

УДК 532.5.013.4:537.84

© 1995 г. П. А. ЯКУБЕНКО

АБСОЛЮТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СЛАБО ПРОВОДЯЩЕЙ  
ЖИДКОЙ СТРУИ С ТОКОМ

Рассматривается влияние электрического тока на наличие абсолютной неустойчивости в капиллярной струе невязкой слабо проводящей жидкости. Получена связь между числами Вебера и Альфвена, выделяющая области абсолютной и конвективной неустойчивости.

Исследование капиллярной неустойчивости струй было начато Рэлеем [1], в дальнейшем различные аспекты этой проблемы исследовались рядом авторов [2]. Было установлено, что бесконечно протяженная струя неустойчива в невязком приближении по отношению к малым осесимметричным возмущениям с длиной волны больше периметра струи.

Абсолютная неустойчивость струи круглого сечения постоянного диаметра по отношению к осесимметричным возмущениям была исследована в [3, 4]. Для различных типов профилей скорости основного течения были получены критические значения числа Вебера, при превышении которых неустойчивость становится абсолютной. Для плоского профиля скорости критическое значение есть  $We = \epsilon/\rho V_0^2 r_0 \approx 0,32$ , где  $V_0$  и  $r_0$  — соответственно скорость и радиус невозмущенной струи,  $\epsilon$  и  $\rho$  — коэффициент поверхностного натяжения и плотность жидкости.

Влияние электрического тока на устойчивость капиллярной струи исследовалось экспериментально [5] и теоретически [6—8]. Было установлено, что электрический ток оказывает дестабилизирующее влияние.

Данная работа посвящена проблеме абсолютной неустойчивости струй с током. Рассмотрена бесконечно протяженная однородная струя круглого сечения с постоянным осевым электрическим током в случае несжимаемой невязкой слабо проводящей жидкости.

Пусть  $r, \theta, z$  — цилиндрическая система координат, где ось  $z$  направлена по оси симметрии струи. Исследуемое на устойчивость состояние есть

$$V_r = V_\theta = 0, V_z = V_0; H_r = H_z = 0, H_\theta = 2Jr/cr_0^2 \quad (1)$$

где  $J$  — полный ток через сечение струи,  $c$  — скорость света.

Поведение малых возмущений описывается линеаризованной относительно решения (1) системы уравнений магнитной гидродинамики. Будем считать проводимость жидкости  $s$  малой в смысле малости магнитного числа Рейнольдса, вычисленного по фазовой скорости  $\Omega/K$  и длине волны возмущения  $1/K$ , т. е.  $s\Omega/K^2 c^2 \ll 1$ .

Дисперсионное уравнение для осесимметричных возмущений в форме  $Ae^{iKz - i\Omega t}$  имеет следующий вид [6—8]:

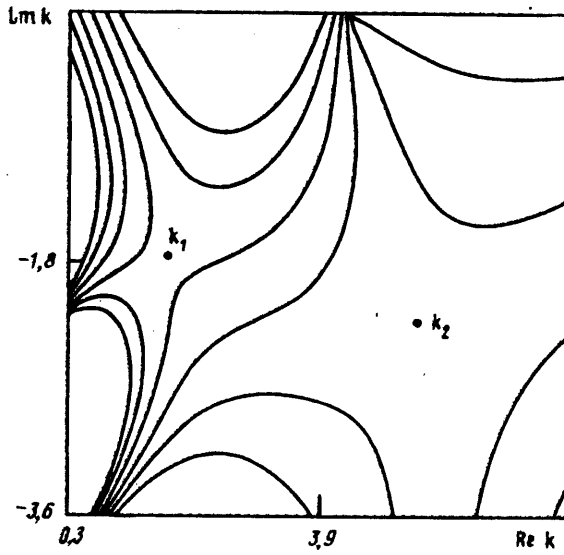
$$(\omega - k)^2 = We (k^2 - 1) \frac{kI_1(k)}{I_0(k)} + 2Al G(k) \quad (2)$$

$$k = +Kr_0, \text{Re}(K) > 0; k = -Kr_0, \text{Re}(K) < 0 \quad (3)$$

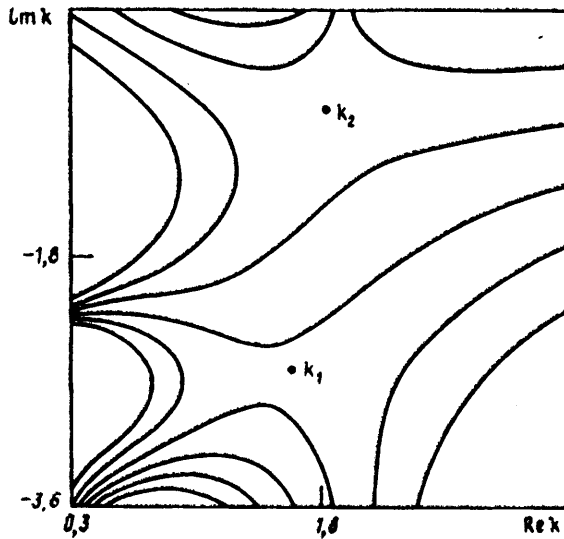
$$\omega = \frac{\Omega r_0}{V_0}, G(k) = k \left( \frac{I_2(k)}{I_1(k)} - \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \right), Al = \frac{\mu J^2}{\rho r_0^2 V_0^2}$$

Здесь  $Al$  — квадрат числа Альфвена,  $I_0(k), I_1(k), I_2(k)$  — модифицированные функции Бесселя. Система с дисперсионным уравнением (2) обладает простой неустойчивостью при любых значениях  $We$  и  $Al$  [6—8].

Согласно соотношению (3), начало координат на комплексной плоскости  $k$  является двойной точкой ветвления с разрезами вдоль мнимой положительной и отрицательной полуосей. В силу симметрии уравнения (2) относительно мнимой оси  $k$  можно ограничиться рассмотрением полуплоскости  $\text{Re}(k) > 0$ . В этой полуплоскости все точки ветвления решения дисперсионного уравнения



Фиг. 1

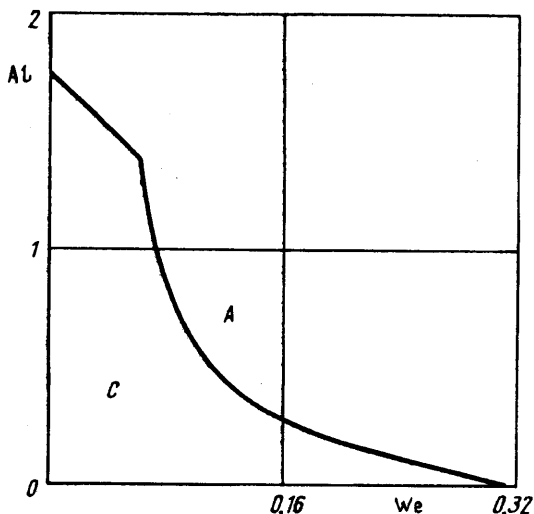


Фиг. 2

$\omega(k)$  есть точки, в которых обращается в ноль правая часть уравнения (2). Во всех таких точках очевидно, что  $\text{Im}(\omega(k)) = 0$ . При таких условиях обе ветви функции  $\omega(k)$  могут быть рассмотрены независимо [9]. Только одна из двух ветвей «неустойчива», т. е. имеет значения  $\text{Im}(\omega(k)) > 0$  при действительных  $k > 0$ .

Один из критериев абсолютной неустойчивости состоит в том [10, 11], что у функции  $\text{Im}(\omega(k))$  на плоскости  $k$  имеются седловые точки, в которых  $\text{Im}(\omega(k)) > 0$  и которые препятствуют деформации оси  $\text{Re}(k)$  в контур, лежащий в области  $\text{Im}(\omega(k)) < 0$ .

Численные исследования линий уровня функции  $\text{Im}(\omega(k))$  на комплексной плоскости  $k$  показали, что у этой функции в окрестности оси  $\text{Re}(k)$  существуют две седловые точки, которые могут удовлетворять указанному выше критерию. Две различные картины линий уровня  $\text{Im}(\omega(k)) \geq 0$ , соответствующие случаю абсолютной неустойчивости, показаны на фиг. 1 и 2. Седловые точки обозначены  $k_1$  и  $k_2$ .



Фиг. 3

Фигура 1 соответствует значениям  $We = 0,075$ ,  $Al = 3,0$ . В этом случае обе точки могут препятствовать смещению контура, но определяющей является точка  $k_1$ , так как  $\text{Im}(\omega(k_1)) > \text{Im}(\omega(k_2))$ .

Фигура 2 соответствует значениям  $We = 0,25$ ,  $Al = 0,1$ . В этом случае только точка  $k_2$  препятствует смещению контура и является определяющей.

При смене абсолютной неустойчивости на конвективную точка  $k_2$  выходит на ось  $\text{Re } k$  вне отрезка неустойчивых волновых чисел. Точка  $k_1$  всегда остается в комплексной плоскости и при смене типа неустойчивости уходит в область  $\text{Im}(\omega(k)) < 0$ .

На фиг. 3 области абсолютной и конвективной неустойчивости обозначены на плоскости  $We$ ,  $Al$  буквами  $A$  и  $C$  соответственно. Точка излома границы областей соответствует смене определяющей седловой точки. При  $Al = 0$  граничное значение есть  $We \approx 0,32$ , что согласуется с результатами [3, 4].

Если в соотношении (2) разложить функции Бесселя в ряд в окрестности нуля и оставить только первые члены разложения, считая  $k$  малыми, что соответствует длинноволновому приближению, то дисперсионное уравнение примет вид

$$(\omega - k)^2 = ((9/16)We + (5/48)Al)k^4 - 0.5(We + Al)k^2$$

Дисперсионное уравнение для малых изгибных колебаний длинной упругой трубы, заполненной движущейся жидкостью, имеет такой же вид. Критерий, полученный в работе [12], дает, что неустойчивость должна быть абсолютной при  $We + Al > 0,25$ .

Автор выражает благодарность А. Г. Куликовскому и И. С. Шикиной за многочисленные советы и обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17355).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rayleigh J. W. On the instability of jets//Proc. Lond. Math. Soc. 1878/1899. V. 10. P. 4—13.
2. Drazin P. G., Reid W. H. Hydrodynamic stability. Cambridge: Univ. Press, 1981. 525 p.
3. Leib S. P., Goldstein M. E. The generation of capillary instabilities on a liquid jet//J. Fluid. Mech. 1986. V. 168. P. 479—500.
4. Monkewitz P. A., Davis J., Bojorquez B., Yu M.-H. The breakup of a liquid jet at high Weber number//Bull. Amer. Phys. Soc. 1988. V. 33. № 10. P. 2273.
5. Гельфгат Ю. М., Ольшанский С. В., Явнайст Г. А. Исследование разрушения свободной жидкометаллической струи под действием осевого тока//Магнит. гидродинам. 1973. № 2. С. 49—54.

6. Бернштам В. А., Поклонский Е. В., Элькин А. И. Устойчивость токонесящей струи проводящей магнитной жидкости//Магнит. гидродинам. 1984. № 3. С. 11—14.
7. Gupta A. S. On the capillary instability of a jet carrying an axial current with or without a longitudinal magnetic field//Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1964. V. 278. № 1373. P. 214—227.
8. Radwan A. E. Electrical stability of a cylindrical fluid interface utilizing the energy principle//J. Magnetism and Magnetic Materials. 1991. V. 98. № 1—2. P. 173—184.
9. Kupfer A., Bers A., Ram A. K. The cusp map in the complex-frequency plane for absolute instabilities//Phys. Fluids. 1987. V. 30. № 10. P. 3075—3082.
10. Bers A. Space-time evolution of plasma instabilities — absolute and convective//Handbook of Plasma Physics/Ed. Rosenbluth M. N., Sagdeev R. Z. Amsterdam: North-Holland, 1983. V. 1. P. 451—517.
11. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
12. Куликовский А. Г., Шикина И. С. Об изгибных колебаниях длинной трубы, заполненной движущейся жидкостью//Изв. АН АрмССР. Механика. 1988. Т. 41. № 1. С. 31—39.

Москва

Поступила в редакцию  
22.III.1994