

УДК 532.59

© 1995 г. С. В. НЕСТЕРОВ

## ЗАДАЧА КОШИ — ПУАССОНА ДЛЯ ВЫНУЖДЕННЫХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Л. Н. Сретенским методом Линшtedта — Пуанкаре дано приближенное решение задачи Коши — Пуассона для свободных волн конечной амплитуды, которое построено так, что в нем отсутствуют вековые члены [1]. Тем же методом решалась задача Коши — Пуассона в работе [2], но для несколько измененных начальных условий. Представляется естественным обобщить результаты [1] на случай вынужденных волн конечной амплитуды и описать их развитие во времени. Для решения этой задачи в данной статье использовался метод Крылова — Боголюбова, с помощью которого исследованы основной и субгармонический резонансы.

Рассмотрим бесконечно глубокую жидкость, ограниченную двумя вертикальными стенками, разделенными расстоянием  $l$ . Предположим, что свободная поверхность в невозмущенном состоянии горизонтальна. Жидкость предполагается идеальной и несжимаемой. На частицы жидкости действует сила тяжести, ускорение которой  $g$ . Систему координат  $xu$  выберем так: ось  $x$  совпадает с невозмущенной горизонтальной свободной поверхностью и перпендикулярна стенкам, ось  $y$  направлена вертикально вверх. Начало координат помещается на левую стенку, ограничивающую жидкость. В начальный момент времени частицам жидкости сообщены некоторые скорости, а к свободной поверхности приложено давление  $P = P_0 \sin \Omega t \cos n\pi x/l$ , где  $n$  — целое число. Требуется найти последующее движение жидкости и, в частности, вид свободной поверхности. При этом не ограничиваемся волнами бесконечно малой амплитуды, однако считаем движение жидкости двумерным. Поскольку на поверхности жидкости интенсивные волны развиваются в том случае, когда частота внешнего воздействия  $\Omega$  близка к одной из собственных частот линейных волн  $\omega_n$ , то именно этот случай будет рассмотрен вначале.

В дальнейших вычислениях используем безразмерные переменные, выбирая в качестве масштабов длины  $l$ , времени  $\sqrt{l/g}$  и давления  $P_0$ . При таком выборе естественно получается безразмерный параметр  $\varepsilon \approx nP_0/\rho gl$ , где  $\rho$  — плотность жидкости. Примем, что  $\varepsilon \ll 1$ , т. е. амплитуда внешнего давления мала по сравнению с характерным давлением, создаваемым силой тяжести.

Уравнения движения в безразмерных переменных записываем в форме Лагранжа

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 1 \right) \frac{\partial y}{\partial a} &= - \frac{\partial P}{\partial a} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial b} + \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 1 \right) \frac{\partial y}{\partial b} &= - \frac{\partial P}{\partial b} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{D(x, y)}{D(a, b)} = 1$$

Начальные условия при  $t = 0$

$$x = 0, y = b, \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial b} \quad (2)$$

$$\varphi(a, b) = \varepsilon^{1/3} \frac{\omega_n}{n} A_0 e^{nb} \cos na \quad (3)$$

где  $A_0$  — произвольная постоянная  $\omega_n$  и  $n$  введены для удобства.

Заметим, что в [1] задача Коши — Пуассона для свободных волн конечной амплитуды решена при начальном потенциале (3), поэтому результаты, полученные в настоящей работе, допускают простое сравнение с результатами Л. Н. Сретенского.

Краевые условия

$$x(0, b, t) = 0, x(\pi, b, t) = \pi, b \rightarrow -\infty, x \rightarrow a, y \rightarrow b \quad (4)$$

$$P(a, 0, t) = \frac{\varepsilon}{n} \cos na \sin \Omega t + \varepsilon^{4/3} \dots \quad (5)$$

Введением новых переменных уравнения (1) преобразуются к виду

$$x = a + \xi, y = b + \eta, H = P + y \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial H}{\partial a} + \frac{D(\eta, H)}{D(a, b)}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial H}{\partial b} - \frac{D(\xi, H)}{D(a, b)}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} = -\frac{D(\xi, \eta)}{D(a, b)} \quad (7)$$

Из начальных (2) и краевых условий (4), (5) имеем

$$\xi(a, b, 0) = \eta(a, b, 0) = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varepsilon^{1/3} \omega_n A_0 e^{nb} \sin na, \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\varepsilon^{1/3} \omega_n A_0 e^{nb} \cos na \quad (8)$$

$$\xi(0, b, t) = \xi(\pi, b, t) = 0, \xi, \eta|_{b \rightarrow -\infty} \rightarrow 0$$

$$H - \eta|_{b=0} = \frac{\varepsilon}{h} \cos na \sin \Omega t + \dots \quad (9)$$

Для приближенного решения системы (7), удовлетворяющего условиям (8) — (9), используем теорему Малкина и метод Крылова — Боголюбова [3]. С помощью теоремы Малкина устанавливается, что ряды, представляющие искомое решение, должны быть построены в случае основного резонанса  $\Omega \sim \omega_n$  по степеням  $\varepsilon^{1/3}$ . Опуская традиционные вычисления, запишем найденные нами ряды, удерживая степени  $\varepsilon^{2/3}$

$$x = a + \varepsilon^{1/3} A e^{nb} \sin na \sin \psi + \varepsilon^{2/3} O + \dots$$

$$y = b - \varepsilon^{1/3} A e^{nb} \cos na \sin \psi + \varepsilon^{2/3} \frac{nA^2}{4} (1 - \cos 2\psi) e^{2nb} + \dots \quad (10)$$

$$H = -\varepsilon^{1/3} A e^{nb} \cos na \sin \psi + \varepsilon^{2/3} \left[ \frac{n}{2} A^2 \cos 2\psi + \frac{nA^2}{4} (1 - 3 \cos 2\psi) e^{2nb} \right] + \dots$$

$$\psi = \Omega t + \vartheta.$$

Амплитуда  $A$  и фаза  $\vartheta$  должны быть найдены согласно методу Крылова — Боголюбова как решение следующей системы уравнений:

$$\frac{dA}{dt} = -\varepsilon^{23} \frac{\omega_n}{2n} \sin \vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_n - \Omega - \varepsilon^{23} \frac{\omega_n}{2nA} \cos \vartheta - \varepsilon^{23} \frac{\omega_n}{8} n^2 A^2 \quad (11)$$

где  $\omega_n = \sqrt{n}$  — частота свободных волн бесконечно малой амплитуды.

Для того чтобы выполнялись поставленные начальные условия (8), система (11) должна быть решена при следующих условиях:

$$A(0) = A_0, \quad \vartheta(0) = 0 \quad (12)$$

Приведем систему (11) к гамильтоновой форме, вводя новые переменные

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{\partial M}{\partial Y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \tau} = -\frac{\partial M}{\partial X} \quad (13)$$

$$M = \frac{\Omega - \omega_n}{2\varepsilon^{23}\omega_n} (X^2 + Y^2) + \frac{X}{2n} + \frac{n^2}{32} (X^2 + Y^2)^2 \quad (14)$$

$$\tau = \varepsilon^{23}\omega_n t, \quad X = A \cos \vartheta, \quad Y = A \sin \vartheta$$

Первым интегралом системы (13) является сама функция Гамильтона  $M = \text{const}$ , которая в переменных  $A$  и  $\vartheta$  записывается так

$$M = \frac{\Omega - \omega_n}{2\varepsilon^{23}n} A^2 + \frac{A \cos \vartheta}{2n} + \frac{n^2 A^4}{32} \quad (15)$$

Исключая с помощью первого интеграла (15) фазу  $\vartheta$ , получим неявную зависимость амплитуды  $A$  от медленного времени  $\tau$  в виде квадратуры

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda^2} \left[ \zeta - 4n^2 \left( M - \lambda \zeta - \frac{n^2 \zeta^2}{32} \right)^2 \right]^{-1/2} d\zeta = \pm \frac{\tau}{n} \quad (16)$$

$$\lambda = \frac{\Omega - \omega_n}{2\varepsilon^{23}\omega_n} \quad (17)$$

Интеграл, стоящий в левой части равенства (16), эллиптический и может быть приведен к стандартной форме, однако получаются малообразимые формулы. Поэтому нагляднее исследовать поведение решений системы (11) или (13) на фазовой плоскости, а затем дать численные примеры, характеризующие изменение амплитуды  $A$  со временем.

Система (11) имеет стационарные решения

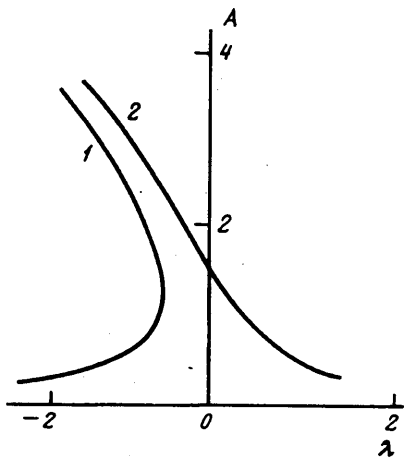
$$\vartheta = 0, \quad \lambda = -\frac{1}{2nA} - \frac{n^2 A^2}{8} \quad (18)$$

$$\vartheta = \pi, \quad \lambda = \frac{1}{2nA} - \frac{n^2 A^2}{8} \quad (19)$$

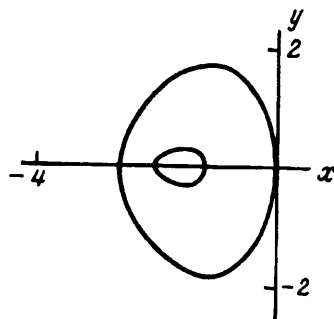
На плоскости  $\lambda, A$  уравнения (18), (19) определяют зависимость амплитуды стационарных колебаний от частоты внешнего давления. Случай  $\vartheta = 0$  представлен кривой 1 на фиг. 1, где по горизонтальной оси отложена «расстройка»  $\lambda$ . В точке  $\lambda = -3/2^{2/3}$ ,  $A = \sqrt[3]{2}/n$  имеется вертикальная касательная.

Случай  $\vartheta = \pi$  представлен кривой 2 на фиг. 1. В точке  $\lambda = 0$ , что соответствует резонансу в линейной системе, амплитуда  $A = 2^{2/3}/n$ . При  $\lambda > -3/2^{2/3}$  имеется одно стационарное решение, а при  $\lambda < -3/2^{2/3}$  — три стационарных решения.

Для случая одного стационарного решения картина фазовых траекторий изображена на фиг. 2. Стационарное решение является центром. Уравнения фазовых траекторий даются (14) в декартовых координатах или (15) в полярных.



Фиг. 1



Фиг. 2

Все фазовые траектории замкнуты, поэтому при любых начальных условиях амплитуда  $A$  изменяется периодически и ограничена во времени.

Когда имеются три стационарных решения, решениям с наименьшей и наибольшей амплитудами соответствуют центры, а со средней амплитудой — седловая точка на фиг. 3. Последнее решение неустойчиво и не может быть реализовано. По-прежнему все фазовые траектории замкнуты. Поэтому при любых начальных условиях амплитуда ограничена во времени. Согласно (16), амплитуда волны  $A$  периодически изменяется во времени.

Приведем результаты численного интегрирования, которые определяют время изменения амплитуды от начального до максимального значения. Пусть  $n = 1$ ;  $\lambda = -0,75$ ;  $A_0 = 0,5$ ;  $\vartheta_0 = 0$ . Из интеграла (15) определяется  $A_{\max} = 0,9838$ . Численное интегрирование согласно (16) дает время перехода от начального значения амплитуды к  $A_{\max}$ :

$$T = \frac{0,9877}{\omega_1 \varepsilon^{2/3}}$$

$$n = 1, \lambda = -0,75, A_0 = 2,0, \vartheta = \pi, A_{\max} = 3,3179, T = \frac{5,3786}{\omega_1 \varepsilon^{2/3}}$$

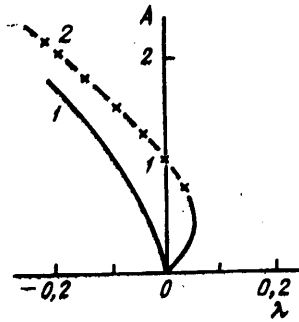
После того как квадратурой (16) определится зависимость амплитуды  $A$  от «медленного» времени, используя (15), можно выразить фазу  $\vartheta$  как функцию «медленного» времени.

Положив в (10)  $b = 0$  и исключив  $a$ , получим в явном виде уравнение свободной поверхности

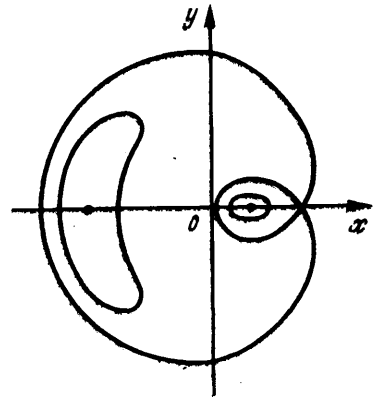
$$y = -\varepsilon^{2/3} A \sin(\Omega t + \vartheta) \cos nx + \varepsilon^{2/3} \frac{nA^2}{4} [1 - \cos(2\Omega t + 2\vartheta)] \cos 2nx \quad (20)$$

Из (20) следует, что узловые точки свободной поверхности периодически перемещаются со временем. В противоположность этому абсциссы гребней остаются фиксированными во времени.

Выше был рассмотрен главный резонанс  $\Omega \sim \omega_n$ , однако возможны также демумльтипликационные резонансы на частотах  $1/2\Omega \sim \omega_n$ ,  $1/3\Omega \sim \omega_n$ . Случай  $1/2\Omega \sim \omega_n$  принято называть параметрическим резонансом, он подробно изучен в [4].



Фиг. 3



Фиг. 4

Не повторяя всех вычислений, аналогичных изложенным выше, приведем основные результаты, относящиеся к дробному резонансу  $1/3\Omega \sim \omega_n$ .

Начальные смещения и скорости задаются в виде

$$x = a - \frac{\varepsilon}{8} e^{nb} \sin na, \quad y = b + \frac{\varepsilon}{8} e^{nb} \cos na$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\frac{\partial \varphi}{\partial a}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\frac{\partial \varphi}{\partial b}, \quad \varphi(a, b) = \varepsilon \frac{\omega_n}{n} A_0 e^{nb} \cos na \quad (21)$$

Первые члены рядов, представляющих решение, имеют вид

$$x = a - \varepsilon [1/8 \cos 3(\psi - \vartheta) + A \cos \psi] e^{nb} \sin na + \dots$$

$$y = b + \varepsilon [1/8 \cos 3(\psi - \vartheta) + A \cos \psi] e^{nb} \cos na + \dots \quad (22)$$

$$H = \varepsilon [1/8 \cos 3(\psi - \vartheta) + A \cos \psi] e^{nb} \cos na + \dots$$

$$\psi = 1/3\Omega t + \vartheta$$

Изменение амплитуды  $A$  и фазы  $\vartheta$  определяется системой уравнений

$$\frac{dA}{d\tau} = \gamma_1 A^2 \cos 3\vartheta$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = -\lambda + \gamma_2 - \left( \frac{n^2 A^2}{8} + \gamma_1 A \sin 3\vartheta \right) \quad (23)$$

$$\tau = \varepsilon^2 \omega_n t; \quad \lambda = \frac{1/3\Omega - \omega_n}{\varepsilon^2 \omega_n}; \quad \gamma_1 = n \frac{103}{1024}, \quad \gamma_2 = \frac{17n^2}{512}.$$

Система (23) также приводится к гамильтоновой форме с помощью переменных  $X = A \cos \vartheta$ ,  $Y = A \sin \vartheta$ . Функция Гамильтона в переменных  $A$ ,  $\vartheta$  имеет вид

$$M = \frac{1}{2} (\lambda - \gamma_2) A^2 + \gamma_1 \frac{A^3}{3} \sin 3\vartheta + \frac{n^2}{32} A^4 \quad (24)$$

Интеграл  $M = \text{const}$  позволяет проинтегрировать систему (23) в квадратурах. Все фазовые кривые  $M = \text{const}$  замкнуты, поэтому при любых начальных условиях амплитуда  $A$  ограничена во времени.

Существуют две группы стационарных решений

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{6}; \quad \vartheta_2 = \frac{5\pi}{6}; \quad \vartheta_3 = -\frac{\pi}{2}; \quad \lambda = \gamma_2 - \left( \frac{n^2 A^2}{8} + \gamma_1 A \right) \quad (25)$$

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{6}; \theta_2 = \frac{\pi}{2}; \theta_3 = -\frac{5\pi}{6}; \lambda = \gamma_2 - \left( \frac{n^2 A^2}{8} - \gamma_1 A \right) \quad (26)$$

Зависимость стационарных амплитуд от величины расстройки изображена на фиг. 4 (кривые 1 и 2 построены по формулам (25) и (26)). Верхняя часть кривой соответствует центрам на фазовой плоскости  $X, Y$ , поэтому режимы, определяемые этой частью кривой, устойчивы. Все остальные — неустойчивы и физически не могут быть реализованы.

Если  $n = 1, \lambda = 0$ , то из (26) находим амплитуду устойчивого стационарного режима  $A = 1,0905$ , что примерно в 8,7 раза больше, чем амплитуда колебаний с частотой  $\Omega$ , как это следует из (22).

Если  $h = 1, \lambda = -0,25$ , то  $A = 2,4449$ , что примерно в 20 раз больше, чем амплитуда колебаний с частотой  $\Omega$ .

Таким образом возможно возбуждение волн на субгармонике  $1/3\Omega$ , однако условия менее благоприятны, чем в случае основного резонанса, по следующим причинам: резонансная зона более узкая, ее порядок  $\sim e^2\omega_n$ , а время «раскачки»  $\tau \approx 2\pi/e^2\omega_n$ , значительно больше, чем для основного резонанса.

Построенное приближенное решение задачи Коши — Пуассона для вынужденных волн конечной амплитуды не содержит вековых членов и показывает характерные особенности этих волн.

1. При любых начальных условиях, налагаемых на амплитуду волны  $A$ , возвышение поверхности остается ограниченным.

2. В отличие от линейных вынужденных волн при точном резонансе  $\Omega = \omega_n$  существует конечное стационарное значение амплитуды волны.

3. Возможно возбуждение субгармонических волн на частоте, близкой к  $\Omega/3$ , причем их стационарная амплитуда может быть во много раз больше амплитуды вынужденных волн на частоте  $\Omega$ , вычисляемых по линейной теории.

4. Условия возбуждения субгармонической волны на частоте  $\Omega/3$  менее благоприятны, чем на основной частоте  $\Omega$ .

5. Не существует математически строгих оценок, показывающих, насколько построенное по методу Крылова — Боголюбова приближенное решение уравнений гидродинамики отличается от истинного. Однако многочисленные эксперименты, проведенные для случая параметрического резонанса, показывают, что решения, полученные по методу Крылова — Боголюбова, весьма точно описывают наблюдаемые явления.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сретенский Л. Н. Задачи Коши — Пуассона для волн конечной амплитуды // Тр. Морского гидрофиз. ин-та АН СССР. 1961. Т. 24. С. 5—24.
2. Грекова Н. О. Задача Коши — Пуассона в нелинейной постановке // Вестн. МГУ, Сер. I. Математика, механика. 1963. № 5. С. 68—80.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.
4. Bordakov G. A., Cekerzh-Zenscovich S. Ya. Nonlinear Faraday resonance in two-layer fluid of finite depth: Preprint № 475. M.: Inst. Probl. in Mech. Acad. Sci. USSR, 1990. 18 p.
5. Калинин В. А., Нестеров С. В., Секерж-Зенькович С. Я., Чайковский А. А. Экспериментальное исследование параметрического возбуждения поверхностных волн.: Препринт № 23. М.: Ин-т пробл. механ., 1985. 56 с.