МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1995

УДК 532.527

© 1995 г. Ю. Б. СЕДОВ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СПИРАЛЬНЫХ ВИХРЕЙ

Для атмосферных вихрей, имеющих конвективную природу, характерно наличие у основания вихря мощных радиальных движений среды, для учета которых при аналитическом и численном моделировании необходимо использовать точечные или распределенные вихрестоки (вихреисточники), которые будем называть спиральными вихрями (по форме линий тока, создаваемых или течений) [1]. Взаимодействие точечных спиральных вихрей впервые, по-видимому, было рассмотрено в малоизвестной до последнего времени работе [2], которая включена в сборник трудов [3] и частично пересекается с более поздними работами [4, 5].

Динамика системы n свободных спиральных вихрей определятся системой обыкновенных дифференциальных уравнений [2, 5]

$$\dot{\bar{z}}_j = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k\neq j}\frac{\nu_k}{z_{jk}} \tag{1}$$

$$\bar{z}_k = x_k - iy_k,\ \ z_{jk} = z_j - z_k,\ \ \nu_k = \varkappa_k + i\mu_k$$

где $z_k = x_k + iy_k$ — комплексная координата положения спирального вихря, ν_k — комплексная интенсивность спирального вихря, $\varkappa_k$ — циркуляция, а μ_k — поток скорости через контур, охватывающий спиральный вихрь.

Уравнения (1) получены в предположении, что $\varkappa_k$ и μ_k не зависят от времени, что справедливо для циркуляций $\varkappa_k$ в силу теоремы Кельвина. Уравнения двумерной гидродинамики допускают зависимость стоковых интенсивностей от времени [6]: $\mu_k = \mu_k(t)$, причем конкретный вид временных зависимостей определяется внутренней структурой конкретного спирального вихря и соответствующими граничными условиями, в неограниченном случае — условиями на бесконечности.

Таким образом, уравнения (1) перестают быть автономными, поскольку правые части (1) явно зависят от времени. Относительная свобода в выборе временных зависимостей $\mu_k = \mu_k(t)$ позволяет при моделировании воспроизводить различные стадии эволюции реальных вихрей: стадии зарождения и созревания соответствует монотонное возрастание $\mu_k(t)$, адиабатической стадии — $\mu_k \approx \mathrm{const}$ и стадии затухания — $\mu_k(t) \to 0$.

Рассмотрим парное взаимодействие спиральных вихрей. Полезно перейти к относительным координатам x_{12}, y_{12}, тогда из (1) получим

$$\dot{\bar{z}}_{12} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2\pi i z_{12}} \tag{2}$$

Переходя к относительным полярным координатам (r_{12}, θ_{12}), уравнения (2) запишем в гамильтоновом виде

$$r_{12}\dot{r}_{12} = \frac{\mu}{2\pi} = \frac{\partial H_{12}}{\partial\theta_{12}},\ \ r_{12}\dot{\theta}_{12} = \frac{\varkappa}{2\pi r_{12}} = -\frac{\partial H_{12}}{\partial r_{12}} \tag{3}$$

$$H_{12} = -\frac{\varkappa}{2\pi}\ln r_{12} + \frac{\mu}{2\pi}\theta_{12},\ \ z_{12} = r_{12}e^{i\theta_{12}} \tag{4}$$

где $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$, $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Гамильтониан H_{12} и правая часть первого уравнения (3) явно зависят от времени. После интегрирования из (3) получим

$$r_2^{12}(t) = r_{12}^2(0) + \frac{1}{\pi}\int_0^t \mu(\tau)d\tau,\ \ \theta_{12}(t) = \theta_{12}(0) + \frac{\varkappa}{2\pi}\int_0^t \frac{d\tau}{r_{12}^2(\tau)} \tag{5}$$

Таким образом, при $\mu < 0$ происходит сближение спиральных вихрей вплоть до их слияния, которое происходит за конечное время t_*, определяемое из выражения

$$M(t_*) \equiv \int_0^{t_*} \mu(\tau)d\tau = -\pi r_{12}^2(0) \tag{6}$$

Если интеграл M (∞) сходится, возможна ситуация, когда стоковые интенсивности $\mu_k(t)$ затухнут раньше, чем вихри успеют слиться, тогда $r_{12}^2(t) \to r_{12}^2(0) + M/\pi > 0$.

Рассмотрим подробнее случай $\mu(t) = \mu_0(1+t)^{-2}$, который соответствует цилиндрическим спиральным вихрям с осевым потоком, так что трехмерная дивергенция равна нулю [6, 7]. Такие вихри могут служить моделями закрученных термиков, представляющих собой недолго живущую восходящую струю теплого воздуха. В данном случае расстояние между вихрями имеет вид

$$r_{12}^2(t) = r_{12}^2(0) + \frac{\mu_0 t}{\pi(1+t)} \tag{7}$$

и при $r_{12}^2(0) > -\mu_0/\pi$ вихри сближаются, но слиться не могут. Соответствующее решение представляет собой предельный цикл. Зная относительное движение (5), по уравнениям (1) нетрудно рассчитать абсолютные траектории вихрей, которые, так же как и при $\mu_k = \mathrm{const}$, в случае общего положения имеют вид спиралей [5].

При $\mu = \varkappa = 0$ пара спиральных вихрей движется поступательно, а при $\mu = 0$, $\varkappa \neq 0$ движение вихрей происходит по концентрическим окружностям. В этих случаях $r_{12} = \mathrm{const}$.

Рассмотрим систему спиральных вихрей с одинаковым параметром закрученности $\mu_k/\varkappa_k = \lambda(t)$. В этом случае исходные уравнения (1) приводятся к гамильтоновому виду

$$\varkappa_k \dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \varkappa_k \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \tag{8}$$

$$H = \frac{1}{2\pi} \sum_{j<k} \varkappa_j \varkappa_k (\lambda(t)\theta_{jk} - \ln r_{jk}) \tag{9}$$

Умножая уравнения (1) на ν_j и на $\nu_j z_j$, после суммирования по j получим

$$\sum_j \nu_j z_j = 0, \quad \sum_j \nu_j z_j \dot{\bar{z}}_j = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j<k} \nu_j \nu_k \tag{10}$$

Откуда с учетом того, что $\mu_k = \varkappa_k \lambda(t)$, получаем два линейных первых интеграла системы уравнений

$$\sum_j \varkappa_j z_j = \mathrm{const} \tag{11}$$

которые определяют положение центра тяжести системы одинаково закрученных спиральных вихрей.

Второе выражение в (10) также определяет два интегральных соотношения

$$J = \sum_j \varkappa_j r_j^2 \dot{\theta}_j = \frac{\lambda(t)}{2\pi} \sum_{j<k} \varkappa_j \varkappa_k \tag{12}$$

$$I(t) = \frac{1}{2} \sum_j \varkappa_j r_j^2(t) = I(0) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j<k} \varkappa_j \varkappa_k \int_0^t \lambda(\tau)d\tau \tag{13}$$

В заключение еще раз отметим, что для системы вихрестоков характерна тенденция к общему сближению и слиянию, при этом необходимо вносить соответствующие изменения в уравнения (1), поскольку уменьшается порядок системы, изменяются интенсивности. Таким образом, системы вихрестоков обладают способностью к самоупрощению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 656 с.
2. *Кочина П. Я., Фридман А. А.* О перемещающихся особенностях плоского движения несжимаемой жидкости//Геофиз. сб. 1928. Т. 5. Вып. 2. С. 9—23.
3. *Кочина П. Я.* Гидродинамика и теория фильтрации: Избр. тр. М.: Наука, 1991. 351 с.

4. *Богомолов В. А.* Движение идеальной жидкости постоянной плотности при наличии стоков//Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 4. С. 21—27.
5. *Новиков Е. А., Садов Ю. В.* Концентрация завихренности и спиральные вихри//Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 1. С. 15—21.
6. *Седов Ю. Б.* Метод контурной динамики для плоских течений идеальной жидкости//Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 5. С. 16—19.
7. *Седов Ю. Б.* Метод контурной динамики для уравнений свободной конвекции//ПММ. 1993. № 3. С. 160—162.

Москва

Поступила в редакцию
7.IV.1994