

УДК 532.546

© 1995 г. М. Б. ПАНФИЛОВ

## КОМБИНАЦИЯ МЕТОДА ГОМОГЕНИЗАЦИИ И ЭФФЕКТИВНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОЛЕ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Методами теории осреднения исследуются модели, описываемые параболическими уравнениями с быстро осциллирующей неперидической правой частью. Для неперидического поля возмущений развит комбинированный метод гомогенизации и эффективной среды, позволяющий получить решение задач на ячейках в конечном виде с точностью до второго порядка включительно по параметру неоднородности. Метод применен к задачам одно- и двухфазной фильтрации. Изложена техника метода, построены явные решения задач на ячейках.

С позиций теории осреднения рассматриваются параболические уравнения с быстроосциллирующей неперидической правой частью, которые имеют особое значение для процессов фильтрации в нефтегазовых пластах, разрабатываемых плотными сетками скважин. Дискретные системы стоков, играющие роль осциллирующей в пространстве системы возмущений, создают неоднородное поле давлений, которое можно представить в виде макроскопической медленно меняющейся в пространстве составляющей в масштабах всего пласта (макромасштаб) и осциллирующей составляющей, порожденной стоками, с характерным масштабом осцилляций порядка расстояния между скважинами (микромасштаб процесса). Если отношение  $\varepsilon$  микромасштаба к макромасштабу мало, то возможна гомогенизация системы. В этом случае, однако, интерес представляет не только осредненная модель, которая является нулевым приближением асимптотических разложений при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , но и детальное описание осциллирующей составляющей (первое приближение), т. е. локальных воронок депрессии вокруг стоков. Совокупность осредненной модели и модели для осциллирующей составляющей называется далее асимптотической моделью процесса, или осредненной моделью первого порядка.

Рассматривается случай неперидического поля возмущений, для которого развит приближенный комбинированный метод гомогенизации и эффективной среды, позволяющий получить решение задач на ячейках в конечном виде.

Случай малых  $\varepsilon$  имеет особый практический интерес, так как густые сетки скважин характерны для крупных месторождений нефти и газа, численное моделирование которых наиболее трудоемко.

Возможности методов численного моделирования фильтрации в подземных пластах с плотной системой стоков ограничены, так как требуется использовать две вложенные сетки: крупномасштабную, моделирующую усредненное поведение пласта, и мелкомасштабную вблизи каждого стока. В работах [1—4] предлагалось в разностные схемы для крупномасштабных сеток включать различные аналитические решения, описывающие структуру течения только в стоковых ячейках. Проблема заключается в сшивании этих внутренних решений с внешним.

Предлагаемый метод осреднения автоматически решает проблему сшивания.

1. Описание неоднородного поля возмущений. Рассмотрим линейное уравнение однофазной фильтрации

$$L_p \equiv b(x) \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a(x) \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = -q \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right), \quad x \in \Omega \subseteq R^2 \quad (1.1)$$

где функция  $q$  интерпретируется как интенсивность системы стоков, а  $\varepsilon$  — характерное расстояние между ними. Функции  $a(x)$  и  $b(x)$  непрерывные медленно меняющиеся.

Будем считать, что в области  $\Omega$  имеется дискретная система стоков, позволяющая разбить всю область  $\Omega$  на  $N$  ячеек  $\{\Omega_k\}_{k=1}^N$  одинакового размера и формы, так что внутри одной ячейки находится не более одного стока. Очевидно, что для любой дискретной системы точечных стоков всегда можно найти такую покрывающую сеть, которая обеспечит требуемое разбиение. Вопрос о единственности такого разбиения остается открытым и требует специального исследования. Характерный линейный размер области  $\Omega$  есть  $L$ .

В качестве характерного масштаба неоднородности  $l$  выберем линейный размер такой ячейки. Для густых сеток стоков существенно условие  $0 < \varepsilon \ll 1$ , где  $\varepsilon = l/L$ .

Такие построения позволяют рассматривать функцию  $q$  как быстро осциллирующее поле, имеющее следующее представление:

$$q(x, t; \varepsilon) = q^{(0)}(x, t) + \sum_{k=1}^N q_k\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) \delta_k(x) \quad (1.2)$$

Здесь  $q^{(0)}(x, t)$  — неосциллирующая составляющая,  $q_k(x/\varepsilon, t)$  —  $\varepsilon$ -периодические функции, каждая из которых образована как периодическое продолжение на всю область  $\Omega$  сегмента функции  $q$  над ячейкой  $\Omega_k$ ; функции  $\delta_k(x)$  определены согласно соотношению

$$\delta_k(x) = 1, \quad x \in \Omega_k; \quad \delta_k(x) = 0, \quad x \notin \Omega_k; \quad \sum_{k=1}^N \delta_k(x) \equiv 1 \quad (1.3)$$

Представление (1.2) описывает как непрерывно, так и дискретно распределенные системы стоков. В последнем случае, если стоки точечные и  $\xi^k \equiv \{\xi_1^k, \xi_2^k, \xi_3^k\}$  — локальные координаты стока в ячейке  $\Omega_k$ , для  $q_k$  имеет место:  $q_k(x/\varepsilon, t) = q_k^*(t) \delta(\xi^k)$ , где  $q_k^*(t) + q^{(0)}(\xi^k, t)$  — интенсивность  $k$ -го точечного источника,  $\delta$  — дельта-функция.

Для анализа влияния неоднородности системы стоков в чистом виде предположим, что функции  $a(x)$  и  $b(x)$  являются медленно меняющимися, так что масштаб их осцилляций больше, чем расстояние между скважинами. Начальные и граничные условия не ставятся, так как асимптотическая модель от них не зависит.

Требуется построить осредненное уравнение для (1.1)—(1.2) и первое приближение для осциллирующей составляющей. Техника сводится к построению асимптотического разложения при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

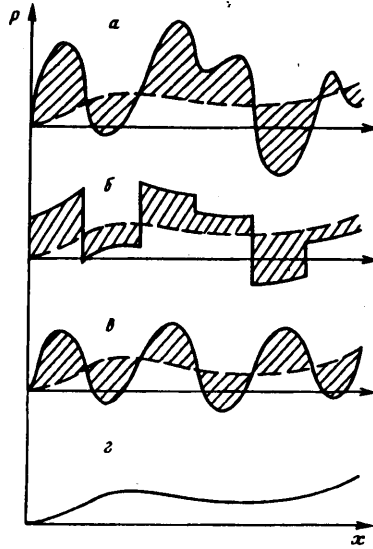
Поскольку все ячейки  $\Omega_k$  одинаковы, любой ячейке  $\Omega_k$  ставится в соответствии ячейка  $Y$ , которая получается из  $\Omega_k$  растяжением каждой ее стороны в  $1/\varepsilon$  раз и имеет единичный объем при любом  $k$ .

Рассмотрим произвольную функцию  $p(x, x/\varepsilon, t)$ , имеющую представление, аналогичное (1.2)

$$p(x, y, t) = p^{(0)}(x, t) + \sum_{k=1}^N p_k(y, t) \delta_k(x), \quad y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (1.4)$$

где  $p^{(0)}(x, t)$  — неосциллирующая составляющая,  $p_k(y, t)$  — 1-периодические функции по переменным  $y$ .

Набор периодических компонент  $\{p_k\}_{k=1}^N$  назовем ансамблем реализаций функции  $p' \equiv p - p^{(0)}$ . Они подчиняются определенным условиям, которые формулируются далее. Будем считать, что для произвольной функции  $p_k$  из ансамбля определены номера  $k'$  функций, являющихся ее ближайшими соседями.



Фиг. 1

Из условий непрерывности и гладкости функции  $p$  вытекают следующие условия сопряжения для произвольной  $k$ -й функции ансамбля:

$$p_k|_{\partial Y} = p_k'|_{\partial Y}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial n}|_{\partial Y} = \frac{\partial p_k'}{\partial n}|_{\partial Y} \quad (1.5)$$

для всех ближайших соседей. Здесь  $n$  — нормаль к границе  $\partial Y$ .

2. Осреднение по ячейке, ансамблю и двойное осреднение. Для описания метода осреднения введем три типа операций осреднения.

Осреднением по ячейке  $Y$  назовем операцию

$$\langle \cdot \rangle \equiv \int_Y (\cdot) dy = \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega_k} (\cdot) dx, \quad \forall k, y \equiv \frac{x}{\varepsilon}$$

где  $|\Omega_0|$  и  $|\Omega|$  — объемы ячейки и всей области. Осреднение по ячейке приводит к осциллирующей кусочно-постоянной функции

$$\langle p \rangle = p^{(0)}(x, t) + \sum_{k=1}^N \langle p_k \rangle \delta_k(x) \quad (2.1)$$

На фигуре изображены исходная осциллирующая непериодическая функция  $p(x, y, t)$  и осредненная по ячейкам (фигура, а и б).

Осреднением по ансамблю для функций вида (2.1) назовем операцию

$$\{p\}(x, y, t) = p^{(0)}(x, t) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N p_k \quad (2.2)$$

Эта операция заменяет в сумме (1.4) каждую индивидуальную составляющую  $p_k$  на одну и ту же среднеарифметическую функцию от всех  $p_k$ . В самом деле

$$\begin{aligned} p'(x, y, t) &\equiv \{p\}(x, y, t) - p^{(0)}(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N p_k = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N p_k \sum_{m=1}^N \delta_m(x) = \sum_{m=1}^N \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N p_k \right) \delta_m(x) \end{aligned}$$

здесь использовано свойство (1.3).

Осреднение по ансамблю переводит функцию в периодическую (фигура, в). Двойным осреднением назовем операцию усреднения по ячейке и ансамблю

$$\langle\langle p \rangle\rangle = p^{(0)}(x, t) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle p \rangle_k \quad (2.3)$$

Лишь двойное осреднение переводит функцию в неосциллирующую 1. Функция  $\langle\langle p \rangle\rangle$  изображена на фигуре, з.

Неосциллирующую составляющую всегда можно выбрать так, чтобы  $\langle\langle p \rangle\rangle = p^{(0)}(x, t)$ .

Тогда на функции ансамбля накладывается дополнительное ограничение

$$\langle p' \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle p_k \rangle = 0 \quad (2.4)$$

Операции  $\langle \cdot \rangle$  и  $\{ \cdot \}$  коммутируют.

Для представления (1.2) неосциллирующую составляющую неоднородного поля стоков определим как

$$q^{(0)} = \langle\langle q \rangle\rangle, \quad q' \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N q_k, \quad \langle q' \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle q_k \rangle = 0 \quad (2.5)$$

3. Асимптотические разложения, техника метода. Разложение при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решения уравнения (1.1) строим в виде

$$p = p_0(x, t) + \varepsilon^2 p_2(x, y, t) + \varepsilon^3 p_2(x, y, t) + \dots \equiv p^{(0)}(x, t) + p'(x, y, t) \quad (3.1)$$

$$p_0(x, t) = p^{(0)}(x, t) + p_0'(x, t), \quad p' = p_0'(x, t) + \varepsilon^2 p_2(x, y, t) + \varepsilon^3 p_3 + \dots$$

где  $p^{(0)}(x, t)$  является неосциллирующей составляющей и потому совпадает с двойным средним, а  $p'$  — функция осцилляций

$$p^{(0)}(x, t) = \langle\langle p \rangle\rangle, \quad \langle\langle p' \rangle\rangle = 0, \quad k \geq 0$$

Легко показать обычной техникой, что в разложении (3.1) составляющая  $\varepsilon p_1(x, y, t) \equiv 0$ .

Как обычно, переменные  $x$  и  $y$  считаются формально независимыми; вводятся расширенная функция  $p \sim(x, y, t)$  и расширенный оператор и ищется асимптотическое разложение решения расширенной задачи

$$L_{\varepsilon} \tilde{p} \equiv \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - b \frac{\partial}{\partial t} \right] + \varepsilon \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a \frac{\partial}{\partial y_i} \right) + a \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial x_i} \right] + a(x) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_i} \quad (3.2)$$

$$L_{\varepsilon} \tilde{p} \sim = -\varepsilon^2 \left[ q^{(0)}(x, t) + \sum_{k=1}^N q_k(y, t) \delta_k(x) \right], \quad p \sim|_{t=0} = p^{(0)}$$

с дополнительными условиями: для функции  $p \sim$  существует разложение по реализациям (1.4); каждая реализация  $p_k$  удовлетворяет условиям периодичности по  $y$ ; каждая реализация  $p_k$  удовлетворяет условиям сопряжения (1.6).

Подстановка разложения (3.1) в (3.2) приводит к следующим результатам. Величина  $p_0$  определяется из уравнения

$$b(x) \frac{\partial p_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a(x) \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \right) = -q^{(0)} - \sum_k \langle q_k \rangle \delta_k(x), \quad p_0|_{t=0} = p^0 \quad (3.3)$$

Для функции  $p_2$  имеет место

$$p_2(x, y, t) = \frac{1}{a(x)} \sum_{k=1}^N \psi_k(y, t) \delta_k(x) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y_i \partial y_i} = (q_k(y, t) - \langle q_k \rangle), \quad y \in Y; \quad k = 1, \dots, N \quad (3.5)$$

$$\psi_k|_{\partial Y} = \psi_k'|_{\partial Y}, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial n}|_{\partial Y} = \frac{\partial \psi_k'}{\partial n}|_{\partial Y} \quad (3.6)$$

$$\langle \{\psi\} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle \psi_k \rangle = 0 \quad (3.7)$$

где  $\psi_k$  — 1-периодична по  $y$ , условия (3.6) выполняются для всех ближайших соседей,  $n$  — нормаль к границе  $\partial Y$ .

4. Определение функций на ячейке методом эффективной среды. Строгое применение методов осреднения в непериодическом случае приводит к неконструктивным алгоритмам, так как условия сопряжения связывают в систему все задачи на ячейке, система зацепляющихся задач для функций на ячейке имеет порядок  $N$ , где  $N \gg 1$ .

С другой стороны, взаимосвязанность ячеечных функций является естественной, так как отражает наличие в непериодических системах дальних корреляций.

Вместо непосредственного решения системы зацепляющихся задач (3.5) применим приближенный метод, который можно рассматривать как один из вариантов методов эффективной среды. Сущность метода в том, что точная система (3.5) — (3.7) заменяется на приближенную, в которой задачи на отдельных ячейках независимы

$$\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y_i \partial y_i} = (q_k(y, t) - \langle q_k \rangle), \quad y \in Y; \quad k = 1, \dots, N \quad (4.1)$$

$$\psi_k|_{\partial Y} = \psi_*(y, t) \equiv \{\psi\}|_{\partial Y}(y, t), \quad \{\psi\}(y, t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi(y, t)$$

Здесь  $\{\psi\}(y, t)$  — 1-периодическое решение задачи

$$\frac{\partial^2 \{\psi\}}{\partial y_i \partial y_i} = \{q'\}(y, t), \quad y \in Y; \quad \langle \{\psi\} \rangle = 0 \quad (4.2)$$

Каждая задача (4.1) зацеплена лишь с единой для всех задач (4.2), описывающей поведение осредненной по реализациям осциллирующей составляющей.

Условие в (4.1) означает, что значения всех функций ансамбля в каждой точке границы ячейки равны значениям функции на границе, усредненной по ансамблю реализаций, т. е. ячейка окружена эффективной средой.

Разрешимость эквивалентной задачи не вызывает сомнений. В самом деле задача (4.1) представляет собой задачу Дирихле для уравнения Пуассона. Задачи типа (4.2) детально исследованы в теории осреднения периодических структур [5], где доказана их однозначная разрешимость в случае выполнения условий ортогональности правой части. Для задачи (4.2) они выполняются, так как  $\langle \{q'\} \rangle = 0$  в силу (2.6).

Эквивалентность точной и эффективной задач заключается в следующем. Условие (3.7) выполняется в силу (4.2). Условие периодичности по  $y$  выполняется, поскольку на границе функция, являющаяся решением (4.1), ведет себя так же, как периодическая функция  $\{\psi\}$ . Первое условие непрерывности (3.6) выполняется, так как все функции  $\psi_k$  на границе принимают одно и то же значение (4.1).

Таким образом, не выполняются только условия гладкости на границе (3.6) и в этом заключается приближенность метода.

Поскольку приближение, связанное с введением условий эффективной среды, затрагивает только составляющую разложения  $p_2$ , то погрешность метода есть  $\epsilon^2$ . Построение членов разложения более высокого порядка не приведет к повышению точности, в этом смысле разложение уже не является асимптотическим.

Эффективная задача легко решается численно. В плоском случае, если сток расположен в центре ячейки  $Y$ , несложно получить точное аналитическое решение задач на ячейках (4.2), (4.1).

Для простоты аппроксимируем ячейку кругом радиуса  $R$ , так что  $\pi R^2 = 1$ , и введем радиальную координату  $r$ . Пусть сток точечный с дебитом  $Q_k(t)$ , тогда имеет место (1.4), (2.5). Следовательно

$$q_k(r, t) = (Q_k - \{Q\}) \delta(r), \quad q_k - \langle q_k \rangle = (Q_k - \{Q\}) (\delta(r) - 1),$$

$$\{q'\} = \{Q\} (\delta(r) - 1), \quad q^{(0)}(t) \equiv \{Q\}, \quad \{Q\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Q_k$$

Тогда решение задач (4.1), (4.2) имеет вид

$$\{\psi\}(r, t) = \frac{\{Q\}}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{\{Q\}}{4} (R^2 - r^2) + \frac{\{Q\}}{8\pi} \quad (4.3)$$

$$\psi_k(r, t) = (Q_k - \{Q\}) \left[ \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{4} (R^2 - r^2) \right] + \frac{\{Q\}}{8\pi}, \quad k = 1, \dots, N \quad (4.4)$$

Осредненное (по ячейкам) уравнение (3.3) описывает поведение системы, в которой стоки непрерывно размазаны в каждой ячейке и локально усреднены. Следовательно, оно является типичной моделью, используемой в численных разностных схемах при расчетах систем скважин. Функция  $p_0$  имеет смысл глобальной депрессионной кривой.

Приближение  $p_2$  распадается на сумму независимых функций  $\psi_k$ , каждая из которых описывает локальную депрессионную воронку вокруг данного стока. Благодаря использованию метода осреднения сращивание локальных воронок и глобальной депрессионной кривой произведено автоматически.

5. Двухфазная фильтрация с массообменом при плотной сетке стоков. Двухфазная фильтрация с массообменом в неоднородном поле возмущений является следующим развитием работы. Если гидродинамические свойства фаз (подвижности) близки, то наличие второй фазы принципиально не вносит дополнительных трудностей. Более того, если фазы не взаимодействуют, то результаты оказываются тривиальными, наличие фазовых переходов обуславливает взаимодействие фаз, которое отражается на форме асимптотической модели.

Фазы считаются хорошо перемешанными, так что исходные микроуравнения уже являются усредненными по микронеоднородностям распределения фаз в среде и масштаб неоднородности поля возмущений заведомо больше, чем масштаб неоднородности фазораспределения.

Фильтрация смеси, состоящей из двух химически различных компонентов, описывается следующей задачей [6, 7]:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial t} U_i^t(p, s) = \sum_{i=1}^2 \operatorname{div} (V_i^t(p, s, x) \operatorname{grad} p) - \eta^t q\left(x, \frac{x}{\epsilon}, t\right), \quad k = 1, 2 \quad (5.1)$$

$$U_i^t \equiv m \rho_i g_i^t s_i, \quad V_i^t \equiv K \rho_i g_i^t k_i, \quad \eta^t = \frac{\rho_1 k_1 g_1^t / \mu_1 + \rho_2 k_2 g_2^t / \mu_2}{\rho_1 k_1 / \mu_1 + \rho_2 k_2 / \mu_2}$$

Здесь  $s$  — объемная насыщенность пор  $i$ -й фазой,  $s \equiv s_1 = 1 - s_2$ ,  $k(s)$  — относительная фазовая проницаемость,  $g_i^t$  — весовая концентрация  $k$ -го ком-

понента в  $i$ -й фазе,  $\eta^k$  — массовая доля  $k$ -го компонента в суммарном потоке. Нижний индекс  $i$  — номер фазы, верхний индекс  $k$  — номер компонента. Для определенности фазу 1 назовем жидкостью, фазу 2 — газом. Компоненту с большей молекулярной массой для определенности присваивается индекс  $k = 2$ .

Неоднородность поля возмущений задается функцией интенсивностей возмущений  $q(x, x/\varepsilon, t)$ , которая определяет дебиты стоков (суммарные расходы поступающей двухфазной двухкомпонентной смеси) и, как и ранее, считается быстроосциллирующей с масштабом  $\varepsilon$ .

Уравнения можно привести к более удобному виду

$$\frac{\partial}{\partial t} U(p, s) = \operatorname{div} (V(p, s, x) \operatorname{grad} p) - q\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t\right) \quad (5.2)$$

$$U \frac{\partial g_2^k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\Delta g^k U_i) = V \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} g_2^k + \operatorname{div} (\Delta g^k V_i \operatorname{grad} p) - (\eta^k - q_2^k) q$$

$$U \equiv \sum_{i, k=1}^2 U_i^k, \quad V \equiv \sum_{i, k=1}^2 V_i^k, \quad U_i \equiv \sum_{k=1}^2 U_i^k, \quad V_i \equiv \sum_{k=1}^2 V_i^k, \quad i = 1, 2; \quad \Delta g^k \equiv g_1^k - g_2^k$$

Фазовые переходы считаются равновесными, поэтому плотности, концентрации и вязкости зависят только от давления. Функции  $\rho_i(p)$ ,  $\mu_i(p)$ ,  $g_i^{(k)}(p)$ ,  $m(p, X)$ ,  $K(p, X)$ ,  $k_2(s)$  считаются заданными.

Уравнения (5.2) содержат две неизвестные функции:  $p$  и  $s$ .

Техника осреднения такая же, как в предыдущем параграфе, и сводится к построению первых членов разложения вида

$$p = p_0(x, t) + \varepsilon^2 p_2(x, y, t) + \varepsilon^3 \dots, \quad s = s_0(x, t) + \varepsilon^2 s_2(x, y, t) + \varepsilon^3 \dots \quad (5.3)$$

Применение процедуры осреднения по ячейке приводит к системе

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \langle U \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle V \frac{\partial p}{\partial y_i} \rangle + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \langle V \frac{\partial p}{\partial x_i} \rangle - \varepsilon \langle q \rangle$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \langle U^k \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle V^k \frac{\partial p}{\partial y_i} \rangle + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \langle V^k \frac{\partial p}{\partial x_i} \rangle - \varepsilon \langle \eta^k q \rangle$$

отсюда следует осредненная модель

$$\frac{\partial}{\partial t} U_0 = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( V_0 \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \right) - \langle q \rangle, \quad \frac{\partial}{\partial t} U_0^k = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( V_0^k \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \right) - \eta_0^k \langle q \rangle \quad (5.4)$$

Для осциллирующей составляющей имеет место  $V_0 \Delta_y p_2 = q - \langle q \rangle$ , где  $\Delta_y$  — лапласиан в переменных  $y$ . Тогда  $p_2 = \frac{1}{V_0} \sum_{k=1}^N \psi_k(y, t) \delta_k(x)$ , а для  $\psi_k(y, t)$  имеет место задача (3.5) — (3.7), которую, используя метод эффективной среды, можно свести приближенно к (4.1), (4.2). Можно использовать явное представление (4.4).

Для определения  $s_2$  требуется рассмотреть в исходной системе члены вплоть до порядка  $\varepsilon^3$ . Тогда для пары функций  $s_2, p_3$  имеет место

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (U_{s_0}' \langle s_2 \rangle + U_{p_0}' \langle p_2 \rangle) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( V_0 \langle \frac{\partial p_3}{\partial y_i} \rangle \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( V_{s_0}' \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \langle s_2 \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( V_{p_0}' \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \langle p_2 \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( V_0 \langle \frac{\partial p_2}{\partial x_i} \rangle \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_{s_0}' \langle s_2 \rangle + U_{p_0}' \langle p_2 \rangle) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( V_{s_0}' \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \langle s_2 \rangle \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( V_{p_0}' \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \langle p_2 \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( V_0' \frac{\partial}{\partial x_i} \langle p_2 \rangle \right)$$

Отсюда получаем для  $s_2, p_3$ .

$$\frac{\partial s_2}{\partial y_i} \frac{\partial p_0}{\partial x_i} V_{s_0}' = -V_0 \Delta_i p_3 - 2\Delta_0 \frac{\partial^2 p_2}{\partial y_i \partial x_i} = -V_0 Q_i \Delta \varphi^{(i)} +$$

$$+ \frac{2V_0}{V_0^2} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \frac{\partial V_0}{\partial x_i} = \left[ -V_0 Q_i \frac{2}{V_0} \left( V_{p_0}' \frac{\partial p_0}{\partial x_i} V_{s_0}' \frac{\partial s_0}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \quad (5.5)$$

$$p_3 = Q_k(x, x) \varphi^{(k)}(x, y, t) \quad (5.6)$$

$$\psi \equiv \sum_{k=1}^N \psi_k(y, t) \delta_k(x), \quad \varphi^{(i)} = \sum_{k=1}^N \delta(x^{(k)}) \varphi_k^{(i)}(y, t)$$

$$Q_k(x, t) \equiv \frac{1}{V_0 R} \left\{ \frac{\partial s_0}{\partial x_i} \left( 1 + 2R \frac{V_{s_0}'}{V_0} \right) + 2 \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \left( R^{(k)} + R \frac{V_{p_0}'}{V_0} \right) \right\}$$

Функции  $\varphi_k^{(i)}$  определяются методом эффективной среды

$$\Delta \varphi_k^{(i)} = \frac{\partial \psi_k}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots, s; \quad k = 1, \dots, N; \quad \varphi_k^{(i)}|_{\partial V} = \quad (5.7)$$

$$= \varphi_k^{(i)} = \{\varphi^{(i)}\}|_{\partial V}, \quad \Delta \{\varphi^{(i)}\} = \frac{\partial \psi_k}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots, s; \quad \langle \{\varphi^{(i)}\} \rangle = 0$$

Здесь  $\{\varphi^{(i)}\}$  1-периодична по  $y$ .

Система (5.4) позволяет рассчитать глобальные кривые  $p_0$  и  $s_0$ , являющиеся результатом размазывания каждого стока по ячейке. Локальные кривые давления и насыщенности определяются с помощью соотношений (5.5), (5.6) и задач на ячейке для осциллирующих составляющих (5.7). Соотношения (5.6) не упрощаются, но заведомо проще исходного уравнения для насыщенности.

Задачи на ячейке квазистационарны, поэтому построенная модель описывает процессы после установления в масштабах одной ячейки.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Peaceman D. W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation//SPE Journal. 1978. V. 18. № 3. P. 183—194.
2. Peaceman D. W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with non-square grid blocks and anisotropic permeability//SPE Journal. 1983. V. 23. № 3. P. 531—543.
3. Peaceman D. W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation. Pt 3: Some additional well geometries//1987 SPE Ann. Techn. Conf. and Exhibition. Dallas, 1987. Pap. SPE 16976. P. 27—30.
4. Peaceman D. W. Near-singularities of pressure and saturation at the well bore in reservoir modelling//Proc. 1st and 2nd Int. Forum on Reservoir Simulation. Alpbach. Austria. Sept. 12—16, 1988. Sept. 4—8. 1989. P. 603—620.
5. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
6. Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И. и др. Движение углеводородных смесей в пористой среде. М.: Недра, 1968. 190 с.
7. Панфилов М. Б., Кайгородова М. В., Борозняк О. И. Прогнозирование разработки газоконденсатных месторождений//Науч.-техн. обзор ВНИИЭГАЗпром. Сер. РИЭГТМ. 1988. Вып. 7. 36 с.