

УДК 532.5+533.6.071

© 1995 г. В. Н. ВАСИЛЬЕВ, О. В. ИЛЬИН

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВОЗМУЩЕННОГО ПОТОКА, ОБТЕКАЮЩЕГО ПЛАСТИНУ В КАНАЛЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

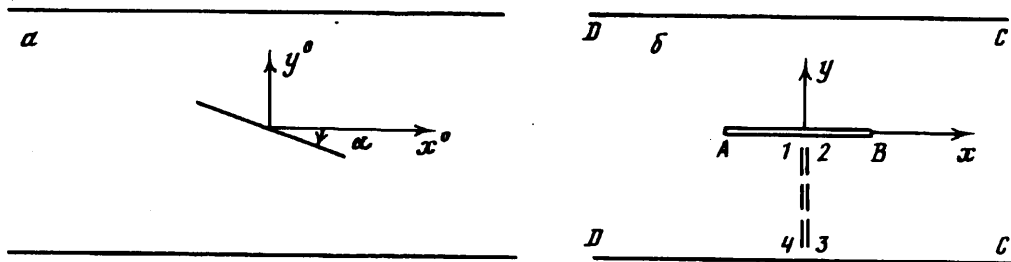
В линейной постановке получены аналитические выражения комплексного потенциала потока вблизи пластины для малых углов атаки и проницаемых стенок канала. Общее решение включает в себя предельные случаи: пластина в канале с непротекаемыми стенками и в струе.

Приведены числовые результаты влияния проницаемости на геометрию течения вблизи пластины и стенок канала. Получены распределения скорости возмущенного потока вдоль стенок канала и расход жидкости сбегавшего на бесконечности потока.

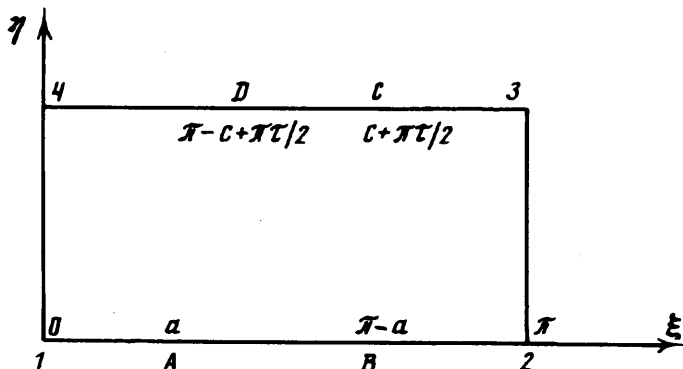
Теоретическому исследованию вопросов индукции в перфорированных границах посвящен ряд работ [1—7]. Математические методы решения задач в данных работах, как правило, зависят от геометрии обтекаемых профилей и значений коэффициентов проницаемости перфорированных границ. Например, в работе [1] задача обтекания гидродинамических особенностей сведена к решению уравнения Лапласа относительно неизвестного потенциала возмущения, вызванного проницаемой стенкой. Решение получено в виде рядов, коэффициенты которых зависят от вида гидродинамических особенностей. В [2] предложен метод численного решения уравнения Лапласа при исследовании индукции проницаемых стенок рабочей части аэродинамической трубы малых скоростей. Точные решения задач об обтекании источника (стока), диполя и вихря в плоском перфорированном канале получены в [3, 4]. Метод сингулярных интегральных уравнений предложен в [6] при решении задачи обтекания симметричных тонких профилей в канале с одинаковой перфорацией его стенок. При таком же характере перфорации стенок в работе [5] задача об обтекании тонкого профиля сведена к известной задаче сопряжения теории аналитических функций, в [7] рассмотрена одномерная теория развитой кавитации. В последней работе применен метод осреднений для расчета сил гидродинамического сопротивления тел.

Общий метод решения задач об обтекании тонких профилей в плоском перфорированном канале реализован в работе [8]. Аналитическое решение записывается через зета-функции [9]. Предложенный в [8] метод решения не зависит от степени перфорации грани, расположения профиля в потоке и с успехом может быть применен к задачам кавитационного обтекания тонких препятствий [10] и обратным задачам построения тонких профилей по заданному распределению давления [11]. В [8] приведены результаты влияния проницаемости стенок канала на гидродинамические характеристики тонкого профиля. В качестве частного случая получены решения задач плавного обтекания тонких тел потоком, ограниченным свободными поверхностями или непротекаемыми стенками [12].

В данной работе проведено исследование геометрии плоского потока в канале с проницаемыми стенками вблизи пластины и проницаемых стенок. Приведены преобразования, которые могут быть полезны для читателей, интересующихся зета-функциями и их приложениями.



Фиг. 1



Фиг. 2

1. Комплексно-сопряженная скорость возмущенного потока в плоском канале с проницаемыми стенками. Пусть пластина длины l , передняя кромка которой удалена на расстояние h от верхней стенки канала ширины H (фиг. 1, а), обтекается потоком несжимаемой идеальной жидкости. Угол α наклона пластины к стенкам канала считается малой величиной, что позволяет искать комплексно-сопряженную скорость возмущенного потока в виде $F = u - iv = v_x - v_\infty - iv_y$, где v_x и v_y — компоненты вектора скорости потока, v_∞ — скорость набегающего потока в бесконечно удаленной точке слева от канала, а граничные условия в физической области течения сносить на полосу ширины H с исключенным горизонтальным отрезком длины l (фиг. 1, б).

Решение задачи строится в параметрическом прямоугольнике (фиг. 2) со сторонами π и $\pi | \tau | / 2$, на который конформно отображается физическая область течения при помощи функции [12]

$$z(\zeta) = \frac{H}{\pi} \ln \frac{\vartheta_4(\zeta + c)}{\vartheta_4(\zeta - c)} \quad (1.1)$$

Параметры a и $q = \exp(i\pi\tau)$ конформного отображения являются решением системы уравнений

$$l = 2 \frac{H}{\pi} \ln \frac{\vartheta_4(a - c)}{\vartheta_4(a + c)}, \quad \frac{\vartheta_4'(a - c)}{\vartheta_4(a - c)} - \frac{\vartheta_4'(a + c)}{\vartheta_4(a + c)} = 0, \quad c = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{h}{H} \right) \quad (1.2)$$

Производную от конформно отображающей функции можно записать в двух видах [12]

$$\frac{dz}{d\zeta} = - \frac{H}{\pi} \frac{\vartheta_1'(0) \vartheta_1(2c) \vartheta_1(\zeta - a) \vartheta_1(\zeta + a)}{\vartheta_4(a - c) \vartheta_4(a + c) \vartheta_4(\zeta - c) \vartheta_4(\zeta + c)} \quad (1.3)$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{H}{\pi} \left[\frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4} (\zeta + c) - \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4} (\zeta - c) \right] \quad (1.4)$$

где $\vartheta_1(\zeta)$ и $\vartheta_4(\zeta)$ — тэта-функции [9].

На проницаемых стенках канала выполняется линейная зависимость между продольной u и нормальной v компонентами скорости возмущенного потока [1], т. е. $v + k_1 u = 0$ ($v + k_2 u = 0$), где k_1 (k_2) — коэффициент проницаемости верхней (нижней) стенки канала. При $k_1 \rightarrow 0$ из данной зависимости получается граничное условие ($v = 0$) обтекания непротекаемой стенки, а при $k_1 \rightarrow \infty$ — свободной границы ($u = 0$).

В предположении, что коэффициенты проницаемости стенок канала $k_1 = k_2 = k$, получаем выражение комплексно-сопряженной скорости возмущенного потока [8]

$$\begin{aligned} F(\zeta) = & -v_\infty \alpha \frac{\vartheta_4(\zeta + c)}{\vartheta_4(\zeta + c + d)} \left\{ \left[\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} (\zeta - a) + \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4} (a + c + d) \right] \times \right. \\ & \times \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\vartheta_4(t + c + d)}{\vartheta_4(t + c)} dt + \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\vartheta_4(t + c + d)}{\vartheta_4(t + c)} \left[\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} (t - \zeta) - \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4} (t + c + d) \right] dt \right\}, \quad d = \pi\gamma \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\gamma = (\arctg k)/\pi$ — величина, область значения которой $(-0,5, 0,5)$.

Интегралы в (1.5) вычисляются методом особых точек [13]

$$\begin{aligned} F(\zeta) = & \frac{v_\infty \alpha}{\sin d} \left[\exp(id) + \frac{\vartheta_1(d) \vartheta_4(\zeta + c)}{\vartheta_1'(0) \vartheta_4(\zeta + c + d)} f(\zeta) \right] \\ f(\zeta) = & \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} (\zeta - a) + \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4} (a + c + d) - \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4} (\zeta + c) - \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} (d) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Функция (1.6) — двоякопериодическая с периодами π и $\pi\tau$, имеет простые полюсы в точках $\zeta = a$ и $\zeta = \pi - d + \pi\tau/2$. Следовательно, ее можно искать в виде [9]

$$f(\zeta) = C \frac{\vartheta_1(\zeta - a - d) \vartheta_4(\zeta + c + d)}{\vartheta_1(\zeta - a) \vartheta_4(\zeta + c)}$$

где действительная постоянная C определяется из условия обращения $F(\zeta)$ в точке $\zeta = \pi - c$ в нуль, т. е.

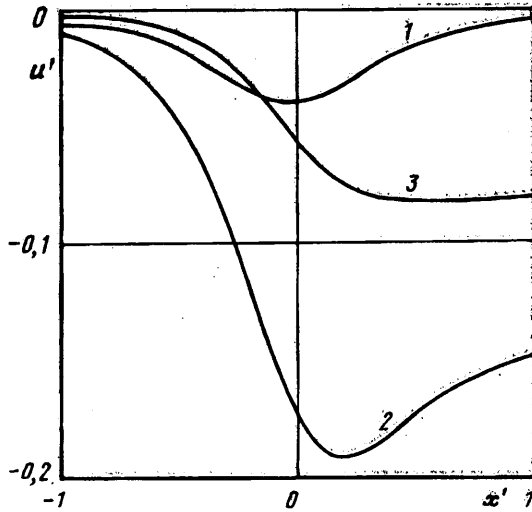
$$C = - \frac{\vartheta_1'(0) \vartheta_4(a + c)}{\vartheta_1(d) \vartheta_4(a + c + d)}$$

С учетом последних формул функция (1.5) преобразуется к виду

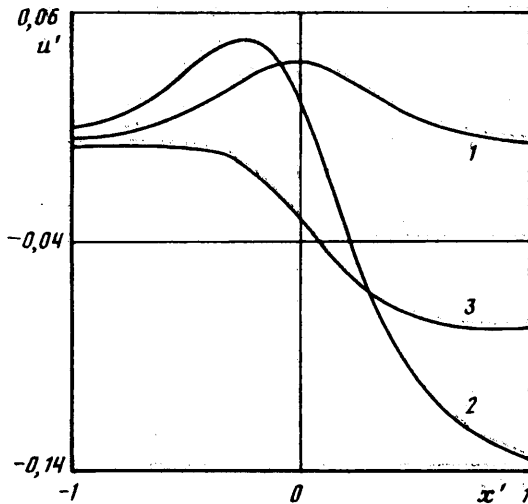
$$F(\zeta) = - \frac{v_\infty \alpha}{\sin d} \left[\exp(id) - \frac{\vartheta_4(a + c) \vartheta_1(\zeta - a - d)}{\vartheta_4(a + c + d) \vartheta_1(\zeta - a)} \right] \quad (1.7)$$

Путем предельного перехода при $d \rightarrow 0$ из (1.7) находим решение задачи в плоском канале с непротекаемыми стенками [12]

$$F(\zeta) = -v_\infty \alpha \left[i + \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} (\zeta - a) + \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4} (a + c) \right] \quad (1.8)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

а при $d = \pi/2$ — решение задачи об обтекании пластины струей

$$F(\zeta) = -v_\infty \alpha \left[i + \frac{\partial_4 (a+c) \partial_2 (\zeta-a)}{\partial_3 (a+c) \partial_1 (\zeta-a)} \right] \quad (1.9)$$

Выделяя действительную часть в (1.7)–(1.9) при $\xi = \xi + \pi/2$, нетрудно получить выражение для безразмерной величины $u' = u'/\alpha v_\infty$ — продольной компоненты скорости возмущенного потока на стенках канала.

На Фиг. 3 приведены графики распределения продольной скорости u' возмущенного потока на верхней стенке канала при $l/H = 0,1$ и $h/H = 0,5$ (кривая 1 соответствует значению $\gamma = 0$, кривая 2 — $0,2$, кривая 3 — $0,4$). При тех же значениях графики распределения u' на нижней стенке представлены на Фиг. 4.

2. Комплексный потенциал потока вблизи наклонной пластины. Поскольку граничные условия физической области течения в плоскости $z^0 = x^0 + iy^0$ сходятся на полосу с исключенным горизонтальным отрезком в плоскости $z = x + iy$, то с точностью до второго порядка малости по α вблизи пластины имеем

$$\frac{dz^*}{d\xi} = (1 + i\alpha) \frac{dz}{d\xi} \quad (2.1)$$

Из (1.3), (1.7) и (2.1) для производной комплексного потенциала находим выражение

$$\frac{dW}{d\xi} = v_\infty \left\{ (1 - \alpha \operatorname{ctg} d) \frac{dz}{d\xi} - \frac{\alpha}{\sin d} \frac{\vartheta_1'(0) \vartheta_1(2c)}{\vartheta_1(a-c) \vartheta_1(a+c+d)} \varphi(\xi) \right\} \quad (2.2)$$

$$\varphi(\xi) = \frac{\vartheta_1(\xi+a) \vartheta_1(\xi-a-d)}{\vartheta_1(\xi-c) \vartheta_1(\xi+c)} \quad (2.3)$$

Для вычисления комплексного потенциала приведем функцию $\varphi(\xi)$ к виду, удобному для интегрирования. Последнее возможно, если учесть, что функция (2.3) периодическая с периодом π , квазипериодическая с периодом πi и множителем $\exp(2id)$. Кроме того, она имеет простые полюсы в точках $\xi = c + \pi i/2$, $\xi = \pi - c + \pi i/2$ и простые нули в точках $\xi = \pi - a$, $\xi = a + d$. Поэтому на основании теоремы Вейерштрасса — Якоби [13] имеем

$$\varphi(\xi) = -P \frac{\vartheta_1'(0) \vartheta_1(\xi-c-d)}{\vartheta_1(d) \vartheta_1(\xi-c)} + \frac{\vartheta_1'(0) \vartheta_1(\xi+c-d)}{\vartheta_1(d) \vartheta_1(\xi+c)}$$

Используя разложения тэта-функций в ряды [9] и [14, формулы (417.2) и (417.4)], находим

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \frac{1-P}{\sin d} + 4P \sum_1^{\infty} \frac{q^n \sin [2n(\xi-c)-d] - q^{3n} \sin [2n(\xi-c)+d]}{1-2q^{2n} \cos 2d + q^{4n}} - \\ &- 4 \sum_1^{\infty} \frac{q^n \sin [2n(\xi+c)-d] - q^{3n} \sin [2n(\xi+c)+d]}{1-2q^{2n} \cos 2d + q^{4n}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$P = \frac{\vartheta_1(a+c) \vartheta_1(a-c+d)}{\vartheta_1(a-c) \vartheta_1(a+c+d)} \quad (2.5)$$

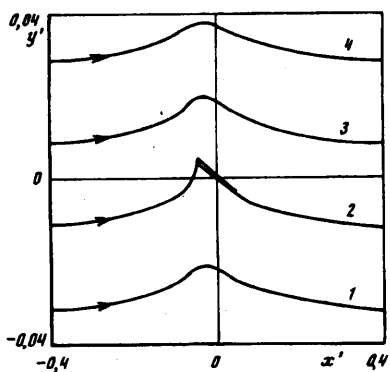
Таким образом, с учетом формул (1.4), (2.2), (2.4) и (2.5) находим комплексный потенциал потока вблизи наклонной пластины

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \frac{v_\infty H}{\pi} \left\{ 4(1 - \alpha \operatorname{ctg} d) \sum_1^{\infty} \frac{q^n \sin 2nc \sin 2n\xi}{n(1-q^{2n})} + \frac{\alpha}{\sin d} \left[\frac{P-1}{\sin d} \xi + \right. \right. \\ &+ 2P \sum_1^{\infty} \frac{q^n \cos [2n(\xi-c)-d] - q^{3n} \cos [2n(\xi-c)+d]}{n(1-2q^{2n} \cos 2d + q^{4n})} - \\ &\left. \left. - 2 \sum_1^{\infty} \frac{q^n \cos [2n(\xi+c)-d] - q^{3n} \cos [2n(\xi+c)+d]}{n(1-2q^{2n} \cos 2d + q^{4n})} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

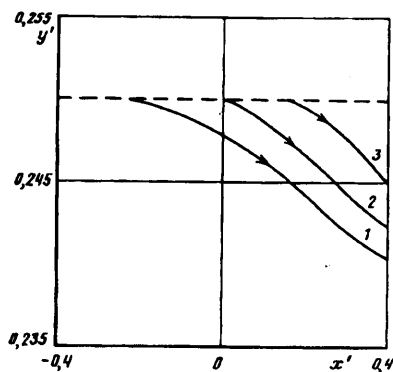
Здесь произвольная постоянная выбрана так, чтобы пластина являлась частью нулевой линии тока.

Из (2.6) нетрудно получить функцию тока вблизи пластины

$$\begin{aligned} \psi(\xi, \eta) &= \frac{v_\infty H}{\pi} \left\{ 4(1 - \alpha \operatorname{ctg} d) \sum_1^{\infty} \frac{q^n \sin 2nc \cos 2n\xi}{n(1-q^{2n})} \operatorname{sh} 2n\eta + \frac{\alpha}{\sin d} \left[\frac{P-1}{\sin d} \eta - \right. \right. \\ &- 2P \sum_1^{\infty} \frac{q^n \sin [2n(\xi-c)-d] - q^{3n} \sin [2n(\xi-c)+d]}{n(1-2q^{2n} \cos 2d + q^{4n})} \operatorname{sh} 2n\eta + \\ &\left. \left. + 2 \sum_1^{\infty} \frac{q^n \sin [2n(\xi+c)-d] - q^{3n} \sin [2n(\xi+c)+d]}{n(1-2q^{2n} \cos 2d + q^{4n})} \operatorname{sh} 2n\eta \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Совершая предельный переход при $d \rightarrow 0$ в (2.7), находим функцию тока вблизи пластины в канале с непротекаемыми стенками

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{v_{\infty} H}{\pi} \left\{ 4 \sum_1^{\infty} \frac{q^n \sin 2nc \cos 2n\xi}{n(1-q^{2n})} \operatorname{sh} 2n\eta + \left[P_0 \eta + \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \sum_1^{\infty} \frac{q^n (1+q^{2n}) \sin 2nc \sin 2n\xi}{n(1-q^{2n})^2} \operatorname{sh} 2n\eta \right] \right\}, \quad P_0 = 8 \sum_1^{\infty} \frac{nq^n \sin 2nc \sin 2na}{1-q^{2n}}$$

Вычисленные по формуле (2.7) линии тока вблизи пластины, наклоненной под углом $\alpha = -5^\circ$ и при $l/H = 0,1$, $h/H = 0,5$, $\gamma = 0,25$ приведены на фиг. 5 (кривая 1 соответствует постоянному значению $\psi/Hv_{\infty} = -0,02$, кривая 2 — 0, кривая 3 — 0,02, кривая 4 — 0,04).

3. Комплексный потенциал потока вблизи проницаемых стенок канала. Вблизи стенок канала производные $dz'/d\xi$, $dz'/d\zeta$ с точностью до второго порядка малости по α равны, поэтому, опуская подробные преобразования, запишем окончательное выражение функции тока вблизи стенок канала

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{v_{\infty} H}{\pi} \left\{ 4(1 - \alpha \operatorname{ctg} d) \sum_1^{\infty} \frac{q^n \sin 2nc \cos 2n\xi}{n(1-q^{2n})} \operatorname{sh} 2n\eta + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{\sin d} \left[\frac{P-1}{\sin d} \eta - 2P \sum_1^{\infty} \frac{q^n \sin [2n(\xi - c) - d] - q^{3n} \sin [2n(\xi - c) + d]}{n(1 - 2q^{2n} \cos 2d + q^{4n})} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \operatorname{sh} 2n\eta + 2 \sum_1^{\infty} \frac{q^n \sin [2n(\xi + c) - d] - q^{3n} \sin [2n(\xi + c) + d]}{n(1 - 2q^{2n} \cos 2d + q^{4n})} \operatorname{sh} 2n\eta \right] - \right. \\ \left. - 4\alpha \sum_1^{\infty} \frac{q^n \sin 2nc \sin 2n\xi}{n(1-q^{2n})} \operatorname{ch} 2n\eta \right\} \quad (3.1)$$

В случае, когда стенки канала непротекаемые, из (3.1) получаем выражение для функции тока вблизи стенок канала

$$\psi(\xi, \eta) = 4 \frac{v_{\infty} H}{\pi} \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{q^n \sin 2nc \cos 2n\xi}{n(1-q^{2n})} \operatorname{sh} 2n\eta + \left[2 \sum_1^{\infty} \frac{nq^n \sin 2nc \sin 2na}{1-q^{2n}} \eta - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_1^{\infty} \frac{q^n \sin 2nc \sin 2n\xi}{n(1-q^{2n})} \operatorname{ch} 2n\eta + 4 \sum_1^{\infty} \frac{q^n (1+q^{2n}) \sin 2nc \sin 2n\xi}{n(1-q^{2n})^2} \operatorname{sh} 2n\eta \right] \right\} \quad (3.2)$$

Из (3.1) получаем расход жидкости на бесконечности справа от канала

$$Q = \psi(c + 0, \pi\tau/2) - \psi(c - 0, \pi\tau/2) = \alpha v_{\infty} H (P - 1) \operatorname{ctg} d$$

Линии тока вблизи верхней стенки канала при $\alpha = -5^\circ$, $l/H = 0,1$, $h/H = 0,25$, $\gamma = 0,25$ приведены на фиг. 6 (кривая 1 соответствует значению $\psi/Hv_{\infty} = 0,2629$, кривая 2 — 0,2596, кривая 3 — 0,2573).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lo C. F.* Wind-tunnel wall interference reduction by streamwise porosity distribution//AIAA Journal. 1972. V. 10. № 4. С. 547—550. (Рус. перев.: Уменьшение влияния стенок аэродинамической трубы с использованием перфорированных стенок//Ракетная техника и космонавтика, 1972. Т. 10. № 4. С. 231—235).
2. *Быркин А. П., Межиров И. И.* Численное исследование индукции проницаемых стенок рабочей части аэродинамической трубы малых скоростей//Уч. зап. ЦАГИ. 1977. Т. 8. № 6. С. 31—40.
3. *Goethert V. H.* Transonic wind tunnel testing. Oxford: Pergamon Press, 1961. 397 p.
4. *Галанин А. В., Ильин О. В.* Граничные задачи обтекания гидродинамических особенностей в каналах с перфорированными стенками.— Деп. в ВИНТИ 18.07.91, № 3055—В91.
5. *Маревцева Н. А.* Обтекание тонкого профиля в канале с проницаемыми стенками//Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 2. С. 111—117.
6. *Галанин А. В., Гусев В. А.* Линейные задачи об индукции перфорированных каналов//Актуальные задачи гидродинамики. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1989. С. 52—61.
7. *Ивченко В. М., Кулак А. П.* О размерах каверны в трубах со сплошными и перфорированными стенками//Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 2. С. 163—167.
8. *Васильев В. Н., Ильин О. В.* Влияние проницаемости стенок канала на гидродинамические характеристики пластины.— Деп. в ВИНТИ 03.08.92, № 2515—В92.
9. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
10. *Васильев В. Н., Галанин А. В., Ильин О. В.* Влияние проницаемости стенок канала на геометрические и гидродинамические характеристики кавитирующего профиля//Высшая школа — народному хозяйству Чувашии. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1992. С. 24—25.
11. *Ильин О. В.* Построение тонкого профиля в канале с проницаемыми стенками по заданному распределению давления//Молодые ученые — науке. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1993. С. 19—124.
12. *Галанин А. В., Терентьев А. Г.* Влияние границ потока на гидродинамические характеристики тонкого профиля//Вопросы прикладной математики и механики. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1974. Вып. 3. С. 40—65.
13. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
14. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1977. 224 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию
15.IX.1993