

УДК 532.528

© 1995 г. Н. Н. ЯСЬКО

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПЛОСКОГО КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

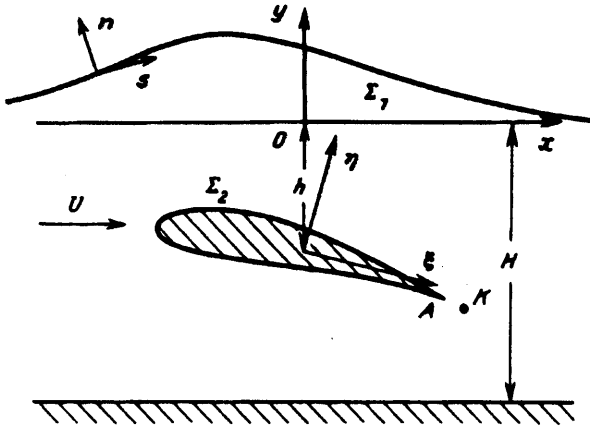
Рассматривается нелинейная задача о движении профиля бесконечного размаха под свободной поверхностью идеальной несжимаемой весомой жидкости. В качестве зависимой переменной используется функция тока. Для определения неизвестной свободной границы предложены итерационные алгоритмы для малых и больших чисел Фруда, сонованные на решении на каждом шаге линейной краевой задачи и последующем уточнении формы свободной поверхности. Приводятся примеры расчета движения симметричного профиля при различных погружениях, числах Фруда и углах атаки. Показаны формы свободной поверхности и линии тока. Представлена зависимость величины подъемной силы от глубины погружения профиля при движении в слоях жидкости различной толщины.

Нелинейная задача о движении погруженного тела вблизи свободной поверхности является одной из весьма сложных проблем гидродинамики. Подобный анализ гидродинамических характеристик подводного крыла в линейной постановке был выполнен М. В. Келдышем и М. В. Лаврентьевым в [1] на основе аппроксимации крыла вихревым слоем, расположенным по контуру профиля. Для случая обтекания пластины при больших числах Фруда ими были получены аналитические выражения гидродинамических сил в зависимости от угла α атаки и глубины h погружения пластины. В [2] рассмотрена эта же задача в приближенной постановке, с сохранением, однако, ее нелинейного характера. Наиболее интересные результаты нелинейная теория дала при числах Фруда, близких к единице. Оказалось, что при этих условиях возможны два режима течения, т. е. задача может не иметь единственного решения. В работе [3] рассмотрены условия существования решения задачи о движении произвольного профиля вблизи границы раздела сред разной плотности.

Так как для большинства практически важных случаев, как правило, не удается построить точные аналитические решения, то для расчета течений со свободными границами все большее применение находят численные методы, особенно методы граничных элементов (см., например, [4, 5]). Эти методы получили значительное распространение для решения нестационарных задач со свободными границами. Применение же их к стационарным нелинейным задачам сдерживается трудностью удовлетворения граничных условий на заранее неизвестной свободной поверхности. Эта трудность становится особенно существенной в случае учета весомости жидкости, поэтому большинство численных решений задач о движении подводного крыла ограничивается линейной постановкой или случаем невесомой жидкости [5].

Цель данной работы состоит в разработке эффективного численного метода расчета нелинейной задачи о движении профиля под свободной поверхностью идеальной весомой жидкости.

1. **Постановка задачи.** Пусть заданный профиль с острой задней кромкой, погруженный на глубину h , движется с постоянной скоростью U параллельно невозмущенной свободной поверхности слоя жидкости толщиной H (фиг. 1.).



Фиг. 1

Рассмотрим течение жидкости в подвижной системе координат xu , связанной с профилем. Движение будем рассматривать в безразмерных переменных, выбрав в качестве характерной длины хорду профиля L , а в качестве характерной скорости — скорость профиля U .

Потенциальное движение несжимаемой жидкости можно описать уравнением для функции тока возмущенного течения

$$\Delta\psi = 0 \quad (1.1)$$

с компонентами скорости $V_x = 1 - \partial\psi/\partial y$, $V_y = \partial\psi/\partial x$. Свободную поверхность жидкости будем задавать в параметрической форме $x = x(s)$, $y = y(s)$, где s — длина дуги свободной поверхности.

В задаче должны быть выполнены следующие граничные условия.

На свободной поверхности: кинематическое граничное условие

$$\psi = y \quad (1.2)$$

и динамическое граничное условие

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = x' - u_s = x' - \sqrt{1 - 2y/\text{Fr}} \quad (1.3)$$

где $\text{Fr} = U^2/gL$ — число Фруда.

На поверхности профиля

$$\psi = Q + y \quad (1.4)$$

где Q — некоторая заранее неизвестная константа, равная расходу жидкости, протекающей между профилем и свободной поверхностью.

На поверхности дна

$$\psi = H + y = 0 \quad (1.5)$$

а при удалении в бесконечность

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi = 0$$

2. Численный метод. Для гармонической функции ψ справедливо интегральное представление [6]

$$\omega_M \psi_M = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial\psi_P}{\partial n} G_{PM} - \psi_P \frac{\partial G_{PM}}{\partial n_P} \right) d\Sigma_P, \quad G_{PM} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_{PL}}{r_{PM}} \quad (2.1)$$

где G_{PM} — функция Грина краевой задачи Дирихле для полуплоскости; $M(x, y)$ — произвольная точка; $L(x, -2H - y)$ — точка, симметричная ей относительно дна; $P(\xi, \eta)$ — точки на границе Σ , состоящей из свободной поверхности Σ_1 и поверхности профиля Σ_2 , а

$$\omega_M = 1, M \in \Omega; \quad \omega_M = 1/2, M \in \Sigma; \quad \omega_M = 0, M \notin \Omega \cup \Sigma$$

Выбор функции Грина в качестве фундаментального решения уравнения (1.1) позволяет избавиться от интеграла по поверхности дна, так как краевое условие (1.5) при этом удовлетворяется тождественно.

Если свободная граница известна и на ней задано одно линейное краевое условие (первого, второго или третьего рода), то из интегрального представления (2.1) можно получить граничное интегральное уравнение для определения недостающих значений на границе области. Аппроксимируем границу области с помощью $N = L + M$ прямолинейных отрезков — граничных элементов. Из них L элементов расположены на поверхности профиля, а M — на свободной поверхности, причем длины граничных элементов на свободной поверхности выберем таким образом, чтобы они увеличивались по мере удаления от профиля.

Используя обычную технику метода граничных элементов, сведем граничное интегральное уравнение (2.1) к системе N линейных алгебраических уравнений относительно значений функции тока ψ_j и ее нормальных производных $\partial\psi/\partial n_j$ в серединах граничных элементов.

$$\frac{1}{2} \psi_i = G_{ij} \frac{\partial \psi_j}{\partial n} - H_{ij} \psi_j \quad (2.2)$$

Здесь и ниже проводится суммирование по повторяющимся индексам.

Коэффициенты G_{ij} и H_{ij} вычисляем аналитически, при этом используем следующие формулы:

$$I_{Mj}^1 = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial}{\partial n} (\ln r_{PM}) ds_p = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b^+}{a} - \operatorname{arctg} \frac{b^-}{a}, & r_{PM} n_j \neq 0 \\ 0, & r_{PM} n_j = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \ln \frac{1}{r_{PM}} ds_p =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2} \{b^+ \ln [(b^+)^2 + a^2] - b^- \ln [(b^-)^2 + a^2] - 2L_j\} + 2a I_{Mj}^1, & r_{PM} n_j \neq 0 \\ -[b^+ \ln |b^+| - b^- \ln |b^-| - L_j], & r_{PM} n_j = 0 \end{cases}$$

$$a = r_{PM} n_j, \quad b^\mp = r_{PM} s_j \mp 1/2 L_j$$

где r_{PM} — вектор между точкой M и центром j -го граничного элемента; L_j — длина j -го граничного элемента.

Полученная система N линейных уравнений содержит $N + 1$ неизвестных, так как граничное условие на поверхности профиля содержит неизвестную константу Q . Для ее нахождения следует воспользоваться постулатом Жуковского.

3. Удовлетворение постулата Жуковского. Согласно постулату Жуковского, точка стечения A на профиле (см. фиг. 1) должна совпадать с острой кромкой. Рассмотрим точку K , лежащую в области течения на биссектрисе угла, образованного острой кромкой профиля (фиг. 1), на малом расстоянии от кромки профиля (при расчетах оно выбиралось равным половине длины граничного

α°	c_{y0}	c_y	c_x
0	0,0	0,000	0,0002
4	0,4821	0,4894	0,0000
8	0,9619	0,9765	0,0005
12	1,4370	1,4588	0,0013

элемента, расположенного на профиле вблизи кромки). Так как кромка является точкой стекания, то можно предположить, что отрезок AK является частью линии тока, т. е.

$$\psi_K = Q + y_K \quad (3.1)$$

Выражая значение функции тока ψ_K в точке K через ее значения на границе, можно написать линейное уравнение

$$Q + y_K = G_{Kj} \frac{\partial \psi_j}{\partial n} + H_{Kj} \psi_j \quad (3.2)$$

Это уравнение использовалось как дополнительное условие для нахождения константы Q .

4. Итерационный метод нахождения свободной границы при больших числах Фруда. Так как положение свободной поверхности заранее неизвестно, то для ее нахождения предложен следующий итерационный процесс.

Пусть известно некоторое приближенное положение свободной поверхности $x = x_0(s)$ и $z = z_0(s)$. Зададим на свободной поверхности краевое условие третьего рода

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = x_0' - \frac{1}{\sqrt{Fr}} \left(\frac{Fr - y_0}{\sqrt{Fr - 2y_0}} - \frac{\psi}{\sqrt{Fr - 2y_0}} \right) \quad (4.1)$$

Тогда для определения ψ на свободной поверхности, $\partial \psi / \partial n$ на поверхности профиля и константы Q будем иметь $L + M$ уравнений (2.2) и дополнительное линейное уравнение (3.2), полученное из постулата Жуковского.

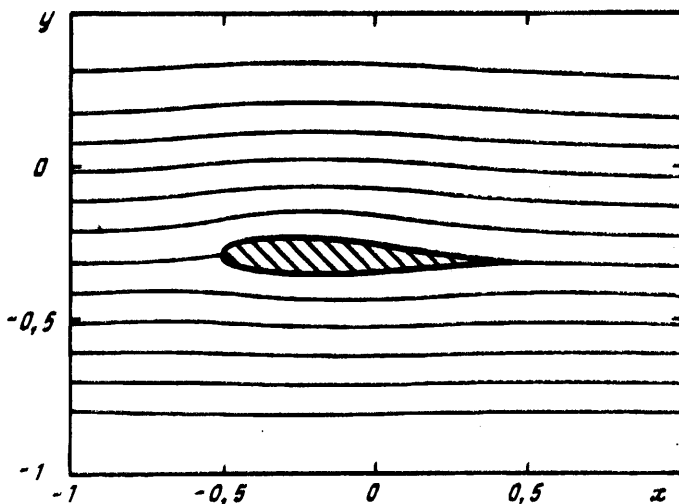
Решение полученной системы $L + M + 1$ линейных алгебраических уравнений осуществлялось методом Гаусса. Так как положение свободной поверхности задавалось произвольно, то полученные значения ψ_i на свободной поверхности не удовлетворяли кинематическому граничному условию (1.2). Для нахождения нового приближения свободной поверхности определялись значения функции тока на концах граничных элементов путем линейной интерполяции. Новое положение свободной поверхности определялось по формуле

$$y_i^N = \psi_i \quad (4.2)$$

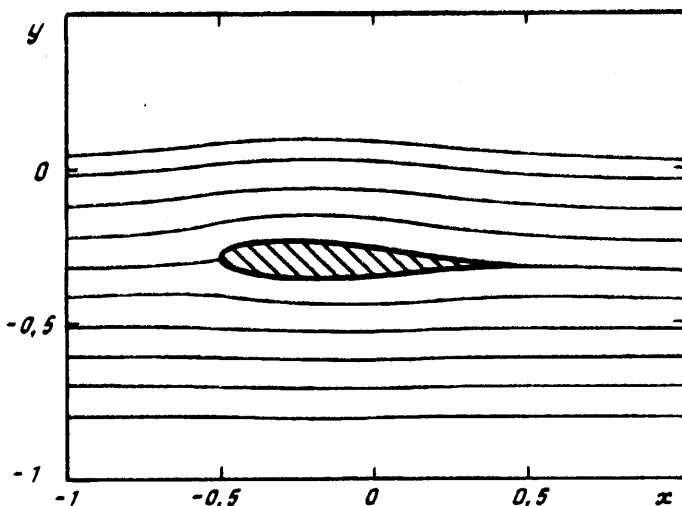
где индекс i соответствует значениям на концах граничных элементов. После этого цикл вычислений повторялся. Итерационный процесс продолжался до тех пор, пока два последовательных приближения свободной поверхности не совпадали с заданной точностью.

Следует отметить, что в случае сходимости итерационного процесса краевое условие (4.1) превращается в динамическое краевое условие (1.3). На практике оказалось, что принятый итерационный процесс при $Fr \gg 1$ обладает достаточно хорошей сходимостью (для достижения точности 10^{-5} обычно требовалось 4—12 итераций). Число итераций увеличивалось при уменьшении глубины погружения профиля h , при уменьшении числа Фруда Fr и при увеличении толщины слоя жидкости H .

5. Итерационный метод нахождения свободной границы при малых числах



Фиг. 2



Фиг. 3

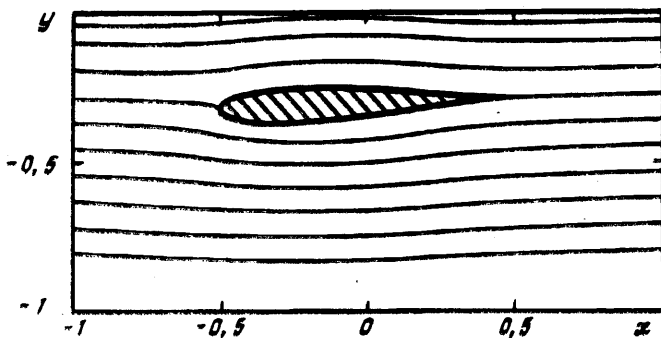
Фруда. При малых числах Фруда $Fr \ll 1$ на свободной поверхности задавалось кинематическое граничное условие (1.2), т. е. условие непротекания. Так же как и в предыдущем случае, для определения $\partial\psi/\partial n$ на свободной границе и на поверхности профиля, а также константы Q имеем $L + M$ уравнений (2.2) и дополнительное уравнение (3.2).

Решение полученной системы $L + M + 1$ линейных алгебраических уравнений также осуществлялось методом Гаусса. Новые вертикальные координаты середин граничных элементов на свободной поверхности определялись из динамического граничного условия (1.3)

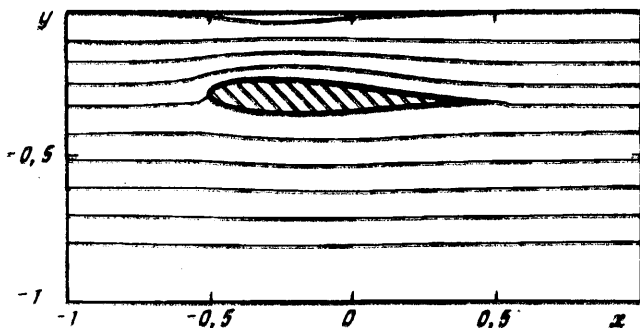
$$y^N = \frac{1}{2} Fr \left[1 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial n} - x_0' \right)^2 \right] \quad (5.1)$$

Новые положения концов граничных элементов находились путем линейной интерполяции.

Сходимость итерационного процесса наступала достаточно быстро при $Fr < 0,01$; при увеличении числа Фруда число итераций, требующихся для



Фиг. 4



Фиг. 5

сходимости, увеличивалось, достигая нескольких десятков при $Fr = 0,05$. При дальнейшем увеличении числа Фруда этот итерационный процесс становится расходящимся.

6. Проверка достоверности получаемых результатов. Все расчеты были выполнены для симметричного профиля в виде руля Жуковского. В системе прямоугольных координат $\xi\eta$ с центром в середине профиля уравнение его поверхности в комплексных переменных имеет вид

$$z = \frac{1}{4} \{ -\lambda + (1 + \lambda) e^{\theta} + [-\lambda + (1 + \lambda) e^{\theta}]^{-1} \}, \theta \in [0, 2\pi]$$

а в системе координат $xу$

$$x = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha, \quad y = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha - h$$

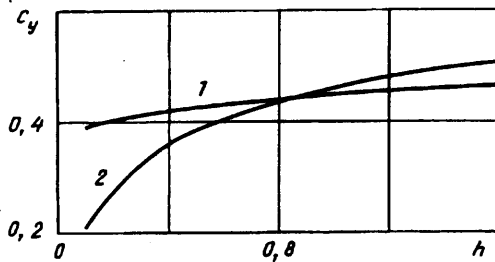
где α — угол атаки, а h — глубина профиля. Параметр $\lambda = 0,1$.

Сначала были проведены расчеты по определению коэффициентов подъемной силы c_y и сопротивления c_x в условиях практически безграничного потока (глубина слоя жидкости $H = 1000$, глубина погружения $h = 500$, число $Fr = 10^6$) при аппроксимации профиля 50 граничными элементами. Коэффициент давления на поверхности профиля определялся по формуле

$$c_p = \frac{p - p_0}{\rho U^2 / 2} = 1 - V_i^2 - \frac{2}{Fr} y$$

где p_0 — давление воздуха над свободной поверхностью.

В таблице приведены точные c_{ya} и вычисленные c_y значения коэффициентов подъемной силы, а также численные величины коэффициента сопротивления c_x при нескольких углах атаки α . Приведенные значения показывают, что рассчитанные значения c_x близки к нулю, а расхождения c_{ya} и c_y незначительны,



Фиг. 6

что свидетельствует о достаточно высокой точности разработанного вычислительного алгоритма.

Другим косвенным подтверждением правильности получаемых результатов могут служить построенные поля течений, для нахождения которых вычислялись значения функции тока и скорости внутри области течения.

7. Результаты расчетов. На фиг. 2 показана картина течения при движении профиля на глубине $h = 0,3$ в слое жидкости толщиной $H = 100$ при угле атаки $\alpha = 2^\circ$ и числе Фруда $Fg = 100$. Для визуализации течения на графике нанесены линии тока в движущейся системе координат. Картина линий тока хорошо показывает удовлетворение условию Жуковского. Величина коэффициента подъемной силы $c_y = 0,1827$, т. е. значительно меньше, чем в безграничной жидкости ($c_y = 0,2742$).

На фиг. 3 показано движение профиля в слое жидкости малой толщины при $H = 2$ (остальные параметры взяты такими же, как и в предыдущем случае). Влияние дна приводит к уменьшению высоты возмущенной профилем свободной поверхности. Коэффициент подъемной силы в данном случае $c_y = 0,1322$, что значительно меньше, чем в предыдущем случае.

При отрицательных углах атаки вместо подъема может наблюдаться опускание свободной поверхности. На фиг. 4 представлена картина течения при обтекании профиля, движущегося на глубине $h = 0,3$ в слое жидкости толщиной $H = 2$ при угле атаки $\alpha = -2^\circ$ и числе Фруда $Fg = 100$. В данном случае коэффициент подъемной силы $c_y = -0,2742$, в то время как в безграничной жидкости $c_y = -0,2412$.

При малых числах Фруда реализуется, очевидно, иное семейство решений. На фиг. 5 представлено поле течения при $Fg = 0,04$, $h = 0,3$, $H = 2$ и угле атаки 2° . Качественно картина течения совершенно иная, чем при $Fg = 100$. Вместо поднятия свободной поверхности, как это было на фиг. 2, возникает провал приблизительно над наивысшей точкой профиля. Увеличение скорости в данном месте приводит к падению давления, что и вызывает понижение уровня свободной поверхности. Коэффициент подъемной силы $c_y = 4,4713$ в данном случае определяется в основном архимедовой силой.

На фиг. 6 приведена зависимость коэффициента подъемной силы c_y от глубины погружения профиля h при угле атаки $\alpha = 4^\circ$, числе Фруда $Fg = 100$ при движении в слое жидкости глубиной $H = 100$ и 2 (кривые 1 и 2 соответственно). Приближение профиля к свободной поверхности вызывает уменьшение коэффициента подъемной силы. Влияние глубины погружения профиля особенно значительно при движении в слое жидкости малой толщины.

Ввиду большого числа определяющих параметров полное исследование их влияния не может быть дано в рамках статьи. Наиболее интересным результатом является численное подтверждение существования двух различных семейств решений при малых и больших числах Фруда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Келдыш М. В., Лаврентьев М. А.* О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости//Тр. конф. по теории волнового сопротивления. М.: Изд-во ЦАГИ, 1937. С. 31—62.
2. *Моисеев Н. Н., Тер-Крикоров А. М.* О неединственности решения задачи о подводном крыле//Докл. АН СССР. 1958. Т. 119. № 5. С. 899—902.
3. *Маклаков Д. В.* О существовании решения задачи о движении профиля произвольной формы в потоке двухслойной жидкости//Изв. вузов. Математика. 1985. № 6. С. 30—36.
4. *Афанасьев К. Е., Афанасьева М. М., Терентьев А. Г.* Исследование эволюции свободных границ при нестационарном движении тел в идеальной несжимаемой жидкости методами конечных и граничных элементов//Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 8—13.
5. *Моляков Н. М.* Обтекание тонкого профиля у поверхности раздела невесомых жидкостей//Прикладные задачи аэромеханики. Харьков: Харьков. авиац. ин-т, 1987. С. 33—42.
6. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
7. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
12.1.1994