

УДК 533.6.011.51

© 1995 г. Е. М. НИКОЛАЕВА, В. Н. ТРИГУБ

О САМОИНДУЦИРОВАННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Исследуется взаимодействие пограничных слоев, образующихся на стенках плоского симметричного канала при протекании по нему однородного в начальном сечении сверхзвукового потока совершенного газа с постоянным показателем адиабаты при больших характерных числах Рейнольдса. В рассматриваемом случае продольный размер области взаимодействия δL по порядку величины совпадает с шириной канала d , т. е. взаимодействие между пограничными слоями происходит путем передачи возмущения от одного слоя к другому через потенциальное ядро потока.

При протекании потока вязкого газа с большим характерным числом Рейнольдса между двумя параллельными поверхностями образующиеся на этих поверхностях пограничные слои взаимодействуют друг с другом и с потенциальным ядром потока. Это явление исследовано в рамках теории свободного взаимодействия [1, 2]. В двумерной постановке эта задача может быть рассмотрена на примере течения в полубесконечном симметричном канале. Возмущения в потоке могут возникать, например, из-за деформации стенок канала.

В [3] рассмотрена аналогичная задача для несжимаемой жидкости и дана классификация взаимодействия в зависимости от удаленности области взаимодействия от входа в канал. Эта же классификация применима для рассмотрения течений сжимаемой жидкости. Если расстояние от входа в канал $L \ll d Re^{3/5}$, где d — ширина канала, а Re — число Рейнольдса, вычисленное по ширине канала d и параметрами газа на входе в канал, то продольный размер области взаимодействия $\delta L \ll d$ (см. фиг. 1) и вблизи верхней и нижней поверхностей канала существуют две независимые области взаимодействия, каждая из которых описывается с помощью трехслойной схемы [1, 2]. При $L \approx d Re^{3/5}$ потенциальное ядро становится общим для обеих областей и пограничные слои начинают взаимодействовать друг с другом через потенциальное ядро. При $d Re^{3/5} \ll L \ll d Re$ продольный размер области взаимодействия $\delta L \gg d$ и взаимодействие между пограничными слоями происходит по гидравлическому типу [3]. В [4] рассмотрено влияние возмущений на течение для этого режима. При $L \approx d Re$ пограничные слои на верхней и нижней поверхностях смыкаются, образуя единое завихренное ядро.

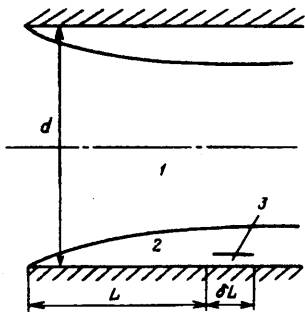
Для несжимаемой жидкости задача рассмотрена и исследована на устойчивость в [3] (режимы $L \approx d Re^{3/5}$ и $d Re^{3/5} \ll L \ll d Re$) и в [5, 6].

1. Постановка задачи и метод решения. Введем систему координат x_R, y_R , где ось x_R направлена вдоль оси потока, а ось y_R ей перпендикулярна. Рассмотрим сначала потенциальное ядро потока (область 1 на фиг. 1). Асимптотические разложения в этой области при $Re \rightarrow \infty$ имеют вид

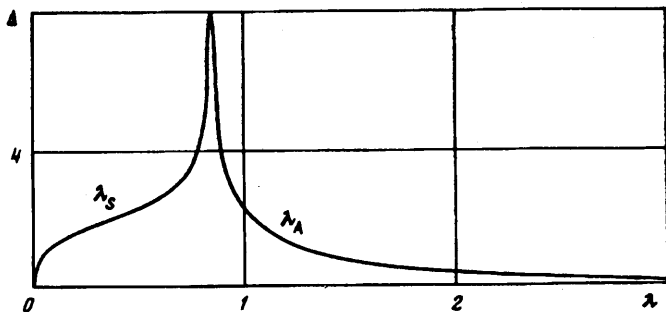
$$x_R = dx_1, \quad y_R = dy_1, \quad \sigma = Re^{-1/5} \quad (1.1)$$

$$\mu_R = u_\infty (1 + \sigma^2 u_1(x_1, y_1) + \dots), \quad v_R = u_\infty \sigma^2 v_1(x_1, y_1) + \dots$$

$$\tilde{p}_R = p_\infty (1 + \sigma^2 p_1(x_1, y_1) + \dots), \quad \rho_R = \rho_\infty (1 + \sigma^2 \rho_1(x_1, y_1) + \dots)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь u , v — соответственно продольная и поперечная компоненты скорости, p — давление, ρ — плотность, индекс R относится к размерным величинам, « ∞ » — к значениям величин в невозмущенном потоке. В результате предельного перехода в области 1 получается линейная система уравнений для возмущений

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 0$$

$$p_1 = \gamma p_1, \quad p_1 = -M_\infty^2 u_1, \quad M_\infty^2 = \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{\gamma p_\infty}$$

Решение системы уравнений (1.2) может быть получено в общем виде. Представим необходимые в дальнейшем выражения для u_1 , p_1

$$u_1 = \beta c_2 c_3 \{g'(c_2(x_1 + \beta y_1 + c_1)) - f'(c_2(x_1 - \beta y_1 + c_1))\}$$

$$p_1 = \gamma M_\infty^2 c_2 c_3 \{g'(c_2(x_1 + \beta y_1 + c_1)) + f'(c_2(x_1 - \beta y_1 + c_1))\}$$

$$\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

где c_1 , c_2 , c_3 — произвольные константы, f , g — произвольные функции, штрих означает дифференцирование.

В основной толщине пограничного слоя вблизи нижней стенки (область 2 на фиг. 1)

$$x_R = dx_2, \quad y_R = -\frac{1}{2}d + \sigma dy_2 \quad (1.3)$$

$$u_R = u_\infty (U(y_2) + \sigma u_2(x_2, y_2) + \dots), \quad v_R = u_\infty \sigma^2 v_2(x_2, y_2) + \dots$$

$$p_R = p_\infty (1 + \sigma^2 p_2(x_2, y_2) + \dots), \quad \rho_R = \rho_\infty (R(y_2) + \sigma \rho_2(x_2, y_2) + \dots)$$

Здесь $U(y_2)$, $R(y_2)$ — профили скорости и плотности невозмущенного пограничного слоя. Считаем, что при $y_2 \rightarrow 0$ $U(y_2) = \alpha y_2 + \dots$. Коэффициент α может быть выражен через локальный коэффициент трения c_f

$$\alpha = \frac{1}{2} c_f \sigma \text{Re} \frac{\mu_\infty}{\mu_w} = \frac{1}{2} c_f \text{Re}^{-4/5} \frac{\mu_\infty}{\mu_w}, \quad c_f = 2 \frac{\tau_w}{\rho_\infty u_\infty^2}$$

где μ — коэффициент вязкости, индекс W относится к значениям величин на

стенке канала. Требование $\alpha = O(1)$ и определяет ограничения на рассматриваемый пограничный слой. Если

$$c_F = O(\text{Re}_x^{-1/2}), \quad \text{Re}_x = \frac{\rho_\infty u_\infty x_R}{\mu_\infty}$$

то число Рейнольдса Re_x , при котором рассматривается задача, должно удовлетворять условию $\text{Re}_x = O(\text{Re}^{2/3})$. Заметим, что пограничные слои смыкаются на большом расстоянии при $\text{Re}_x = O(\text{Re}^2)$.

Для возмущений скорости в разложениях (1.3) получаются следующие решения:

$$u_2 = -F(x_2) U'(y_2), \quad v_2 = F'(x_2) U(y_2)$$

где $F(x_2)$ — произвольная функция.

Из вида решения для u_2 можно установить, что разложения (1.3) непригодны в пристеночном слое при $y_2 = O(\sigma)$, где существенны эффекты нелинейности. Требование, чтобы в этом слое действовали силы вязкости, приводит к соотношению $\sigma = \text{Re}^{-1/5}$.

В пристеночном слое

$$x_R = dx_3, \quad y_R = -\frac{1}{2}d + \sigma^2 dy_3 \quad (1.4)$$

$$u_R = u_\infty \sigma u_3(x_3, y_3) + \dots, \quad u_R = u_\infty \sigma^3 v_3(x_3, y_3) + \dots$$

$$p_R = p_\infty (1 + \sigma^2 p_3(x_3, y_3) + \dots), \quad \rho_R = \rho_w + \dots, \quad \mu_R = \mu_w + \dots$$

и в результате предельного перехода получается система уравнений

$$u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} = -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\rho_\infty}{\rho_w} \frac{\partial p_3}{\partial x_3} + \frac{\mu_w}{\mu_\infty} \frac{\rho_\infty}{\rho_w} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_3^2} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial p_3}{\partial y_3} = 0$$

Из сращения с одной частью пограничного слоя находим, что $p_3(x_3) = p_2(x_3)$, а при $y_3 \rightarrow \infty$ $u_3 = \alpha(y_3 - F(x_3) + \dots)$. Проводя сращивание давления и вертикальной компоненты скорости в основной части пограничного слоя (область 2) и в сверхзвуковом потоке (область 1), установим связь между функцией F и давлением $p_2 = p_3$

$$F = \rho c_2 c_3 \left\{ g \left(c_2 \left(x_3 - \frac{\beta}{2} + c_1 \right) \right) - f \left(c_2 \left(x_3 + \frac{\beta}{2} + c_1 \right) \right) \right\}$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial x_3} = -\gamma M_\infty^2 c_3 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left\{ g \left(c_2 \left(x_3 - \frac{\beta}{2} + c_1 \right) \right) + f \left(c_2 \left(x_3 + \frac{\beta}{2} + c_1 \right) \right) \right\} \quad (1.6)$$

Проводя аналогичное рассмотрение для пограничного слоя вблизи верхней стенки канала, можно в соответствующих координатах получить систему уравнений, совпадающую с (1.5), (1.6), если в (1.5), (1.6) заменить функции f на g , а g на f . Системы уравнений для нижнего и верхнего пограничных слоев оказываются связанными через функции g и f . Выполним преобразование переменных, позволяющее представить задачу для взаимодействующих пограничных слоев в простом виде. Пусть

$$x_3 = k_x x, \quad y_3 = k_y y, \quad u_3 = k_u u, \quad v_3 = k_v v$$

$$f = A, \quad g = A_-, \quad c_1 = -\frac{\beta}{2}, \quad c_2 = k_x^{-1}, \quad c_3 = k_y \beta^{-1}, \quad \Delta = \beta k_x^{-1}$$

$$k_x = \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_w}\right)^{1/4} \left(\frac{p_\infty}{p_w}\right)^{1/2} \alpha^{-5/4} \beta^{-3/4}$$

$$k_y = \left(\frac{\mu_w}{\mu_\infty}\right)^{1/4} \left(\frac{p_\infty}{p_w}\right)^{1/2} \alpha^{-3/4} \beta^{-1/4}$$

$$k_u = \alpha k_y, \quad k_v = \alpha k_x^2 k_x^{-1}$$

Применив такие же преобразования к уравнениям для пристеночного слоя вблизи верхней стенки, получим две связанные системы уравнений с граничными условиями

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (A(x) + A_-(x - \Delta)) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0$$

$$y \rightarrow \infty: u(x, y) = y + A(x) - A_-(x - \Delta) + o(1)$$

$$u_- \frac{\partial u_-}{\partial x} + v_- \frac{\partial u_-}{\partial y_-} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (A_-(x) + A(x - \Delta)) + \frac{\partial^2 u_-}{\partial y_-^2} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial u_-}{\partial x} + \frac{\partial v_-}{\partial y_-} = 0$$

$$u_-(x, 0) = v_-(x, 0) = 0$$

$$y_- \rightarrow \infty: u_-(x, y_-) = y_- + A_-(x) - A(x - \Delta) + o(1)$$

$$x \rightarrow -\infty: A(x) \rightarrow 0, \quad A_-(x) \rightarrow 0$$

Здесь

$$\Delta = \left(\frac{\mu_w}{\mu_\infty}\right)^{1/4} \left(\frac{p_w}{p_\infty}\right)^{1/2} \alpha^{5/4} \beta^{7/4} = \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_w}\right)^{1/2} \left(\frac{p_\infty}{p_w}\right)^{1/2} \left(\frac{c_F}{2}\right)^{5/4} \text{Re} \beta^{7/4}$$

Асимптотическое решение задачи (1.7), (1.8) при $x \rightarrow -\infty$ ищем в виде

$$v = c_\nu \varphi(y) \exp\{\lambda x\}, \quad u = y - c_\nu \frac{1}{\lambda} \varphi'(y) \exp\{\lambda x\}, \quad A = c_A \exp\{\lambda x\}$$

$$v_- = c_{-\nu} \varphi_-(y_-) \exp\{\lambda x\}, \quad u_- = y_- - c_{-\nu} \frac{1}{\lambda} \varphi'_-(y_-) \exp\{\lambda x\}$$

$$A_- = c_{-A} \exp\{\lambda x\}$$

где $\lambda > 0$, c_ν , $c_{-\nu}$, c_A , c_{-A} — произвольные постоянные. Функции $\varphi(y)$, $\varphi_-(y_-)$ должны удовлетворять обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям

$$\varphi''' - \lambda(y\varphi' - \varphi) = \frac{\lambda^3}{c_\nu} (c_A + c_{-A} \exp\{-\lambda\Delta\}) \quad (1.9)$$

$$\varphi_-'' - \lambda(y_- \varphi_-' - \varphi_-) = \frac{\lambda^3}{c_{-\nu}} (c_{-A} + c_A \exp\{-\lambda\Delta\}) \quad (1.10)$$

Решение уравнений (1.9), (1.10), удовлетворяющие условиям на стенках

канала и не возрастающие при $y \rightarrow \infty$, $y_- \rightarrow \infty$, выражаются через функции Эйри $Ai(z)$

$$\varphi'(y) = \frac{\lambda^{2/3}}{c_\nu Ai'(0)} (c_A + c_{-A} \exp\{-\lambda\Delta\}) \int_0^{\chi_1} Ai(z) dz$$

$$\varphi'(y_-) = \frac{\lambda^{2/3}}{c_{-\nu} Ai'(0)} (c_{-A} + c_A \exp\{-\lambda\Delta\}) \int_0^{\chi_2} Ai(z) dz$$

$$\chi_1 = \lambda^{1/3} y, \quad \chi_2 = \lambda^{1/3} y_-$$

Требую выполнения условий для скорости u , u_- при $y \rightarrow \infty$, $y_- \rightarrow \infty$, получим линейную однородную систему уравнения для коэффициентов c_A , c_{-A}

$$c_A (\lambda^{4/3} k - 1) + c_{-A} (\lambda^{4/3} k + 1) \exp\{-\lambda\Delta\} = 0 \quad (1.11)$$

$$c_A (\lambda^{4/3} k + 1) \exp\{-\lambda\Delta\} + c_{-A} (\lambda^{4/3} k - 1) = 0$$

$$k = -\frac{1}{Ai'(0)} \int_0^\infty Ai(z) dz$$

Собственные значения λ определяются из условия разрешимости системы (1.11). Имеются две ветви решений. В случае

$$\lambda^{4/3} k - 1 = -(\lambda^{4/3} k + 1) \exp\{-\lambda\Delta\}$$

имеем $c_A = -c_{-A}$, $A = A_-$, т. е. возмущения вертикальной компоненты скорости в плоскости симметрии равны нулю и движение является симметричным относительно этой плоскости. Уравнение для $\lambda = \lambda_s$ может быть записано в виде

$$k\lambda_s^{4/3} = \text{th} \frac{\Delta\lambda_s}{2} \quad (1.12)$$

Уравнение имеет единственное решение $\lambda_s(\Delta) > 0$ во всем диапазоне $0 < \Delta < +\infty$. Для симметричной моды движения $A = A_-$ и системы уравнений (1.7), (1.8) распадаются на две одинаковые для каждого из пограничных слоев.

В другом случае

$$\lambda^{4/3} k - 1 = (\lambda^{4/3} k + 1) \exp\{-\lambda\Delta\}$$

Тогда $c_A = -c_{-A}$, $A = A_-$, т. е. возмущения давления в плоскости симметрии равны нулю, а нормальные компоненты скорости в верхнем и нижнем пограничных слоях совпадают. Такое движение можно назвать антисимметричным. Уравнение для $\lambda = \lambda_A$ представляется в виде

$$k\lambda_A^{4/3} = \text{cth} \frac{\Delta\lambda_A}{2} \quad (1.13)$$

а также имеет единственное решение $\lambda_A(\Delta)$ при $0 < \Delta < +\infty$. В случае антисимметричной моды системы уравнений (1.7), (1.8) также распадаются на две одинаковые системы уравнений, однако условия при $x \rightarrow -\infty$ для каждой из этих систем будут различными.

В общем случае начальные условия при $x \rightarrow -\infty$ представляются в виде линейной комбинации симметричной и антисимметричной мод

$$A = c_s \exp\{\lambda_s x\} + c_A \exp\{\lambda_A x\} \quad (1.14)$$

$$u = y + k\lambda_s^{4/3} c_s (1 + \exp\{-\Delta\lambda_s\}) \exp\{x\lambda_s\} \int_0^{\chi_{s1}} Ai(z) dz +$$

$$+ k\lambda_A^{43} c_A (1 - \exp\{-\Delta\lambda_A\}) \exp\{x\lambda_A\} \int_0^{\chi_{A1}} \text{Ai}(z) dz$$

$$A_- = c_s \exp\{\lambda_s x\} - c_A \exp\{\lambda_A x\}$$

$$u_- = y_- + k\lambda_s^{43} c_s (1 + \exp\{-\Delta\lambda_s\}) \exp\{x\lambda_s\} \int_0^{\chi_{S2}} \text{Ai}(z) dz -$$

$$- k\lambda_A^{43} c_A (1 - \exp\{-\Delta\lambda_A\}) \exp\{x\lambda_A\} \int_0^{\chi_{A2}} \text{Ai}(z) dz$$

$$\chi_{S1} = y\lambda_s^{1/3}, \quad \chi_{A1} = y\lambda_A^{1/3}, \quad \chi_{S2} = y_- \lambda_s^{1/3}, \quad \chi_{A2} = y_- \lambda_A^{1/3}$$

где c_s, c_A — производные постоянные, характеризующие интенсивность симметричной и антисимметричной мод. Поскольку задача допускает произвольный сдвиг по переменной x , одна из постоянных c_s, c_A может быть заменена на $+1$, если она положительна, или на -1 , если она отрицательна. Отметим также, что замена верхней поверхности на нижнюю в системе (1.7), (1.8) соответствует изменению знака коэффициента c_A . Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением одной из поверхностей при положительных и отрицательных значениях c_A и при значениях $c_s = \pm 1$.

В системе (1.7), (1.8) имеется параметр Δ , характеризующий скорость передачи возмущения от одного слоя к другому. При малых значениях Δ , что соответствует мгновенной передаче возмущений, асимптотическое поведение функций меняется; таким образом, предел системы уравнений (1.7), (1.8) при $\Delta \rightarrow 0$ должен быть рассмотрен отдельно.

На фиг. 2 представлены зависимости собственных чисел λ_A, λ_s от Δ . При малых значениях Δ $\lambda_s \rightarrow 0, \lambda_A \rightarrow \infty$. При этом вклады симметричной и антисимметричной мод в общее решение становятся несравнимыми по порядку величины и эти моды должны быть рассмотрены отдельно друг от друга.

Предел системы уравнений при $\Delta \rightarrow 0$. Рассмотрим сначала симметричную моду. Положим $A(x) \equiv A_-(x)$ и, подставляя это выражение в (1.7), (1.8), получим две одинаковые системы уравнений для верхнего и нижнего пограничных слоев. Вводя замену $x = 2^3 \Delta^{-3} x_s, y = 2\Delta^{-1} y_s, u = 2\Delta^{-1} u_s, v = 1/2 \Delta v_s, \partial A/\partial x = 2\Delta^{-2} B_s$ и переходя к пределу $\Delta \rightarrow 0$, имеем

$$u_s \frac{\partial u_s}{\partial x_s} + v_s \frac{\partial u_s}{y_s} = \frac{\partial B_s}{\partial x_s} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial y_s^2} \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s}{\partial y_s} = 0$$

$$u_s(x_s, 0) = v_s(x_s, 0)$$

$$y_s \rightarrow \infty: u_s(x_s, y_s) = y_s + B_s$$

$$x_s \rightarrow -\infty: B_s(x_s) \rightarrow 0$$

Задача, полученная в этом пределе, совпадает с задачей, рассмотренной в [3]. Считаем, что при $x_s \rightarrow -\infty$ решение задачи (1.15) имеет вид

$$v_s = c_v \lambda_s \varphi(y_s) \exp\{\lambda_s x_s\}, \quad u_s = y_s - c_v \varphi'(y_s) \exp\{\lambda_s x_s\}$$

$$B_s = \frac{\partial A_s}{\partial x_s} = c_B \exp\{\lambda_s x_s\}$$

Здесь $\lambda_s > 0$, c_v , c_B — производные коэффициенты. Проводя анализ рассмотренной задачи при $x \rightarrow -\infty$ аналогично описанному выше, находим $\lambda_s = (2k)^{-3}$. При этом решение задачи (1.15) принимает вид

$$B_s = c_B \exp \{ \lambda_s x_s \}, \quad u_s = y_s - \frac{c_B \lambda_s^{1/3}}{\text{Ai}'(0)} \int_0^{x_s} \text{Ai}(z) dz$$

В случае антисимметричной моды вводим замену

$$x = \left(\frac{\Delta}{2} \right)^{3/7} x_A, \quad y = \left(\frac{\Delta}{2} \right)^{1/7} y_A$$

$$u = \left(\frac{\Delta}{2} \right)^{1/7} u_A, \quad v = \left(\frac{\Delta}{2} \right)^{-1/7} v_A, \quad A = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{2} \right)^{1/7} A_s$$

Тогда система уравнений (1.7), (1.8) и граничные условия принимают вид

$$u_A \frac{\partial u_A}{\partial x_A} + v_A \frac{\partial u_A}{\partial y_A} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2}{\partial x_A^2} (A_A(x) + A_{-A}(x - \delta)) + \frac{\partial^2 u_A}{\partial y_A^2} \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial u_A}{\partial x_A} + \frac{\partial v_A}{\partial y_A} = 0$$

$$u_A(x_A, 0) = v_A(x_A, 0) = 0$$

$$y_A \rightarrow \infty: u_A(x_A, y_A) = y_A + \frac{1}{2} (A_A(x_A) - A_{-A}(x_A - \delta)) + o(1)$$

$$u_{-A} \frac{\partial u_{-A}}{\partial x_A} + v_{-A} \frac{\partial u_{-A}}{\partial y_{-A}} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2}{\partial x_A^2} (A_{-A}(x_A) + A_A(x - \delta)) + \frac{\partial^2 u_{-A}}{\partial y_{-A}^2} \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial u_{-A}}{\partial x_A} + \frac{\partial v_{-A}}{\partial y_{-A}} = 0$$

$$u_{-A}(x_A, 0) = v_{-A}(x_A, 0) = 0$$

$$\text{при } y_{-A} \rightarrow \infty: u_{-A}(x_A, y_{-A}) = y_{-A} + \frac{1}{2} (A_{-A}(x_A) - A_A(x_A - \delta)) + o(1)$$

$$\text{при } x_A \rightarrow \infty: A_A(x_A) \rightarrow 0, \quad A_{-A}(x_A) \rightarrow 0$$

Здесь $\delta = \Delta^{4/7}$.

При $x_A \rightarrow -\infty$, где задача считается линейной, $A_A(x_A) \equiv -A_{-A}(x_A)$. Предположим, что в области, где начинается нелинейность

$$A_A(x_A) \equiv -A_{-A}(x_A) + \delta B_A(x_A), \quad \delta \rightarrow 0$$

Подставляя это выражение в систему (1.16), (1.17) и переходя к пределу $\delta \rightarrow 0$, получим

$$u_A \frac{\partial u_A}{\partial x_A} + v_A \frac{\partial u_A}{\partial y_A} = \frac{\partial^2}{\partial x_A^2} \left(B_A + \frac{\partial A_A}{\partial x_A} \right) + \frac{\partial^2 u_A}{\partial y_A^2} \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial u_A}{\partial x_A} + \frac{\partial v_A}{\partial y_A} = 0$$

$$u_A(x_A, 0) = v_A(x_A, 0) = 0$$

$$\text{при } y_A \rightarrow \infty: u_A(x_A, y_A) = y_A + A_A(x_A) + o(1)$$

$$u_{-A} \frac{\partial u_{-A}}{\partial x_A} + v_{-A} \frac{\partial u_{-A}}{\partial y_{-A}} = \frac{\partial^2}{\partial x_A^2} \left(B_A - \frac{\partial A_A}{\partial x_A} \right) + \frac{\partial^2 u_{-A}}{\partial y_{-A}^2} \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial u_{-A}}{\partial x_A} + \frac{\partial v_{-A}}{\partial y_{-A}} = 0$$

$$u_{-A}(x_A, 0) = v_{-A}(x_A, 0) = 0$$

$$y_{-A} \rightarrow \infty: u_{-A}(x_A, y_{-A}) = y_{-A} - A_A(x_A) + o(1)$$

Предполагая, что при $x_A \rightarrow -\infty$

$$v_A = c_v \lambda_A \varphi(y_A) \exp\{\lambda_A x_A\}, \quad u_A = y_A - c_v \varphi'(y_A) \exp\{\lambda_A x_A\}$$

$$v_{-A} = c_{-v} \lambda_A \varphi_{-}(y_{-A}) \exp\{\lambda_A x_A\}, \quad u_{-A} = y_{-A} - c_{-v} \varphi_{-}'(y_{-A}) \exp\{\lambda_A x_A\}$$

$$A_A = c_A \exp\{\lambda_A x_A\}, \quad B_A = c_B \exp\{\lambda_A x_A\}$$

где $\lambda_A > 0$, c_v , c_{-v} , c_A , c_B — произвольные постоянные, и проводя анализ линейной задачи согласно изложенной выше схеме, получим следующие выражения для $\varphi'(y_A)$, $\varphi_{-}'(y_{-A})$:

$$\varphi'(y_A) = \frac{\lambda_A^{43}}{\text{Ai}'(0)} \left(\frac{c_B}{c_v} + \lambda_A \frac{c_A}{c_v} \right) \int_0^{x_A} \text{Ai}(z) dz$$

$$\varphi_{-}'(y_{-A}) = \frac{\lambda_A^{43}}{\text{Ai}'(0)} \left(\frac{c_B}{c_{-v}} + \lambda_A \frac{c_A}{c_{-v}} \right) \int_0^{x_A} \text{Ai}(z) dz$$

$$\chi_A = \lambda_A^{1/3} y_A$$

Требую выполнения условий для скорости u , u_{-} при $y_A \rightarrow \infty$, получим линейную однородную систему уравнений для коэффициентов c_A , c_B

$$c_B \lambda_A^{43} k + c_A (\lambda_A^{7/3} k - 2) = 0, \quad c_B \lambda_A^{43} k - c_A (\lambda_A^{7/3} k - 2) = 0 \quad (1.20)$$

Из условия разрешимости системы (1.20) определим собственные значения λ_A . Имеется только одно значение λ_A , удовлетворяющее условию $\lambda_A > 0$: $\lambda_A = (2/k)^{3/7}$. При этом $c_B = 0$, а c_A произвольно. Тогда при $x_A \rightarrow -\infty$ решение ведет себя следующим образом:

$$u_A = y_A - \exp\{\lambda_A x_A\}, \quad u_{-A} = y_{-A} - \exp\{\lambda_A x_A\}, \quad A = \exp\{\lambda_A x_A\}, \quad B = 0$$

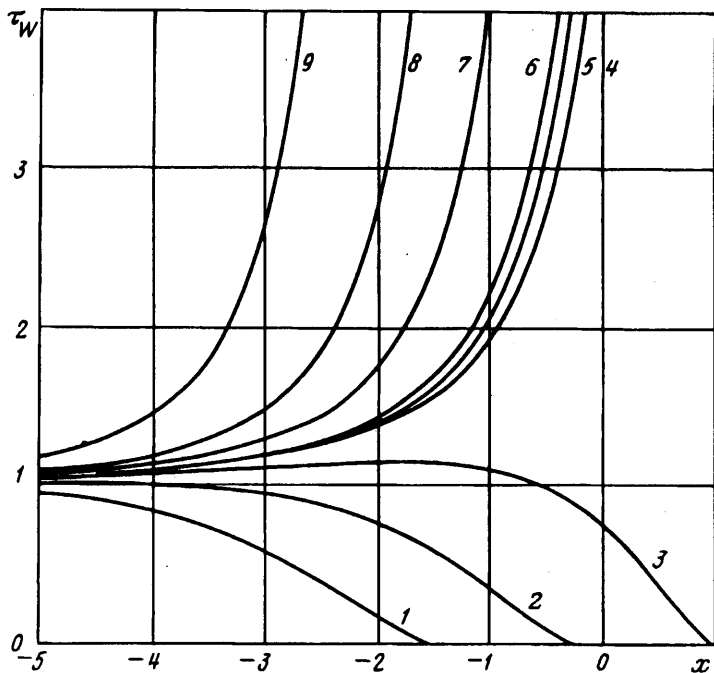
Заканчивая рассмотрение предела системы при $\Delta \rightarrow 0$, заметим что при малых Δ антисимметричная мода возрастает существенно быстрее симметричной.

Система уравнений (1.7), (1.8) решалась с помощью пакета программ «Алгебра» путем маршевого интегрирования по переменной x . Начальные условия ставились в некотором начальном сечении $x_0 \ll -1$. Интегрирование проводилось при постоянном шаге по переменной x $h_x = 0,02$ и фиксированном распределении узлов в поперечном направлении. Количество узлов в поперечном направлении бралось равным 50.

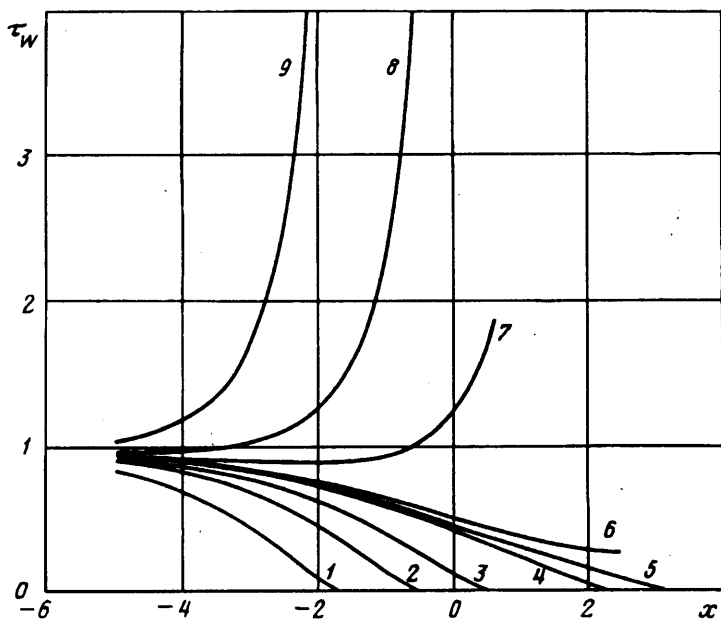
Программа, по которой проводились расчеты, тестировалась на результатах, приведенных в [2].

2. Результаты. Расчеты проводились для двух значений параметра Δ : 2,0 и 2,5. Как следует из графика зависимости собственных чисел λ_s, λ_A от Δ , приведенного на фиг. 2, эти значения параметра Δ соответствуют значениям собственных чисел $\lambda_s = 0,40$, $\lambda_A = 1,01$ и $\lambda_s = 0,57$, $\lambda_A = 0,95$ соответственно.

При меньших значениях Δ вклад симметричной и антисимметричной мод в



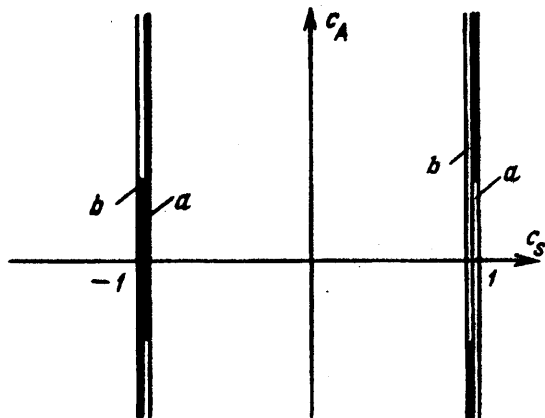
Фиг. 3



Фиг. 4

решение становится существенно различным, эта область значений Δ относится к рассмотренному выше пределу при $\Delta \rightarrow 0$. При больших значениях Δ отношение собственных значений $\lambda_s/\lambda_A \rightarrow 1$, таким образом, при дальнейшем увеличении Δ решение практически не изменяется.

На фиг. 3, 4 приведены результаты расчетов трения на поверхности канала



Фиг. 5

для $c_s = 1$, $\Delta = 2,5$ (фиг. 3) и $c_s = -1$, $\Delta = 2,5$ (фиг. 4) и набора значений c_A : $c_A = 0, \pm 0,1, \pm 1, \pm 3, \pm 10$. Кривые 1—9 соответствуют значениям $c_A = -10, -3, -1, -0,1, 0, 1, 3, 10$ для обеих фигур. Обнаружено два различных типа проведения решения: трение на поверхности или неограниченно возрастает, или уменьшается до нуля. В каждом отдельном случае расчет прекращался или при возрастании трения на одной из поверхностей до 10^5-10^6 , или при обращении трения на одной из поверхностей в нуль, поскольку процедура маршевого интегрирования становилась неустойчивой.

На фиг. 5 показано, как ведет себя решение на обеих поверхностях в зависимости от коэффициентов c_s, c_A . Линии, обозначенные символом a , соответствуют верхней, а символом b — нижней поверхностям; причем на темных участках линий наблюдается отрыв, а на светлых — неограниченный рост трения. Как видно из фиг. 5, при $c_A = 0$ решения для обеих поверхностей совпадают, причем в случае $c_s = -1$ трения падает до нуля, а при $c_A = 1$ неограниченно возрастает. Включение антисимметричной моды достаточной интенсивности ($|c_A| \geq 1$) приводит к тому, что на одной из поверхностей характер поведения решения изменяется, т. е. при $c_s = -1$ на одной из поверхностей в зависимости от знака c_A наблюдается рост, а при $c_s = 1$ — уменьшение трения до нуля. Сравнение решений для разных Δ показывает, что при меньших Δ для изменения типа решения требуется введение антисимметричной моды большей интенсивности. Это связано с тем, что уменьшение Δ соответствует уменьшению отношения собственных чисел λ_A/λ_s , что снижает влияние антисимметричной моды на решение в целом.

Таким образом, в рассмотренном диапазоне значений параметров Δ, c_A решения, продолжающиеся до $x \rightarrow \infty$ без появления обратных токов, не обнаружены.

Решения, заканчивающиеся в точках с неограниченным ростом трения, соответствуют ситуации, когда канал имеет конечную длину и вблизи конца одной (или обеих) его сторон поддерживается пониженное давление. Тогда путем сдвига решения по координате x можно удовлетворить граничному условию на конце при сколь угодно низком давлении.

Более интересными могут оказаться решения, приходящие в точку с нулевым трением. Однако для полного исследования таких решений необходимо использовать численный метод, позволяющий проводить расчеты при наличии зон обратных токов и фиксированных граничных условиях вниз по потоку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нейланд В. Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке//Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53—57.
2. *Stewartson K., Williams P. G.* Self-induced separation//Proc. Roy. Soc. A. 1969. V. 312. P. 181—206.
3. *Рубан А. И., Тимошин С. Н.* О распределении возмущений в пограничном слое на стенках плоского канала//Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 74—79.
4. *Богданова Е. В., Рыжов О. С.* О свободных колебаниях вязкой несжимаемости жидкости в полубесконечном канале//ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 1. С. 64—72.
5. *Smith F. T.* On entry-flow effects in bifurcating, blocked or constricted tubes//J. Fluid Mech. 1976. V. 78. Pt 4. P. 709—736.
6. *Smith F. T., Bodonyi R. J.* On the stability of the developing flow in a channel or circular pipe//Quart. J. Mech. Appl. Math. 1980. V. 33. Pt 3. P. 293—320.

Москва

Поступила в редакцию
6.X.1993