

УДК 532.517

© 1995 г. М. В. УСТИНОВ

ВЛИЯНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ СКОРОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Методом прямого численного моделирования исследуется ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое с искусственно созданной периодической вдоль размаха неоднородностью профиля скорости. Показано, что наличие неоднородности приводит к замедлению роста неустойчивых возмущений и затягиванию ламинарно-турбулентного перехода.

В настоящее время установлено, что наличие малой периодической вдоль размаха стационарной неоднородности профиля скорости в пограничном слое ускоряет возникновение трехмерных возмущений на заключительной нелинейной стадии ламинарно-турбулентного перехода. Возрастание этих возмущений приводит к картине течения, характерной для клебановского типа перехода [1, 2].

В отличие от нелинейной стадии перехода, на которой неоднородность ускоряет турбулизацию течения, воздействие неоднородности на развитие неустойчивых возмущений на линейной стадии перехода может оказаться стабилизирующим. Механизм такого воздействия заключается в порождении плоской волны при взаимодействии с неоднородностью пары косых волн неустойчивости. При достаточно малом периоде неоднородности эти косые волны имеют большое поперечное волновое число и являются сильно затухающими. В этом случае взаимодействие волны Толлмина — Шлихтинга с неоднородностью вызывает передачу энергии от нее к косым волнам, которые интенсивно рассеивают энергию. Отток энергии от плоской волны может привести к замедлению роста последней или даже к ее затуханию.

С другой стороны, возможно и дестабилизирующее воздействие неоднородности, связанное с появлением локальных зон с перегибным профилем скорости. Поэтому исследование ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое с периодической неоднородностью скорости с целью определения направления воздействия последней на ламинарно-турбулентный переход представляется достаточно интересным. В данной работе такое исследование проводится с помощью прямого численного моделирования процесса перехода.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание плоской пластины потоком вязкой несжимаемой жидкости. Предположим, что в результате некоторого воздействия (периодически расположенных бугров и впадин, вдува и отсоса жидкости и т. д.) на расстоянии L от передней кромки созданы периодически чередующиеся вдоль размаха полосы с повышенной и пониженной скоростью в пограничном слое. Будем исследовать ламинарно-турбулентный переход в таком течении.

Из эксперимента известно, что развитие возмущений, приводящих к турбулизации течения, происходит при распространении последних в направлении потока. Однако для прямого численного моделирования ламинарно-турбулентного перехода удобнее считать течение периодическим по пространственным координатам и рассматривать развитие возмущений по времени. Результаты такого моделирования не допускают прямого количественного сравнения с экс-

периментом, но общие закономерности при развитии возмущений по пространству и по времени одинаковы.

С целью численного моделирования перехода в пограничном слое с периодической стационарной неоднородностью скорости в качестве начальных условий выберем состояние течения на расстоянии L от передней кромки. Оси декартовой системы координат X , Y и Z направим в направлении потока, параллельно передней кромке пластины и по нормали к ее поверхности. В качестве масштабов для координат и скорости выберем толщину вытеснения пограничного слоя $\delta^* = 1,72 \sqrt{\nu L / u_\infty}$ и скорость набегающего потока u_∞ . Для описания течения будем использовать уравнения Навье — Стокса, записанные в форме Громеки — Лэмба

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + [\text{rot } \mathbf{V} \times \mathbf{V}] = -\text{grad } \Pi + \mathbf{F} + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{V} \quad (1.1)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0$$

$$\mathbf{V}(x, y, 0) = 0, \quad \mathbf{V}(x, y, \infty) = \{1, 0, 0\}$$

$$\Pi = p + \frac{(\mathbf{V}, \mathbf{V})}{2}, \quad R = \frac{u_\infty \delta^*}{\nu}$$

Здесь $\mathbf{V} = \{U_0(z) + u, v, w\}$ — вектор скорости, $U_0(z)$ — профиль скорости в пограничном слое Блазиуса, u, v, w, p — пульсации составляющих скорости и давления. Внешняя сила $\mathbf{F} = \{-R^{-1} d^2 U_0 / dz^2, 0, 0\}$ при отсутствии начальных возмущений обеспечивает сохранение плоскопараллельного течения с профилем скорости, соответствующим пограничному слою Блазиуса. Течение будем считать периодическим в направлении осей X и Y с периодами $X = 2\pi/\alpha$ и $Y = 2\pi/\beta$ соответственно. Период в направлении размаха выберем совпадающим с периодом стационарных возмущений скорости.

В качестве начальных условий при $t = 0$ зададим распределение скорости, при котором u, w, Π являются четными, а v — нечетной функциями y . Учитывая, что такая симметрия течения сохраняется в ходе дальнейшего развития возмущений [3], решение (1.1) ищем в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ w \\ \Pi \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^N \left\{ \begin{pmatrix} u_{0n} \\ w_{0n} \\ p_{0n} \end{pmatrix} (z, t) + \sum_{m=1}^M \left[\begin{pmatrix} u_{mn} \\ w_{mn} \\ p_{mn} \end{pmatrix} (z, t) e^{i m \alpha (x - c(t)t)} + (\text{с. с.}) \right] \right\} \cos n \beta y \quad (1.2)$$

$$v = \sum_{n=1}^N \left\{ v_{0n}(z, t) + \sum_{m=1}^M [v_{mn}(z, t) e^{i m \alpha (x - c(t)t)} + (\text{с. с.})] \right\} \sin \beta y$$

Здесь (с. с.) означает выражение, комплексно сопряженное первому слагаемому. Такое представление решения в виде набора волн, имеющих общую фазовую скорость $c(t)$, удобно для моделирования ламинарно-турбулентного перехода, так как оно обеспечивает медленное изменение амплитудных функций $u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, p_{mn}$ с течением времени.

Полученная после подстановки (1.2) в уравнения Навье — Стокса (1.1) система уравнений для амплитудных функций решалась численно. Для аппроксимации решения по времени применялась абсолютно устойчивая в линейном приближении итерационная разностная схема. Фазовая скорость $c(t)$ находилась в ходе решения из условия обеспечения наиболее медленной зависимости амплитудных функций от времени. Используемый здесь численный метод подробно описан в [4]. В отличие от [4], где исследовалось течение в плоском канале, для представления решения по переменной z использовалось разложение в ряд по функциям $F_l = z e^{-z/2} L_l^{(0)}(z)$, $l = 0, 1, \dots, Q-1$, где $L_l^{(0)}(z)$ — полиномы Лаггера. Для

дискретизации уравнений применялся метод коллокаций. В качестве узлов коллокации использовались нули полинома $L_Q^{(0)}(z)$, число узлов $Q = 41$.

Для моделирования развития волн неустойчивости в пограничном слое с периодической неоднородностью скорости в начальный момент времени задавались ненулевые гармоники с индексами $m = 0, n = 1$ и $m = 1, n = 0$, соответствующие периодической неоднородности скорости и плоской волне неустойчивости. Профили пульсаций составляющих скорости в волне неустойчивости $u_{10}(z, 0)$ и $w_{10}(z, 0)$ естественно задать с помощью собственной функции уравнения Орра — Зоммерфельда, соответствующей заданному α .

В связи с тем что моды дискретного спектра уравнения Орра — Зоммерфельда при $\alpha = 0$ отсутствуют, выбор формы начального распределения скорости для гармоники, описывающей периодическую неоднородность, не так очевиден. С целью выбора этих начальных условий рассмотрим задачу о развитии таких возмущений по времени в параллельном течении с профилем Блазиуса. Предполагая периодические неоднородности малыми, представим составляющие скорости в виде

$$u = \varepsilon u_b(z, t) \cos \beta y, \quad v = \varepsilon v_b(z, t) \sin \beta y, \quad w = \varepsilon w_b(z, t) \cos \beta y$$

После подстановки этих выражений в (1.1) и линеаризации по ε получим систему двух уравнений для w_b и u_b

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial z^2} - \beta^2 w_b \right) = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial z^2} - \beta^2 w_b \right) - \beta^2 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial z^2} - \beta^2 w_b \right) \right] \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u_b}{\partial t} + \frac{dU_0}{dz} w_b = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial^2 u_b}{\partial z^2} - \beta^2 u_b \right]$$

$$u_b(0, t) = w_b(0, t) = u_b(\infty, t) = w_b(\infty, t) = 0$$

Поперечная компонента скорости v_b может быть найдена после решения (1.3) из уравнения неразрывности

$$v_b = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial w_b}{\partial z}$$

Решение (1.3) с начальными условиями общего вида

$$u_b(z, 0) = u_0(z), \quad w_b(z, 0) = w_0(z)$$

удобно представить в виде суммы решений двух задач: задачи с нулевыми начальными условиями для w_b и задачи с нулевыми условиями для u_b . Первая задача описывает развитие возмущений, имеющих только продольную компоненту скорости. Ее решение $u_{b1}(z, t)$ легко находится аналитически и имеет вид

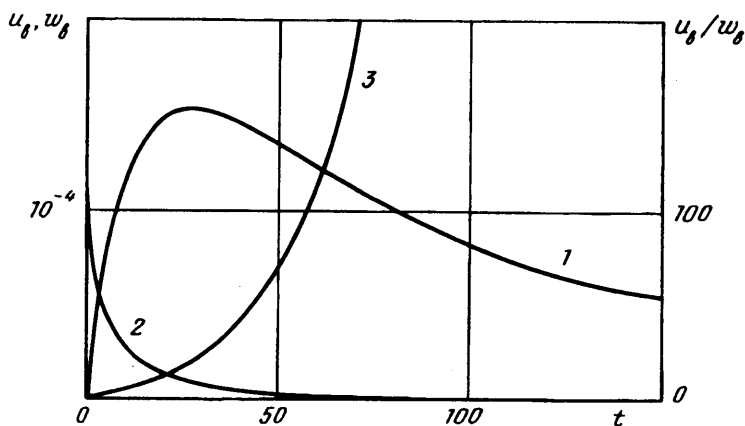
$$u_{b1}(z, t) = \int_0^\infty u_0(\xi) \Phi(z, \xi, t) d\xi,$$

$$\Phi(z, \xi, t) = \sqrt{\frac{R}{4\pi t}} (e^{-R(z-\xi)^2/4t} - e^{-R(z+\xi)^2/4t}) e^{-\beta^2 t/R} \quad (1.4)$$

Вторая задача с ненулевыми начальными условиями для w_b значительно сложнее. Выполненные в [5] исследования показали, что для ее решения в случае неограниченного течения невязкой жидкости с линейным профилем скорости справедливы оценки

$$u_b(z, t) = O(t), \quad w_b(z, t) = O(1)$$

Наличие вязкости приводит к тому, что решение для w_b становится затуха-



Фиг. 1

ющим, а для u_b достигает максимума при $t \sim R$, а затем также затухает. С целью исследования развития подобных возмущений в пограничном слое изложенным выше методом было рассчитано развитие возмущений для начальных условий, заданных соотношением

$$w_b(0) = A \exp \left\{ - \left(\frac{z - z_0}{\delta} \right)^2 \right\}$$

Результаты, полученные при $R = 2000$, $z_0 = 1,72$, $\delta = 0,3$, $\beta = 0,4$, $A = 10^{-4}$ в виде зависимостей возмущений продольной u_b и поперечной w_b составляющих скорости от времени t , показаны кривыми 1 и 2 на фиг. 1. Из фигуры видно, что в случае течения в пограничном слое максимум u_b достигается не при $t \sim R$, а значительно раньше, при $t \approx 30$. Интересно отметить, что в пристеночном течении отношение продольной и поперечной компонент возмущений скорости (кривая 3 на фиг. 1) растет значительно быстрее, чем для неограниченного течения, где $u_b/w_b \sim t$. Это, вероятно, связано с более сильным демпфирующим воздействием стенки на поперечную компоненту скорости.

После достижения максимума продольная составляющая скорости затухает по закону, близкому к (1.4), а поперечная компонента становится пренебрежимо малой по сравнению с продольной. Таким образом решение задачи с ненулевыми начальными условиями для w_b качественно отличается от решения (1.4) только на коротком начальном отрезке $t < 100$. Как будет показано ниже, влияние неоднородности на устойчивость пограничного слоя наблюдается до $t \sim 1000-1500$. Поэтому, пренебрегая начальным участком, будем считать, что для качественного описания влияния произвольных периодических неоднородностей на ламинарно-турбулентный переход достаточно исследовать возмущения вида (1.4).

В дальнейшем для задания начальных условий использовалось распределение скорости, задаваемое фундаментальным решением (1.4)

$$u_{01}(z, 0) = A \frac{\Phi(z_0, z, t_0)}{\max_z \Phi(z_0, z, t_0)}, \quad v_{01}(z, 0) = w_{01}(z, 0) = 0$$

При введенной здесь нормировке A имеет смысл начальной амплитуды скорости гармоник с $m = 0$, $n = 1$, параметры z_0 и t_0 определяют положение максимума скорости по z и его ширину.

2. Результаты расчетов. Для проведения расчетов выбрано число Рейнольдса $R = 2000$, близкое к значению, при котором достигается абсолютный максимум инкрементов нарастания волн неустойчивости. Параметры, задающие неоднородность скорости, выбирались с целью достижения стабилизирующего влияния

неоднородности во всем диапазоне волновых чисел α . Поперечное волновое число для этого должно быть выбрано так, чтобы выполнялись два условия: косые волны с параметрами α, β как можно сильнее затухали при всех α , соответствующих неустойчивым прямым волнам, и фазовые скорости прямой и косой волны по возможности были близки между собой. Близость фазовых скоростей необходима для эффективного порождения косых волн при взаимодействии прямой волны с неоднородностью.

Эти два условия являются противоречивыми, так как для выполнения первого из них требуются большие, а для второго — малые значения β . Задаваемое в последующих расчетах значение $\beta = 0,4$ близко к минимальному, обеспечивающему затухание косых волн. Параметры, задающие начальное распределение неоднородностей скорости по z , во всех последующих расчетах были $z_0 = 1,72$, $t_0 = 125$.

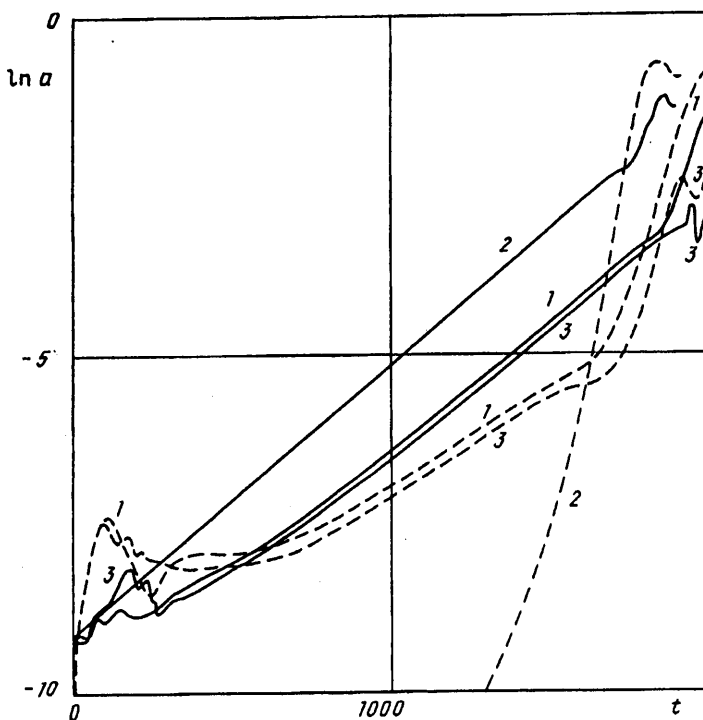
Для исследования влияния периодической неоднородности на развитие возмущений была проведена серия расчетов при выбранных выше параметрах неоднородности и различных значениях волнового числа плоской волны $\alpha = 0,1, 0,15, 0,2, 0,25, 0,275, 0,3$. В этих расчетах для описания пульсаций скорости использовалось представление (1.2) с $M = 1$ и $N = 1$. Такая простейшая модель включает в себя все гармоники, существенно влияющие на процесс перехода в линейной и начале нелинейной стадии: плоскую волну неустойчивости (гармоника с $m = 1, n = 0$), периодическую неоднородность профиля скорости (гармоника с $m = 0, n = 1$) и пару наклонных волн (гармоника с $m = 1, n = 1$). Начальная амплитуда пространственной неоднородности в данной серии расчетов выбиралась достаточно большой ($a_{01}(0) = 0,2$), чтобы обеспечить заметное влияние неоднородности на процесс перехода, а начальная амплитуда плоской волны достаточно малой ($a_{10}(0) = 10^{-4}$) для обеспечения линейности развития возмущений на начальном этапе ламинарно-турбулентного перехода.

Здесь используются следующие определения амплитуды a_{mn} и энергии E_{mn} гармоники с индексами m и n :

$$a_{mn} = \frac{1}{2} \max_z |u_{mn}(z)|, \quad E_{mn} = \int_0^\infty (|u_{mn}|^2 + |v_{mn}|^2 + |w_{mn}|^2) dz$$

Результаты типичного расчета при $\alpha = 0,25$ в виде зависимостей амплитуд прямой волны a_{10} и косых волн a_{11} от времени t показаны сплошной и штриховой кривыми 1 на фиг. 2. Для сравнения на этой фигуре кривыми 2 показаны аналогичные зависимости для пограничного слоя без искусственно созданных неоднородностей скорости. Эти зависимости соответствуют начальным амплитудам $a_{10}(0) = 10^{-4}$, $a_{01}(0) = 10^{-4}$.

Малая начальная неоднородность скорости моделирует фоновые возмущения, которые всегда присутствуют в реальном потоке. На начальном этапе развития волны неустойчивости наличие малой неоднородности никак не проявляется и зависимость $\ln a_{10}(t)$, показанная сплошной кривой 2, является линейной с углом наклона, определяемым мнимой частью собственного значения уравнения Орра — Зоммерфельда. При наличии искусственной неоднородности (кривые 1) после короткого переходного процесса (до $t \sim 150$) нарастание плоской волны существенно замедляется. В дальнейшем по мере уменьшения амплитуды неоднородности ее влияние постоянно ослабевает, что проявляется в приближении скорости роста основной волны к значению, предсказанному линейной теорией. При этом косые волны также нарастают, но их относительная амплитуда a_{11}/a_{10} уменьшается. Корреляция между скоростью роста плоской волны и относительной амплитудой косых волн подтверждает высказанное ранее предположение о том, что нарастание



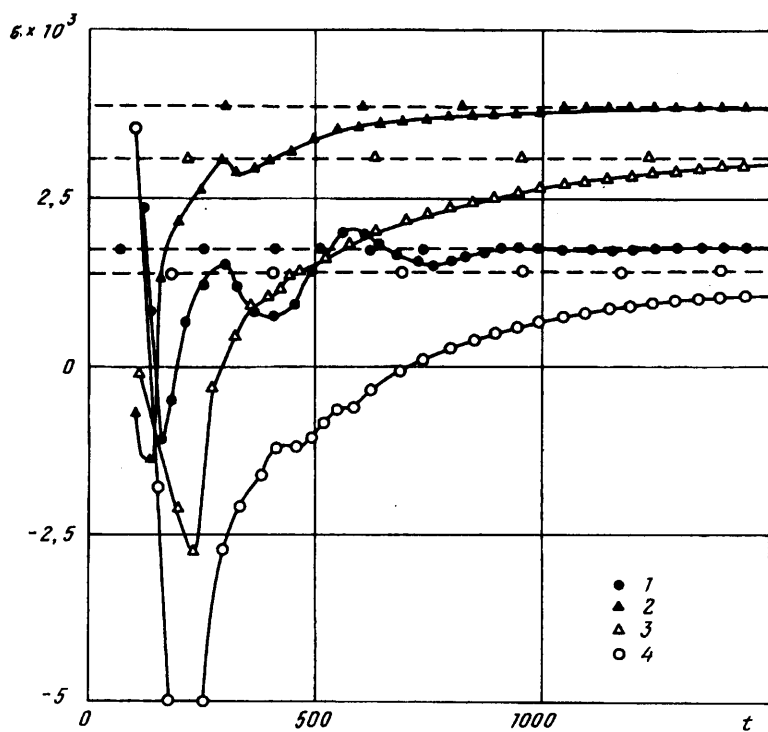
Фиг. 2

плоской волны ослабляется в результате передачи ее энергии косым волнам. В целом на линейной стадии ламинарно-турбулентного перехода искусственная неоднородность задерживает развитие волны неустойчивости. На нелинейном этапе, начинающемся после достижения амплитудой плоской волны порогового значения $a_{10} \sim 0,01$, искусственная неоднородность ускоряет формирование трехмерных возмущений, что приводит к обратному эффекту уменьшения времени перехода.

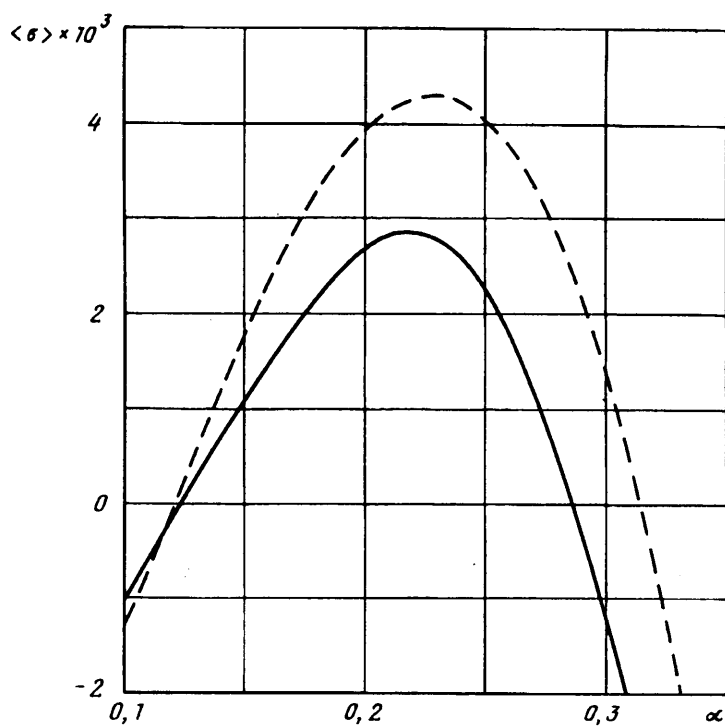
В сумме неоднородность приводит к увеличению времени перехода на $\Delta t \sim 200$, хотя это значительно меньше отставания развития возмущений к концу линейного этапа $\Delta t \sim 350$. Положение перехода здесь определялось как точка максимума $a_{11}(t)$, которая почти совпадает с максимумом пульсаций скорости. Простейшая модель с $M = N = 1$ в (1.2) не дает адекватного описания нелинейных процессов, непосредственно предшествующих переходу, поэтому она не может применяться для точного определения положения перехода. Однако сдвиг перехода в результате воздействия различных факторов, вероятно, может быть найден из этой модели.

С целью исследования влияния высших гармоник был повторен расчет развития плоской волны с $\alpha = 0,25$ в пограничном слое с неоднородностью скорости для большего числа гармоник $M = N = 7$ в представлении для скорости (1.2). Зависимости $a_{01}(t)$ и $a_{11}(t)$, полученные в этом расчете (сплошная и штриховая кривые 3), на протяжении большей части времени развития возмущений очень близки к аналогичным результатам при $M = N = 1$. Заметное расхождение наблюдается только на коротком начальном участке и непосредственно перед турбулизацией течения, когда вклад высших гармоник становится существенным.

Результаты моделирования с большим числом гармоник также показывают, что, несмотря на большую амплитуду начальной неоднородности скорости, высокочастотная неустойчивость, связанная с перегибным профилем в локальных зонах с относительно малой скоростью, не наблюдается. Если бы такая неустой-



Фиг. 3



Фиг. 4

чивость имела место, то она привела бы к быстрому нарастанию высших гармоник и ранней турбулизации течения.

Результаты расчетов при других волновых числах α , относящиеся к линейному этапу развития возмущений при наличии неоднородности, показаны на фиг. 3 и 4. На фиг. 3 изображены зависимости скорости нарастания плоской волны $\sigma = 1/2 (d \ln E_{10}/dt)$ от времени t , полученные при $\alpha = 0,15, 0,2, 0,275, 0,3$ (точки 1—4 соответственно). Штриховые прямые, параллельные оси абсцисс, показывают инкременты нарастания волн Толлмина — Шлихтинга в течении Блазиуса при этих α (обозначения аналогичны). На фиг. 3 видно, что после переходного периода до $t = 100$ (на фигуре не показанного из-за хаотических зависимостей $\sigma(t)$) наблюдается значительное снижение скоростей роста возмущений, которые, достигнув минимума, медленно возрастают до своих значений в невозмущенном течении Блазиуса. Влияние неоднородностей наиболее сильно проявляется для возмущений с большими волновыми числами $\alpha = 0,275$ и $0,3$, соответствующими окрестности верхней ветви нейтральной кривой.

Для количественной оценки влияния неоднородности будем рассматривать среднюю скорость роста плоской волны за время T , которую обозначим $\langle \sigma \rangle$

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\ln E_{10}(T) - \ln E_{10}(0)}{2T}$$

На фиг. 4 сплошной кривой показана зависимость $\langle \sigma \rangle$ за время $T = 500$ от волнового числа α . Для сравнения штриховой кривой изображена аналогичная зависимость инкрементов нарастания волны Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое Блазиуса. Изображенные на фиг. 4 результаты наглядно показывают, что снижение скорости роста волн неустойчивости максимально в окрестности верхней ветви нейтральной кривой и постепенно убывает с уменьшением α . Наиболее эффективное подавление роста возмущений вблизи верхней ветви нейтральной кривой объясняется близостью фазовых скоростей плоской и косой волн и относительно сильным затуханием последней. Оба этих фактора способствуют эффективному рассеянию энергии плоской волны. По мере уменьшения α разница фазовых скоростей волн растет, что ухудшает их взаимодействие, и затухание косых волн ослабляется. В результате в окрестности нижней ветви нейтральной кривой подавление роста волны неустойчивости становится неэффективным.

Полученные результаты показывают, что искусственная периодическая неоднородность профиля скорости при малом уровне начальных возмущений оказывает стабилизирующее влияние и может привести к значительному увеличению длины ламинарного участка пограничного слоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Herbert T. Three-dimensional phenomena in the transitional flat-plate boundary layer//AIAA Paper. 1985. № 489. 10 p.
2. Singer B., Reed H. L., Ferziger J. H. Investigation of the effects of initial disturbances on plane channel transition//AIAA Paper. 1986. № 433. 10 p.
3. Rozhdestvensky B. L., Simakin I. N. Secondary flow in a plane channel: their relationship and comparison with turbulent flows//J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 261—289.
4. Устинов М. В. Исследование субгармонического перехода в плоском канале методом прямого численного моделирования//Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 3. С. 46—53.
5. Ellingsen T., Palm E. Stability of linear flow//Phys. Fluids. 1975. V. 18. № 4. P. 487—488.