существования режимов усложняется. Движение II-0 в этом случае не обнаружено, но существуют движения II-3 и II-4. Для решения типа II-1 найдены стационарные режимы. При этом в интервале D от 0 до $D_0 = 100$ существуют оба стационарных режима. Квазиустойчивый режим II-1а был получен прогревом нижней грани по закону (1.7). Для движения II-2 имеет место участок квазиустойчивости в диапазоне $1100 \leq D \leq D_* = 1300$. В этом случае данная кривая проходит выше кривой, соответствующей движению II-1, не пересекаясь с ней. Порог конвекции теперь определяется движением II-3, для которого стационарные решения не обнаружены. Для этого движения при $500 < D < 600$ наблюдался квазиустойчивый участок. При $D_* = 1300$ движение затухает. Решение типа II-4 было обнаружено только квазиустойчивым в режиме II-4 ω при D от 700 до 1000.

Проведенные расчеты позволили определить критические значения чисел Рэлея. Значения вычисленных критических чисел Рэлея Ra_n^* и полученных в экспериментальной работе [6] Ra_e^* для трех значений D приведены ниже:

D	280	620	1250
Ra_n^*	10^4	$2 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$
Ra_e^*	$1,3 \cdot 10^4$	$2,5 \cdot 10^4$	$4,8 \cdot 10^4$

Следует также отметить, что влияние центробежной силы на формирование течений было незначительным и, как подтвердили дополнительные расчеты, ею можно пренебречь.

Таким образом, проведенные расчеты показали, что при наложении вращения естественно-конвективные движения в кубе более разнообразны, чем при $\Omega = 0$, причем при увеличении скорости вращения движения все более усложняются. Вычисленные границы возникновения конвекции, хорошо совпавшие с экспери-

ментальными, подтвердили вывод, что вращение стабилизирует движение и отодвигает порог конвекции в сторону больших значений чисел Рэлея.

Авторы выражают благодарность Б. И. Нигматулину за предоставление возможности выполнения данной работы, поддержку и проявленный интерес.

Авторы благодарят Научный Совет по Технике и Физическим Исследованиям (Великобритания) за оказанную поддержку (проект № GR/J85035).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1979. 386 с.
3. Полежаев В. И., Бунз А. В., Везуб Н. А. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье — Стокса. М.: Наука, 1987. 271 с.
4. Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. М.: Мир, 1991. 528 с.
5. Шлиомис М. И. Об устойчивости вращающейся и подогреваемой снизу жидкости относительно периодических по времени возмущений//ПММ, 1962. Т. 26. № 2. С. 267—272.
6. Овчинников А. П., Шайдуров Г. Ф. Стабилизация конвективной устойчивости жидкости в кубической полости вращением//ПМТФ. 1968. № 6. С. 129.
7. Щербак С. Б. Численное исследование различной формы конвективных движений газа в кубической полости, подогреваемой снизу//Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 21—26.
8. Hirt C. W., Cook J. L. Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain//J. Comput. Phys. 1972. № 10. P. 324—340.
9. Любимов Д. В., Путин Г. Ф. Надкритические движения в кубической полости//Гидродинамика. Вып. 10. Пермь, 1977. С. 15—26.

Москва

Поступила в редакцию
16.III.1994