

УДК 532.526.5

© 1995 г. В. Б. ЗАМЕТАЕВ, Вик. В. СЫЧЕВ

О ТРЕХМЕРНОМ ОТРЫВЕ ОКОЛО НЕРОВНОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрено стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса около тонкого тела вращения на режиме, когда в некотором поперечном сечении поверхностное трение обращается в нуль. В малой окрестности этого сечения возникает взаимодействие течения в пограничном слое с внешним потенциальным потоком. Для изучения структуры трехмерного течения с локальными зонами отрыва предполагается, что в масштабах области взаимодействия на поверхности тела имеется пространственная неровность. Получено численное решение задачи для этой области и установлена его неединственность. Построены картины линий поверхностного трения (предельных линий тока) с присущими им особенностями.

Действие неблагоприятного градиента давления на течение в двумерном пограничном слое может приводить к появлению точки, в которой поверхностное трение обращается в нуль. Согласно критерию Прандтля, в этой точке происходит отрыв потока. Решение уравнений пограничного слоя при заданном градиенте давления имеет здесь особенность. Детальный анализ показал [1], что в общем случае такая особенность неустранима, т. е. решение задачи для уравнений пограничного слоя Прандтля, которое существует вплоть до точки нулевого поверхностного трения, нельзя непрерывно продолжить через нее. Учет взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком, возникающего в окрестности этой точки, также подтверждает невозможность устранения этой особенности [2].

В действительности отрыв при больших числах Рейнольдса происходит под действием самоиндуцированного градиента давления (см. [3]).

В то же время существуют условия, определяемые, например, углом атаки или формой обтекаемого тела, при которых поверхностное трение, оставаясь всюду положительным, обращается в нуль лишь в одной точке. Решение уравнений пограничного слоя при этом также ведет себя здесь особым образом, но такая особенность является устранимой [4]. Установление этого факта привело в [5, 6] к созданию теории коротких зон отрыва на передней кромке тонкого профиля. В этих работах было показано, что в некоторой малой окрестности устранимой особенности [4] формируется область взаимодействия, имеющая трехслойную структуру, установленную в [2]. В результате численного исследования краевой задачи для этой области [5—7] было показано, что ее решение не единственно и существует, если только входящий в нее параметр не превосходит некоторого критического значения. При больших его значениях решение становится комплекснозначным [8].

Дальнейшее развитие этой теории, получившей название теории кромочного отрыва, идет в нескольких направлениях, включающих рассмотрение нестационарности и трехмерности потока, а также сжимаемости (см. обзоры [9—11]).

Среди работ, в которых исследовались стационарные течения, отметим связанные с изучением влияния двумерных [12] и трехмерных [13] неровностей, расположенных на плоскости в некоторой малой окрестности изолированной

особой точки [4]. Такие течения являются наиболее близкими к рассматриваемым в данной работе, посвященной анализу влияния трехмерной деформации поверхности тела вращения вблизи упомянутой особенности.

1. Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости около тонкого осесимметричного тела, находящегося в однородном набегающем потоке под нулевым углом атаки. Пусть для простоты поверхность тела представляет собой круговой цилиндр с продольным размером l . Обозначим через lx, lr, θ цилиндрические координаты, через $u_\infty u, u_\infty v, u_\infty w$ и $p_\infty + \rho u_\infty^2 p$ — соответствующие проекции вектора скорости и давление. Здесь u_∞, p_∞ — скорость и давление в набегающем потоке, ρ — плотность жидкости. Ось x будем полагать совпадающей с осью симметрии тела, а начало системы координат — с его носовой частью. Введем функцию тока $l^2 u_\infty \psi: u = r^{-1} \psi_r, v = -r^{-1} \psi_\theta$ и число Рейнольдса $R = u_\infty l / \nu$, где ν — коэффициент кинематической вязкости.

Будем считать, что радиус тела $r_w = lr_0 \delta$ ($r_0 = \text{const}$) по порядку величины больше характерной толщины пограничного слоя, т. е. $\delta = \delta(R) \rightarrow 0, \delta > 0$ ($R^{-1/2}$) при $R \rightarrow \infty$. Тогда течение в пограничном слое в главном приближении описывается уравнением, не отличающимся от соответствующего плоскому случаю

$$x = O(1), r = \delta r_0 + R^{-1/2} y, \psi = \delta R^{-1/2} r_0 \Psi$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{dp_e^\circ}{dx} = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}, u_e^\circ \frac{du_e^\circ}{dx} = -\frac{dp_e^\circ}{dx} \quad (1.1)$$

$$y = 0: \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, y \rightarrow \infty: \frac{\partial \Psi}{\partial y} \rightarrow u_e^\circ(x)$$

Рассмотрим режим течения, когда параметр, определяющий распределение давления $p_e^\circ(x)$, достигает своего критического значения, так что в некотором сечении $x = x_c = \text{const}$ трение на поверхности тела впервые обращается в нуль. Тогда в решении задачи (1.1) возникает устраняемая особенность [4].

Этого можно добиться, например, поместив обтекаемое тело на входе в круговой цилиндр с искривленной в продольном направлении частью. Возможна, однако, и более конкретная реализация рассматриваемого режима. Для этого достаточно, чтобы на некотором малом (но превосходящем размер области свободного взаимодействия (см. [14])) отрезке самого цилиндра имелось искривление. Тогда в «вязком» пристеночном подслое течение описывается решением задачи для уравнения пограничного слоя при заданном регулярном распределении давления, которое определяется формой этого искривления. Соответствующее решение было получено в [15]. Однако появление двух дополнительных малых параметров, характеризующих продольный и поперечный размеры искривленной части тела вращения, делает описание достаточно громоздким. Поэтому будем считать, что реализация такого течения обусловлена внешними причинами, а не искривлением поверхности тела.

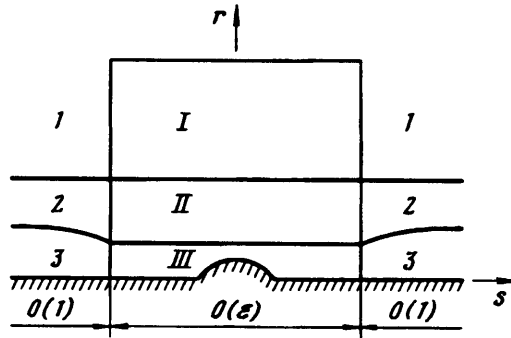
Согласно [4], вблизи изолированной особой точки нулевого поверхностного трения ($x = x_c$) пограничный слой имеет двухслойную структуру. Это вязкие пристеночные подслои (области 3, фиг. 1), в которых $y = O(|s|^{1/4})$ и при $|s| = |x - x_c| \rightarrow 0$

$$\Psi = |s|^{3/4} \frac{\lambda_0}{6} \eta^3 + |s|^{3/2} f_1(\eta) + |s|^{7/4} F_1(\eta) + |s|^{9/4} f_2(\eta) + \dots$$

$$\dots + \Delta_0 k_1 [|s|^{-1/2} \frac{a_1}{2} \eta^2 + O(|s|^{1/4})] + \dots, \eta = \frac{y}{|s|^{1/4}} \quad (1.2)$$

$$p_e = p_e^\circ(x) + \Delta_0 k_1 p_e^1(x) + \dots = p_{00} + \lambda_0 s + \frac{\lambda_1}{2} s^2 + O(s^3) +$$

$$+ \Delta_0 k_1 [p_{10} + O(s)] + \dots, \lambda_0 > 0$$



Фиг. 1

$$f_1 = \frac{a_0}{2} \eta^2, \quad F_1 = \frac{2\lambda_0\lambda_1}{7!} \eta^7 + \text{sign}(s) \frac{\lambda_1}{6} \eta^3$$

$$f_2 = \frac{\lambda_0 a_0^2}{8!} \eta^8 + \text{sign}(s) \frac{a_0^2}{5!} \eta^5 + \frac{b_{\pm}}{2} \eta^2$$

Таким образом, безразмерное поверхностное трение $R^{1/2} \Psi_{yy}|_{y=0} = R^{1/2} [a_0 |s| + O(s^2)]$ при $|s| \rightarrow 0$, $a_0 > 0$. Входящие в (1.2) постоянные остаются произвольными при локальном анализе и определяются из решения задачи (1.1) в целом (см. [4, 15]). Параметр Δ_0 ($\Delta_0(R) \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$), который в дальнейшем будет определен, характеризует возможную вариацию для решения в области внешнего потока (область I) относительно рассматриваемого критического состояния.

В основной части пограничного слоя (области 2), где $y = O(1)$ при $|s| \rightarrow 0$

$$\Psi = \Psi_0(y) + [a_0 \lambda_0^{-1} |s| \Psi_0'(y) + s J_0(y)] + O(s^2) + \dots$$

$$+ \Delta_0 k_1 \left[\frac{a_1}{\lambda_0} \frac{\Psi_0'(y)}{|s|} + O(|s|^{-1/4}) \right] + \dots \quad (1.3)$$

$$J_0 = \Psi_0' \int_0^y \frac{(\Psi_0''' - \lambda_0)}{\Psi_0'^2} dy, \quad \Psi_0'(\infty) = u_e^2(x_s) = q_0 = (1 - 2p_{00})^{1/2}$$

$$y \rightarrow 0: \Psi_0 = \frac{\lambda_0}{6} y^3 + \frac{2\lambda_0\lambda_1}{7!} y^7 + \frac{\lambda_0 a_0^2}{8!} y^8 + \dots$$

Таким образом, решение задачи (1.1) является особым и, в частности, угол наклона трубок тока в пограничном слое претерпевает разрыв при переходе через сечения $s = 0$

$$R^{1/2} \vartheta = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} / \frac{\partial \Psi}{\partial y} = - \frac{a_0}{\lambda_0} \text{sign}(s) - J_0(y) + O(s)$$

Сглаживание этой особенности осуществляется путем рассмотрения течения при $|s| = O(\Delta_0^{1/2})$ — области, где разложения (1.2) и (1.3) теряют свою равномерную пригодность.

В дальнейшем сосредоточим внимание на режиме течения, когда в этой области изменения наклона поверхностей тока индуцируют такие изменения давления, что возникает взаимодействие [5, 6]. Пусть далее внутри этой области имеется малая трехмерная неровность поверхности, причем ее высоту, как и в [12, 13], выберем такой, чтобы влияние последней проявлялось в процессе взаимодействия.

2. Обозначим через ε и $\sigma\delta$ соответственно масштабы для продольного и поперечного размеров пространственной неровности, а через h — для ее высоты. При этом $\varepsilon = \varepsilon(R) \rightarrow 0$, $h = h(R) \rightarrow 0$ и $\sigma = \sigma(R) \leq O(1)$ при $R \rightarrow \infty$.

Следуя [4—6], на основании (1.1), (1.2) и сказанного, а также того, что течение в «вязком» пристеночном подслое (область III, фиг. 1) области взаимодействия трехмерно, представим решение здесь в следующем виде:

$$\begin{aligned} x - x_s &= s = \varepsilon X, \quad r = \delta r_0 + hF(X, Z) + R^{-1/2}\varepsilon^{1/4}Y \\ \theta &= \sigma r_0^{-1}Z, \quad h = \varepsilon R^{-1/2}, \quad \Delta_0 = \varepsilon^2 \\ u &= \varepsilon^{1/2} \frac{\lambda_0}{2} Y^2 + \varepsilon^{5/4}u_1 + \varepsilon^{3/2}u_{10} + \varepsilon^2u_2 + \dots \\ v &= R^{-1/2} [\varepsilon^{1/2}v_1 + \varepsilon^{3/4}v_{10} + \varepsilon^{5/4}v_2 + \dots] \\ w &= \varepsilon\sigma\delta w_0 + \dots \\ p &= p_{00} + \varepsilon\lambda_0X + \varepsilon^2(k_1p_{10} + (\lambda_1/2)x^2) + \varepsilon^{5/2}p_2 + \varepsilon^{1/2}\sigma^2\delta^2p_{20} + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Функция $F(X, Z)$ определяет форму неровности, причем $F \rightarrow 0$ при $|X| \rightarrow \infty$. В результате подстановки (2.1) в исходные уравнения Навье — Стокса, для главных членов разложений получаем [5, 6]

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1(X, Z)Y, \quad v_1 = \left(\lambda_0 \frac{\partial F}{\partial X} - \frac{\partial A_1}{\partial X}\right) \frac{Y^2}{2} \\ u_{10} &= \frac{2\lambda_0\lambda_1}{6!} Y^6 + \frac{\lambda_1}{2} XY^2, \quad v_{10} = -\frac{\lambda_1}{6} Y^3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$|X| \rightarrow \infty: A_1 \rightarrow a_0 |X| + \frac{k_1 a_1}{|X|}$$

Это решение удовлетворяет условиям прилипания на поверхности тела и срачивания с разложениями (1.2). Функция $A_1(X, Z)$, определяющая продольную составляющую поверхностного трения, остается произвольной и, как известно [2], должна находиться из решения задачи для следующих членов разложений (2.1). С учетом (2.2) уравнения для них имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_0}{2} Y^2 \frac{\partial u_2}{\partial X} + \lambda_0 Y V_2 + \frac{Y^2}{2} A_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} + \frac{\partial p_2}{\partial X} &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial Y^2} \\ \frac{\lambda_0}{2} Y^2 \frac{\partial w_0}{\partial X} + \Omega_0 \frac{\partial p_2}{\partial Z} + \frac{\partial p_{20}}{\partial Z} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial Y^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial X} + \frac{\partial V_2}{\partial Y} + \frac{\partial w_0}{\partial Z} = 0$$

$$v_2 = u_1 \frac{\partial F}{\partial X} + V_2, \quad \frac{\partial p_2}{\partial Y} = \frac{\partial p_{20}}{\partial Y} = 0$$

Решение этих уравнений должно удовлетворять условию прилипания на поверхности тела ($Y=0$), а также условиям срачивания с разложениями (1.2) при $|X| \rightarrow \infty$ и решением в основной части пограничного слоя при $s = O(\varepsilon)$ (область II)

$$Y=0: u_2 = V_2 = w_0 = 0$$

$$|X| \rightarrow \infty: u_2 = \frac{9\lambda_0 a_0^2}{8!} Y^8 + \frac{a_0^2}{4!} XY^4 + O(|X|^{7/4}Y) \quad (2.4)$$

$$Y \rightarrow \infty: u_2 = \frac{9\lambda_0 a_0^2}{8!} Y^8 + \frac{a_0^2}{4!} XY^4 + A_2(X, Z) Y + O(1)$$

$$V_2 = -\frac{a_0^2}{5!} Y^5 - \frac{1}{2} \frac{\partial A_2}{\partial X} Y^2 + O(Y)$$

$$w_0 = 2D(X, Z) Y^{-2} + O(Y^{-6})$$

$$D = -\frac{1}{\lambda_0} \int_{-\infty}^x \left(\Omega_0 \frac{\partial p_2}{\partial Z} + \frac{\partial p_{20}}{\partial Z} \right) dX$$

Входящий в (2.3) параметр подобия

$$\Omega_0 = \left(\frac{\varepsilon}{\sigma \delta} \right)^2 \tag{2.5}$$

характеризует отношение продольного и поперечного размеров неровности и определяет возможные режимы течения в области взаимодействия. В дальнейшем детально будет рассмотрен случай, когда $\Omega_0 \rightarrow \infty$ и $\sigma = 1$.

Функция $A_2(X, Z)$ в (2.4) остается произвольной и для ее определения (как и для $A_1(X, Z)$ из (2.2)) необходимо в свою очередь рассмотрение следующих членов разложений (2.1). Заметим, что при подстановке (2.1) в исходные уравнения было положено: $\delta R^{1/2} > O(\varepsilon^{-3/4})$. Выполнение этого условия позволяет пренебречь членами, связанными с поперечной кривизной поверхности цилиндра. Учет этих членов является непринципиальным, поскольку никак не влияет на решение задачи (2.3), (2.4) и не изменяет распределения поверхностного трения.

В основной части пограничного слоя области взаимодействия (область II) на основании (1.3), (2.1)–(2.4) и с учетом поперечного изменения давления решение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} x - x_s &= \varepsilon X, \quad r = \delta r_0 + \varepsilon R^{-1/2} F(X, Z) + R^{-1/2} y, \quad \theta = \sigma r_0^{-1} Z \\ u &= U_0(y) + \varepsilon U_1 + \dots, \quad v = R^{-1/2} V_0 + \dots \\ w &= \varepsilon^{3/2} \sigma \delta W_0 + (\sigma \delta R)^{-1} W_1 + \dots \\ p &= p_{00} + \varepsilon \lambda_0 X + \varepsilon^2 (k_1 p_{10} + (\lambda_1/2) X^2) + \varepsilon^{5/2} P_2 + \\ &+ \varepsilon^{1/2} \sigma^2 \delta^2 P_{20} + \varepsilon^{-1} R^{-1} P_3 + \dots \end{aligned} \tag{2.6}$$

В результате подстановки этих разложений в уравнения Навье — Стокса и последующего интегрирования находим, что решение, удовлетворяющее условиям сращивания с разложениями в пристеночном подслое, есть

$$\begin{aligned} U_1 &= \lambda_0^{-1} A_1(X, Z) U_0'(y) + X J_0'(y) \\ V_0 &= \left(\frac{\partial F}{\partial X} - \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial A_1}{\partial X} \right) U_0(y) - J_0(y) \\ \frac{\partial P_2}{\partial y} &= \frac{\partial P_{20}}{\partial y} = 0; \quad P_2 = p_2 = P_0^*(X, Z), \quad P_{20} = p_{20} = P_1^*(X, Z) \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$P_3 = \left(\frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial^2 A_1}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right) \int_0^y U_0'' dy$$

$$W_0 = -\frac{1}{U_0} \int_{-\infty}^x \left(\Omega_0 \frac{\partial P_0^*}{\partial Z} + \frac{\partial P_1^*}{\partial Z} \right) dX, \quad W_1 = -\frac{1}{U_0} \int_{-\infty}^x \frac{\partial P_3}{\partial Z} dX$$

Здесь на основании сращивания при $|X| \rightarrow \infty$, $U_0 = \Psi_0'(y)$ и $J_0(y)$ определяется выражением из (1.3).

Рассмотрим режим течения в области взаимодействия при $\Omega_0 \rightarrow \infty$ и $\sigma = 1$, т. е. (см. (2.5)) когда неровность охватывает всю поверхность цилиндра или ее конечную часть по углу θ , а продольный размер области взаимодействия (и неровности) по порядку величины больше радиуса цилиндра. В этом случае на основании (2.3), (2.7)

$$\frac{\partial p_2}{\partial Z} = \frac{\partial P_2}{\partial Z} = 0, \quad P_0^* = P_{00}^*(X) \quad (2.8)$$

Для замыкания соотношений в области взаимодействия, как обычно, рассмотрим внешнюю ее часть (область I), где $r = O(\varepsilon)$. Следуя [14], будем искать здесь решение для потенциала вектора скорости в виде

$$x - x_s = \varepsilon X, \quad r = \varepsilon r^*, \quad \theta = r_0^{-1} Z \quad (2.9)$$

$$\varphi = \varepsilon q_0 X + \Phi_0(X, r^*, R) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \varphi_n(X, r^*, Z) + \dots$$

где $\mu_n = \mu_n(R) \rightarrow 0$, $\mu_n < O(\varepsilon)$, $\mu_{n+1} = o(\mu_n)$ при $R \rightarrow \infty$. Функция $\Phi_0(X, r^*, R)$ есть переразложение во внутренних переменных выражения для потенциала в области I внешнего течения, определяющего регулярное распределение скорости и давления в (1.1), а $\varphi_n(X, r^*, Z)$ обусловлены вытесняющим действием пограничного слоя. Для этих функций после подстановки (2.9) в исходные уравнения получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \varphi_n}{\partial r^*} + \frac{r_0^2}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial Z^2} = 0$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию затухания возмущений при $X^2 + r^{*2} \rightarrow \infty$, хорошо известно [16] и тогда при $r^* \rightarrow 0$

$$v = \frac{\lambda_0}{q_0} (\varepsilon r^* - \delta r_0) + \dots - \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{\pi_0(X)}{r^*} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\varepsilon} \frac{n \pi_n(X, Z)}{r^{*n+1}} + \dots$$

$$w = -r_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\varepsilon} \frac{1}{r^{*n+1}} \frac{\partial \pi_n}{\partial Z} + \dots \quad (2.10)$$

$$p = p_{00} + \varepsilon \lambda_0 X + O(\varepsilon^2) + \dots + \frac{\mu_0}{\varepsilon} [q_0 \pi_0'(X) \ln r^* + O(1)] +$$

$$+ q_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\varepsilon} \frac{1}{r^{*n}} \frac{\partial \pi_n}{\partial X} + \dots$$

Производя сращивание разложений (2.6) и (2.9) при $y \rightarrow \infty$ и $r^* \rightarrow 0$, на основании (2.7), (2.8) и (2.10) находим, что

$$\varepsilon = \delta^{2\gamma} R^{-\gamma} \left(\ln \frac{\varepsilon}{\delta} \right)^{2\gamma}, \quad \mu_0 = \delta R^{-\gamma/2}, \quad \mu_n = \delta^{n+2} \varepsilon^{3/2-n}$$

$$P_{00}^* = -\frac{r_0 q_0^2}{\lambda_0} \frac{d^2 A^*}{dX^2}, \quad A^*(X) = A_1(X, Z) - \lambda_0 F(X, Z) \quad (2.11)$$

$$P_{00}^* = -q_0 \pi_0', \quad P_1^* = q_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_0^n} \frac{\partial \pi_n}{\partial X}, \quad \frac{\partial P_3}{\partial Z} = W_1 = 0$$

Полученные соотношения определяют характерный масштаб области взаимодействия ε в зависимости от величины радиуса цилиндра δ , а также замыкают

задачу для этой области. Принципиальное значение имеет тот факт, что радиальная составляющая вектора скорости в областях II и III в своем главном члене (см. (2.2), (2.7), (2.11)) не зависит от θ .

Прежде чем переходить к решению задачи (2.3), (2.4), (2.7), (2.8), (2.11), остановимся кратко на других возможных режимах течения в области взаимодействия.

При $\Omega_0 \rightarrow \infty$ и $\sigma \rightarrow 0$, как и в [14], имеет место течение на режиме поперечного взаимодействия, соответствующего в рассматриваемом приближении обтеканию вытянутой в продольном направлении неровности, лежащей на плоскости. В случае, когда $\Omega_0 = 1$ и $\sigma = 1$, приходим по существу к рассмотренной выше задаче, но при этом продольный размер области взаимодействия есть величина порядка радиуса цилиндра. Из рассмотрения течения в области I внешнего потенциального потока при $s = O(\varepsilon)$, $r = O(\varepsilon)$ следует, что индуцированное давление и радиальная составляющая вектора скорости суть величины одного порядка. Это означает на основании (2.6), что $\varepsilon^{5/2} = R^{-1/2}$, т. е. $\varepsilon = \delta = R^{-1/5}$. Условия, дающие связь между функциями $P_2 = P_{20} = P_0^*(X, Z)$ и $A_1(X, Z)$ из (2.6), (2.7), приведены в [14]. При $\Omega_0 = 1$ и $\sigma \rightarrow 0$ из тех же соображений, что и в предыдущем случае, следует, что $\varepsilon = \sigma\delta = R^{-1/5}$, и в главном приближении приходим к течению около трехмерной неровности, расположенной на плоскости, рассмотренному в [13]. Наконец, если $\Omega_0 \rightarrow 0$, то имеет место квазидвумерное течение, также исследованное в [13].

3. Аффинные преобразования и замена переменных

$$X = \lambda_0 \alpha^4 X', \quad Y = \alpha Y', \quad Z = r_0 Z', \quad u_2 = \lambda_0 a_0^2 \alpha^8 U'$$

$$V_2 = \lambda_0^{-1} \alpha^{-3} V', \quad w_0 = r_0 a_0^2 \alpha^4 W', \quad P_{00}^* = \lambda_0^2 a_0^2 \alpha^{10} P_0'$$

$$P_1^* = r_0^2 a_0^2 \alpha^2 P_1', \quad A^* = \lambda_0 a_0 \alpha^4 A_0', \quad A_1 = \lambda_0 a_0 \alpha^4 A_1'$$

$$F = a_0 \alpha^4 F', \quad D = r_0 a_0^2 \alpha^6 D', \quad A_2 = \lambda_0 a_0^2 \alpha^7 A_2' \quad (3.1)$$

$$\alpha = \left(\frac{r_0 a_0^2}{a_0 \lambda_0^2} \right)^{1/4}, \quad a^* = - \frac{a_1 k_1 \lambda_0^{2/7}}{a_0^{2/7} r_0^{4/7} a_0^{8/7}}$$

$$U' = U'' - \frac{9}{8!} Y'^8 - \frac{1}{4!} X' Y'^4 - A_2' (X', Z') Y' + G' (X', Z')$$

$$V' = V'' + \frac{1}{5!} Y'^5 + \frac{1}{2} \frac{\partial A_2'}{\partial X'} Y'^2 - \frac{\partial G'}{\partial X'} Y', \quad G' = - \frac{1}{2} (A_1'^2 - X'^2 + 2a^*)$$

приводят задачу (2.3), (2.4), (2.7), (2.8), (2.11) к виду

$$\frac{1}{2} Y^2 \frac{\partial U}{\partial X} + YV + \frac{dP_0}{dX} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}$$

$$\frac{1}{2} Y^2 \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial P_1}{\partial Z} = \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (3.2)$$

$$Y = 0: \quad U = G, \quad V = W = 0$$

$$Y \rightarrow \infty: \quad U \rightarrow 0, \quad V \rightarrow 0, \quad W = 2D(X, Z) Y^{-2} + O(Y^{-6})$$

$$|X| \rightarrow \infty: \quad U \rightarrow 0, \quad A_1 \rightarrow |X| - a^* |X|^{-1}, \quad F \rightarrow 0$$

$$A_0(X) = A_1(X, Z) - F(X, Z), \quad P_0 = - \frac{d^2 A_0}{dX^2}$$

$$G = - \frac{1}{2} (A_1^2 - X^2 + 2a^*), \quad D = - \int_{-\infty}^X \frac{\partial P_1}{\partial Z} dX$$

Здесь и всюду ниже штрихи в обозначениях опущены. Входящий в эту систему параметр подобия a^* характеризует степень отклонения течения в области l от его критического состояния, при котором в решении задачи (1.1) возникает устраняемая особенность.

Решение задачи (3.2) существует, если только искомые функции $A_1(X, Z)$, $P_0(X)$ и $P_1(X, Z)$ связаны между собой определенным образом [2]. Такая связь или условие разрешимости задачи, служащее для определения этих функций в соответствии с [2, 5, 17], в данном случае имеет вид

$$P_0 + \frac{\partial^2 Q}{\partial Z^2} = -\frac{1}{\lambda\pi} \int_{-\infty}^X \left[\frac{A_1^2(t, Z) - t^2 + 2a^*}{(X-t)^2} \right] dt \quad (3.3)$$

$$P_1 = \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2}, \quad A_1 = A_0(X) + F(X, Z), \quad P_0 = -\frac{d^2 A_0}{dX^2}$$

$$\lambda = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}; \quad |X| \rightarrow \infty: \quad A_1 \rightarrow |X| - \frac{a^*}{|X|}, \quad F \rightarrow 0$$

Относительная простота этой задачи обусловлена тем, что функция $A_1(X, Z) - F(X, Z)$ в (3.2) и вместе с ней и главный член разложения для радиальной составляющей вектора скорости в (2.2) не зависят от θ .

На основании (2.1), (2.2), (3.1) и в результате интегрирования уравнения для $W(X, Y, Z)$ в (3.2) [13] находим распределение безразмерного поверхностного трения в области взаимодействия

$$\tau_x = \varepsilon R^{1/2} (r_0^4 q_0^4 a_0^5 \lambda_0^{-1})^{1/4} \tau_x^0(X, Z) + \dots$$

$$\tau_0 = \delta \varepsilon^{3/4} R^{1/2} (r_0^{17} q_0^6 a_0^{25} \lambda_0^{-12})^{1/4} \tau_z^0(X, Z) + \dots \quad (3.4)$$

$$\tau_x^0 = A_0(X) + F(X, Z)$$

$$\tau_z^0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2^{3/4} \Gamma(1/4)} \int_{-\infty}^X \frac{\partial P_1}{\partial Z} \frac{dt}{(X-t)^{3/4}}$$

Используя условие периодичности решения по Z ($0 \leq Z \leq 2\pi$), представим форму неровности и искомые функции в виде рядов Фурье

$$F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(X) e^{inZ}, \quad P_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(X) e^{inZ} \quad (3.5)$$

$$F_n = F_{-n}^*, \quad p_n = p_{-n}^*$$

подставив которые в (3.3), приходим к следующей системе рекуррентных уравнений:

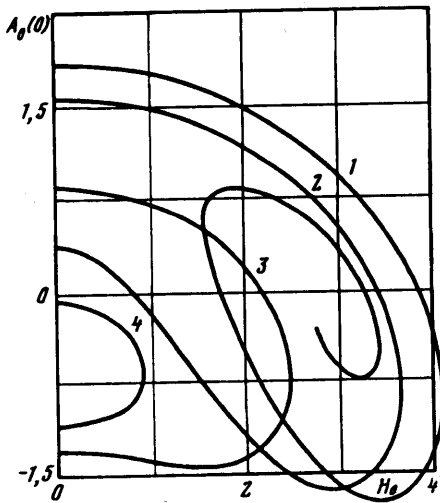
$$\frac{d^2 A_0}{dX^2} = \frac{1}{\lambda\pi} \int_{-\infty}^X \left[\frac{A_0^2(t) + 2A_0(t)F_0(t) + S_0(t) - t^2 + 2a^*}{(X-t)^2} \right] dt$$

$$n^2 R_n = \frac{1}{\lambda\pi} \int_{-\infty}^X \left[\frac{2A_0(t)F_n(t) + S_n(t)}{(X-t)^2} \right] dt, \quad \frac{d^2 R_n}{dX^2} = p_n(X) \quad (n \geq 1) \quad (3.6)$$

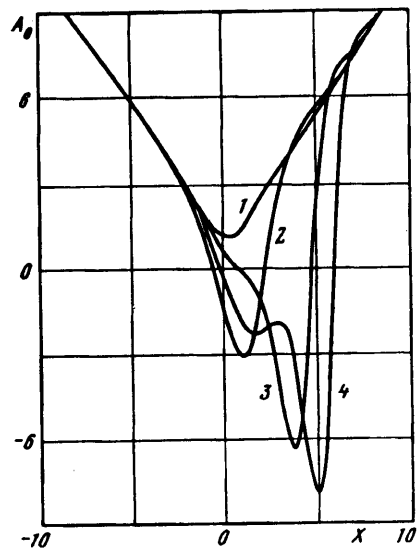
$$S_0 = F_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} F_k F_k^*, \quad S_1 = 2F_0 F_1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} F_{k+1} F_k^*$$

$$S_n = 2F_0 F_n + 2 \sum_{k=1}^{\infty} F_{n+k} F_k^* + \sum_{k=1}^{n-1} F_k F_{n-k} \quad (n \geq 2)$$

Здесь и в (3.5) звездочкой обозначены комплексно сопряженные функции.



Фиг. 2



Фиг. 3

4. Перейдем к описанию результатов численного решения задачи. Рассмотрим неровность вида

$$F = H_0 g_0(X) \cos 3Z, \quad 0 \leq Z \leq 2\pi, \quad g_0 = e^{-X^2/2}, \quad H_0 = \text{const} \quad (4.1)$$

В этом случае на основании (3.5), (3.6) получаем

$$\frac{d^2 A_0}{dX^2} = \frac{1}{\lambda\pi} \int_{-\infty}^X \left[\frac{A_0^2(t) + 1/2 H_0^2 g_0^2(t) - t^2 + 2a^*}{(X-t)^2} \right] dt$$

$$R_3 = \frac{H_0}{9\lambda\pi} \int_{-\infty}^X \frac{A_0(t) g_0(t)}{(X-t)^{3/2}} dt, \quad p_3 = \frac{d^2 R_3}{dX^2} \quad (4.2)$$

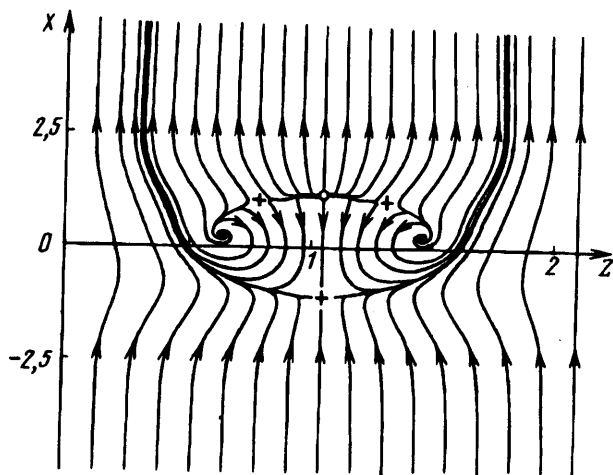
$$R_6 = \frac{5H_0^2}{6! \lambda\pi} \int_{-\infty}^X \frac{g_0^2(t) dt}{(X-t)^{3/2}}, \quad p_6 = \frac{d^2 R_6}{dX^2}$$

$$P_1 = 2p_3(X) \cos 3Z + 2p_6(X) \cos 6Z$$

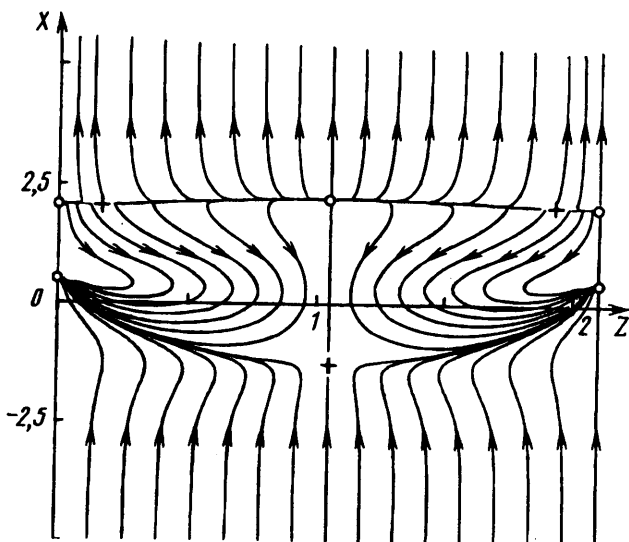
При $H_0 = 0$ приходим к осесимметричному течению и для функции $A_0(X)$ получаем уравнение, которое совпадает с соответствующим уравнением в задаче о плоском течении вязкой струи на искривленной поверхности [15]. Решение этого уравнения не единственно, более того, при $|a^*| \rightarrow 0$ число решений неограниченно возрастает и зависимость $A_0(0)$ от a^* имеет форму спирали [15, 18].

Для уравнения (4.2) при $H_0 \neq 0$ решение строилось с помощью численного метода, изложенного в [15]. На фиг. 2 представлена зависимость $A_0(0)$ от H_0 при значениях $a^* = -1,5; -1; 0; 0,7$ (соответственно кривые 1—4). Увеличение a^* и (или) H_0 способствует возникновению отрыва. Для каждого a^* , если решение существует, то при значениях H_0 , меньших некоторого H_0^* ($H_0^* = 4,089; 3,638; 2,462; 0,91$ соответственно). Как и для плоских течений [7, 15, 12], обнаружилась его неединственность (фиг. 2).

Графики функции $A_0(X)$ при $H_0 = 3$ и $a^* = -1,5$ для первых четырех решений изображены на фиг. 3. Здесь кривые 1—4 соответствуют значениям $A_0(0) = 0,937; -1,61; 0,343; -0,642$, взятым с кривой 1 на фиг. 2, если двигаться вдоль нее



Фиг. 4



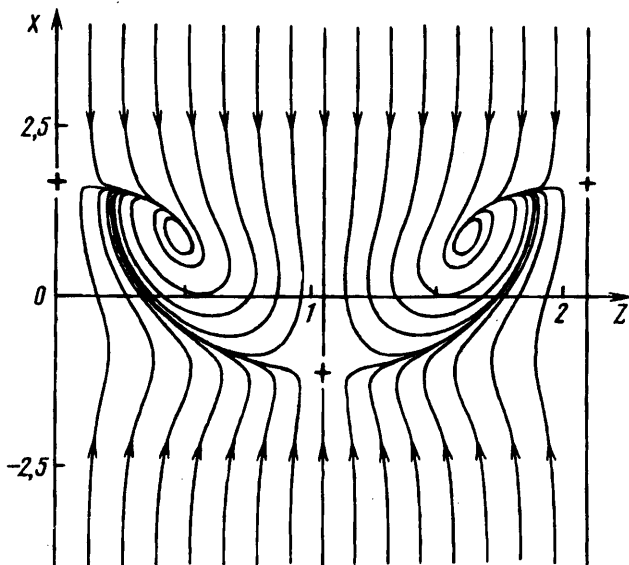
Фиг. 5

из точки $H_0 = 0$, $A_0(0) = 1,846$. По-видимому, эта кривая будет сворачиваться в виде спирали и число решений, как и для $H_0 = 0$ [15], при приближении H_0 к некоторому значению будет неограниченно возрастать. При этом минимальное значение $A_0(X)$ и его координата будут также монотонно увеличиваться.

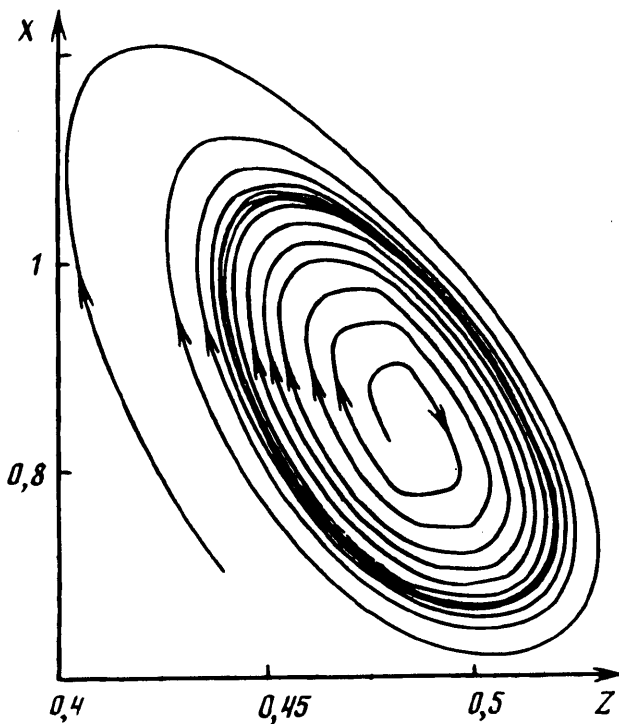
Особый интерес для изучения структуры трехмерных течений с локальными зонами отрыва представляет картина линий поверхностного трения или, как их называют, «предельных линий тока». Уравнение этих линий в соответствии с (3.4) имеет вид

$$\frac{dZ}{dX} = x_0 e^{3/4} \frac{\tau_z^0}{\tau_x^0}, \quad x_0 = q_0^{3/7} r_0^{3/4} a_0^{1/4} \lambda_0^{-6/7} \quad (4.3)$$

Здесь τ_x^0 , τ_z^0 для рассматриваемого случая определяются выражениями (3.4), (4.1), (4.2).



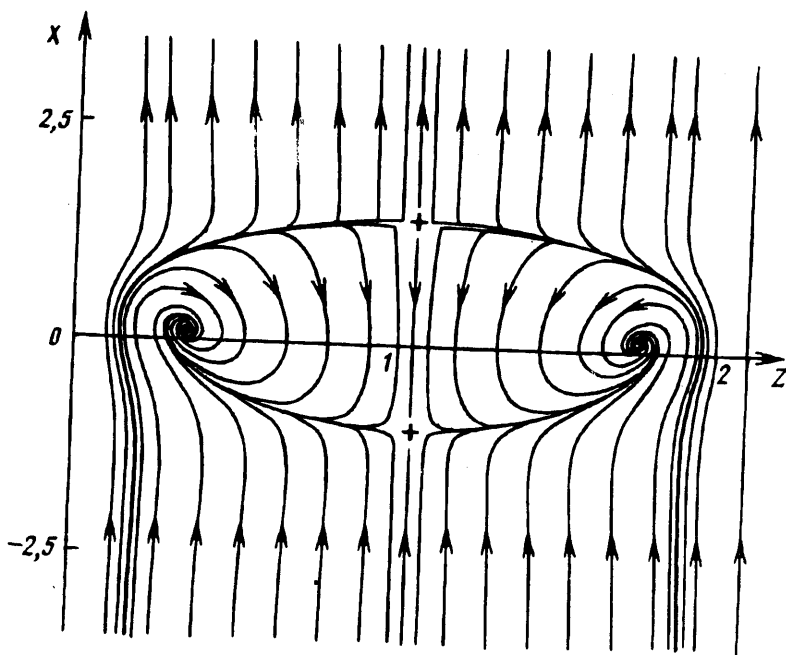
Фиг. 6



Фиг. 7

Для построения качественной картины линий поверхностного трения представляется целесообразным задать значение $\kappa_0 e^{2\mu}$ в (4.3). Положим его равным $1/3$. Заметим, что из условия периодичности для (4.1) достаточно ограничиться отрезком $0 \leq z \leq 2\pi/3$.

Как известно, в точках, где значения τ_x^* , τ_z^* одновременно обращаются в нуль, возникают особенности. На фиг. 4 представлена картина линий поверхностного трения для значений $H_0 = 3$,



Фиг. 8

$a^* = -1,5$, соответствующая кривой 1 на фиг. 3. Кроме седла (точка отрыва) и узла (точка присоединения) при $Z = \pi/3$ в этом случае возникают симметрично расположенные седла и фокусы. (Здесь и ниже седло обозначено крестиком, а узел — кружком.) При $H_0 = 0$, $a^* = -1,5$ течение является безотрывным [15]. Деформация поверхности приводит к появлению отрыва, но не на всей длине по Z , а лишь в месте углубления поверхности.

При тех же значениях $H_0 = 3$, $a^* = -1,5$ для второго решения (кривая 2, фиг. 3) область отрыва охватывает всю поверхность тела по Z и линия присоединения это почти прямая $X \approx 2$ (фиг. 5). По сравнению с предыдущим решением вместо фокусов на линиях $Z = 0$; $2\pi/3$ при $X \approx 0,5$; 2 возникают узлы.

Наиболее сложной является картина для третьего решения (фиг. 6). Зона отрыва здесь имеет существенно большую длину (кривая 3, фиг. 3) и присоединение происходит при $X \approx 4,75$ точно так же, как и для второго решения (см. фиг. 5). Однако вместо узлов при $X \approx 0,5$ (фиг. 5) на линиях $Z = 0$; $2\pi/3$ при $X \approx 1,7$ появляются седла, а также возникают симметрично расположенные предельные циклы (фиг. 6). Один из них отдельно представлен на фиг. 7.

Наконец, на фиг. 8 приведена картина при $H_0 = 0,8$, $a^* = 0,7$ для верхней ветви решения (кривая 4, фиг. 2). Здесь при $Z = \pi/3$ в точках отрыва и присоединения возникают седла.

Полученные решения свидетельствуют, что в соответствии с концепцией Лайтхила [19] линии отрыва и присоединения являются асимптотическими для линий поверхностного трения и начинаются и заканчиваются в особых точках.

Приведенные решения иллюстрируют наиболее типичные картины линий поверхностного трения для трехмерных течений с локальными зонами отрыва. Вне поверхности тела этим картинам соответствуют довольно сложные пространственные конфигурации линий тока (см. обзор [20]).

Таким образом, на основе асимптотической теории кромочного отрыва удастся получить достаточно простые решения, которые описывают течения со сложной структурой линий поверхностного трения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Goldstein S. On laminar boundary-layer flow near a position of separation//Quart. J. Mech. Appl. Math. 1948. V. 1. Pt 1. P. 43—69.
2. Stewartson K. Is the singularity at separation removable?//J. Fluid Mech. 1970. V. 44. Pt 2. P. 347—364.
3. Асимптотическая теория отрывных течений/Под ред. В. В. Сычева. М.: Наука, 1987. 256 с.
4. Рубан А. И. Особое решение уравнений пограничного слоя, непрерывно продолжимое через точку нулевого поверхностного трения//Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 6. С. 42—52.
5. Рубан А. И. Асимптотическая теория коротких зон отрыва на передней кромке тонкого профиля//Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 42—51.
6. Stewartson K., Smith F. T., Kaups K. Marginal separation//Stud. Appl. Math. 1982. V. 67. № 1. P. 45—61.
7. Brown S. N., Stewartson K. On an integral equation of marginal separation//SIAM J. Appl. Math. 1983. V. 43. № 5. P. 1119—1126.
8. Чернышенко С. И. К асимптотике стационарных решений уравнений Навье — Стокса при больших числах Рейнольдса//Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 6. С. 1353—1355.
9. Smith F. T. Steady and unsteady boundary-layer separation//Ann. Rev. Fluid Mech. 1986. V. 18. P. 197—220.
10. Cowley S. J., Van Dommelen L. L., Lam S. T. On the use of lagrangian variables in descriptions of unsteady boundary-layer separation//Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1990. V. 333. № 1631. P. 343—378.
11. Ruban A. I. Marginal separation theory//Separated Flows and Jets/Eds. V. V. Kozlov, A. V. Dovgal. Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 47—54.
12. Hackmüller G., Klumick A. The effect of a surface mounted obstacle on marginal separation//Z. Flugwiss. Weltraumforsch. 1989. Bd. 13 H. 6. S. 365—370.
13. Hackmueller G., Klumick A. Effects of 3-D surface mounted obstacles on marginal separation//Separated Flows and Jets/Eds. V. V. Kozlov, A. V. Dovgal. Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 55—65.
14. Сычев В. В. О пространственных течениях около неровностей на поверхности осесимметричного тела//Уч. зап. ЦАГИ, 1993. Т. 24. № 1. С. 12—28.
15. Заметаев В. Б. Существование и неединственность зон отрыва в вязких струях//Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 1. С. 38—45.
16. Adams M. C., Sears W. R. Slender-body theory-review and extension//J. Aeronaut. Sci. 1953. V. 20. № 2. P. 85—98.
17. Duck P. W. Three-dimensional marginal separation//J. Fluid Mech. 1989. V. 202. P. 559—575.
18. Заметаев В. Б. Асимптотический анализ интегро-дифференциального уравнения в теории кромочного отрыва//Уч. зап. ЦАГИ. 1987. Т. 18. № 3. С. 120—124.
19. Lighthill M. J. Boundary layers and separation//Laminar Boundary Layers/Ed. L. Rosenhead. Oxford: Clarendon Press, 1963. P. 60—88.
20. Perry A. E., Chong M. S. A description of eddying motions and flow patterns using critical-point concepts//Ann. Rev. Fluid Mech. 1987. V. 19. P. 125—155.

Москва

Поступила в редакцию
22.II.1994