

УДК 532.517.013.4

© 1995 г. М. В. УСТИНОВ

ГЕНЕРАЦИЯ МОД ВТОРИЧНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛНЫ ТОЛЛМИНА — ШЛИХТИНГА С НЕРОВНОСТЬЮ

Рассмотрено течение в бесконечном плоском канале, возникающее при набегаии плоской волны неустойчивости конечной амплитуды на изолированную трехмерную неровность стенок. Решена задача о преобразовании возмущений, возникающих на неровности, в растущие моды вторичной неустойчивости. Данная задача описывает развитие возмущений, приводящих к возникновению турбулентного клина. Получены простые соотношения, описывающие течение на больших расстояниях от неровности. Из этих соотношений следует, что угол при вершине турбулентного клина определяется амплитудой набегающей волны, а величина порождаемых возмущений пропорциональна объему неровности.

При достаточно малой степени турбулентности набегающего потока ламинарно-турбулентный переход начинается с зарождения и роста плоской волны Толлмина — Шлихтинга. Когда амплитуда этой первичной волны достигает порогового значения, на ее фоне начинают быстро усиливаться вторичные трехмерные возмущения. После того как последние достигают величины, сравнимой с основной волной, происходит очень быстрое нарастание высших гармоник и на участке длиной в несколько толщин пограничного слоя развивается турбулентное течение. На основании такого развития возмущений можно считать, что положение перехода с высокой степенью точности совпадает с местом, где амплитуда вторичных возмущений становится равной амплитуде основной волны. Для определения этого места необходимо знать закон развития вторичных возмущений и их начальную амплитуду. Развитие вторичных возмущений хорошо описывается теорией вторичной неустойчивости [1, 2], выводы которой согласуются с экспериментом. Согласно этой теории, на фоне двумерной основной волны усиливаются трехмерные возмущения, являющиеся модами некоторой задачи на собственные значения. Существуют два типа таких мод. К первому типу относятся нестационарные субгармонические возмущения. Моды второго типа состоят из стационарной компоненты и нестационарной части с периодом, равным периоду основной волны. Развитие возмущений первого типа приводит к субгармоническому, а второго типа — к клевановскому переходу. Тип мод, которые усиливаются в конкретном течении, определяется начальными условиями для вторичных возмущений. Эти начальные условия должны быть определены из задачи о преобразовании внешних трехмерных возмущений в моды вторичной неустойчивости. Такая задача, аналогичная проблеме восприимчивости для первичной волны неустойчивости, до сих пор рассматривалась только на качественном уровне [2].

В данной работе эта задача решается для возмущений, возникающих в результате взаимодействия первичной волны неустойчивости с малой изолированной неровностью обтекаемой поверхности. Для простоты рассматривается течение в плоском канале, однако метод решения и основные результаты применимы и для течения в пограничном слое.

1. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости с плотностью ρ и кинематическим коэффициентом вязкости ν в бесконечном плоском канале шириной $2L$. Ось x проведем вдоль потока по центру канала, ось z — перпендикулярно стенкам, ось y — в трансверсальном направлении. В качестве масштабов для координат и скорости будем использовать осредненную по времени скорость в центре канала u_{00} и его полуширину L . В окрестности начала координат на обеих стенках канала имеются малые неровности, форма которых описывается уравнениями $z_{w\pm} = \pm 1 + \varepsilon f_{\pm}(x, y)$. Здесь знаки плюс и минус относятся к верхней и нижней стенкам, ε — малый параметр.

Будем рассматривать течение, получающееся при набегании волны Толлмина — Шлихтинга конечной амплитуды на неровность. Для этого поле скоростей в канале представим в виде

$$V(x, y, z, t) = V_b(x, z, t) + \varepsilon V_p(x, y, z, t), \quad V = \{u, v, w\}$$

где $V_b(x, z, t)$ представляет собой основное течение, а $V_p(x, y, z, t)$ — малые возмущения, вызванные неровностью.

За основное течение примем суперпозицию основной волны Толлмина — Шлихтинга конечной амплитуды и искаженного этой волной течения Пуазейля. Пренебрегая нарастанием основной волны и ее высшими гармониками, представим основное течение в виде

$$V_b = V_{b0}(z) + (V_{b1}(z) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \text{к. с.}) \quad (1.1)$$

$$V_{b0} = \{U_0, 0, 0\}, \quad V_{b1} = \{u_b, 0, w_b\}$$

Здесь и далее к. с. обозначает выражение, комплексно сопряженное первому слагаемому.

Вследствие периодичности основного течения возмущения являются периодическими по времени функциями и могут быть записаны в виде рядов Фурье. Ограничиваясь нулевой и первой гармониками этих рядов, будем рассматривать возмущения вида

$$V_p = V_0(x, y, z) + (V_1(x, y, z) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \text{к. с.}) \quad (1.2)$$

$$V_0 = \{u_0, v_0, w_0\}, \quad V_1 = \{u_1, v_1, w_1\}$$

Для описания течения в канале будем использовать систему уравнений для вертикальных составляющих скорости w и завихренности η , эквивалентную уравнениям Навье — Стокса

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial t} + \Delta S_z - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{R} \Delta \Delta w$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial S_x}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial x} = \frac{1}{R} \Delta \eta$$

$$u(x, y, z_{w\pm}) = v(x, y, z_{w\pm}) = w(x, y, z_{w\pm}) = 0$$

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad S = (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = \{S_x, S_y, S_z\}, \quad R = \frac{u_{00} L}{\nu}$$

Подставляя сюда представления для скоростей (1.1), (1.2) и учитывая величины первого порядка малости, получим линеаризованные системы уравнений для стационарных членов (1.3) и членов при $e^{i\omega t}$ (1.4)

$$L(0) w_0 + F_{0+}^w(V_1) + F_{0-}^w(V_1^*) = 0$$

$$M(0) \eta_0 + U_0' \frac{\partial w_0}{\partial y} + F_{0+}^\eta(V_1) + F_{0-}^\eta(V_1^*) = 0 \quad (1.3)$$

$$u_0(\pm 1) = -f_{\pm}(x, y) U_0'(\pm 1), \quad v_0(\pm 1) = w_0(\pm 1) = 0$$

$$L(\omega) w_1^+ + F_1^W(V_0) e^{kx} = 0$$

$$M(\omega) \eta_1^+ + U_0' \frac{\partial w_1^+}{\partial y} + F_1^{\eta}(V_0) e^{kx} = 0$$

$$w_1^+ = w_1 e^{kx}, \quad \eta_1^+ = \eta_1 e^{kx} \quad (1.4)$$

$$u_1(\pm 1) = -f_{\pm}(x, y) u_b^{*'}(\pm 1) e^{kx}, \quad v_1(\pm 1) = w_1(\pm 1) = 0$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по z , звездочка — комплексное сопряжение, $L(\omega)$ и $M(\omega)$ — линейные дифференциальные операторы

$$M(\omega) = -i\omega + U_0 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{R} \Delta, \quad L(\omega) = M(\omega) \Delta - U_0'' \frac{\partial}{\partial x}$$

На функции V_0, V_1, η_0, η_1 , описывающие вторичные возмущения, налагаются условия затухания при $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow \pm\infty$, слагаемые $F_{0+}^W(V_1), F_{0-}^W(V_1^*), F_{0+}^{\eta}(V_1), F_{0-}^{\eta}(V_1), F_1^W(V_0), F_1^{\eta}(V_0)$ в (1.3), (1.4) представляют собой часть конвективных членов, включающих периодическую составляющую основного течения. Точные выражения для этих слагаемых достаточно громоздки и не приводятся с целью экономии места. Для дальнейшего изложения существенно, что данные величины являются суммой членов, пропорциональных компонентам векторов, указанных в скобках, или их производным. Коэффициенты пропорциональности в этих членах зависят только от z .

Предположим для простоты, что неровности симметричны относительно плоскости $y=0$, т. е. $f_{\pm}(x, -y) = f_{\pm}(x, y)$. Тогда из соображений симметрии следует, что u_0, w_0, u_1, w_1 являются четными, а v_0, η_0, v_1, η_1 — нечетными функциями y . Вследствие линейности уравнений (1.3), (1.4) для их решения удобно использовать преобразования Фурье по переменным x и y . Пользуясь симметрией возмущений, будем применять для четных $g_c(x, y)$ и нечетных $g_s(x, y)$ функций y следующие преобразования:

$$F[g_c](k, \beta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} g_c(x, y) \cos \beta y dy \right) e^{-ikx} dx$$

$$F[g_s](k, \beta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} g_s(x, y) \sin \beta y dy \right) e^{-ikx} dx$$

которые для краткости будем называть преобразованиями Фурье, а величины $F[g_c]$ и $F[g_s]$ — фурье-образами g_c и g_s . Отметим, что при отсутствии затухания возмущений при $x \rightarrow +\infty$ применение такого преобразования неправомерно и его нужно рассматривать как формальную операцию, смысл которой станет ясен в дальнейшем.

Применив преобразование Фурье к уравнениям и граничным условиям для стационарной составляющей возмущений (1.3), получим

$$L_f(k, 0) W_0 + R_{0+}^W(W_1, H_1) + R_{0-}^W(W_2, H_2) = 0$$

$$M_f(k, 0) H_0 - \beta U_0' W_0 + R_{0+}^H(W_1, H_1) + R_{0-}^H(W_2, H_2) = 0$$

$$W_0(k, \beta, \pm 1) = 0, \quad W_0'(k, \beta, \pm 1) = ik U_0'(\pm 1) F_{\pm}(k, \beta) \quad (1.5)$$

$$H_0(k, \beta, \pm 1) = \beta U_0'(\pm 1) F_{\pm}(k, \beta)$$

$$W_0 = F[w_0], \quad H_0 = F[\eta_0], \quad W_1 = F[w_1], \quad H_1 = F[\eta_1], \quad W_2 = F[w_1^*],$$

$$H_2 = F[\eta_1^*], \quad F_{\pm} = F[f_{\pm}]$$

$$L_f(k, \omega) = M_f(k, \omega) \Delta_k - ikU_0''$$

$$M_f(k, \omega) = i(kU_0 - \omega) - \frac{1}{R} \Delta_k, \quad \Delta_k = \frac{d^2}{dz^2} - (k^2 + \beta^2)$$

Здесь слагаемые $R_{0+}^W, R_{0-}^W, R_{0+}^H, R_{0-}^H$ являются фурье-образами $F_{0+}^W, F_{0-}^W, F_{0+}^H, F_{0-}^H$. Применяя преобразование Фурье к уравнениям и граничным условиям (1.4), умноженным на e^{-kx} , и учитывая равенства

$$F[ge^{-kx}](k) = F[g](k + \alpha), \quad F[ge^{kx}] = F[g](k - \alpha)$$

справедливые для любой функции $g(x, y)$, имеем

$$L_f(k + \alpha, \omega) W_1 + R_1^W(W_0, H_0) = 0 \quad (1.6)$$

$$M_f(k + \alpha, \omega) H_1 - \beta U_0' W_1 + R_1^H(W_0, H_0) = 0$$

$$W_1(k, \beta, \pm 1) = 0, \quad W_1'(k, \beta, \pm 1) = i(k + \alpha) u_b'(\pm 1) F_{\pm}(k, \beta),$$

$$H_1(k, \beta, \pm 1) = \beta u_b'(\pm 1) F_{\pm}(k, \beta)$$

Наконец, применяя преобразования Фурье к комплексно сопряженной системе (1.4), умноженной на e^{kx} , получим

$$L_f(k - \alpha, -\omega) W_2 + R_2^W(W_0, H_0) = 0$$

$$M_f(k - \alpha, -\omega) H_2 - \beta U_0' W_2 + R_2^H(W_0, H_0) = 0 \quad (1.7)$$

$$W_2(k, \beta, \pm 1) = 0, \quad W_2'(k, \beta, \pm 1) = i(k - \alpha) u_b^{*'}(\pm 1) F_{\pm}(k, \beta),$$

$$H_2(k, \beta, \pm 1) = \beta u_b^{*'}(\pm 1) F_{\pm}(k, \beta)$$

В системы уравнений (1.5), (1.6), (1.7) входят только фурье-образы вертикальных составляющих скорости и завихренности. Для исключения фурье-образов остальных составляющих скорости при выводе (1.5), (1.6), (1.7) использовались соотношения

$$F[u_0] = ik_0 W_0' - \beta_0 H_0, \quad F[u_1] = ik_1 W_1' - \beta_1 H_1, \quad F[u_1^*] = ik_2 W_2' - \beta_2 H_2$$

$$F[v_0] = ik_0 H_0 - \beta_0 W_0', \quad F[v_1] = ik_1 H_1 - \beta_1 W_1', \quad F[v_1^*] = ik_2 H_2 - \beta_2 W_2'$$

$$k_0 = \frac{k}{k^2 + \beta^2}, \quad k_1 = \frac{k + \alpha}{(k + \alpha)^2 + \beta^2}, \quad k_2 = \frac{k - \alpha}{(k - \alpha)^2 + \beta^2} \quad (1.8)$$

$$\beta_0 = \frac{\beta}{k^2 + \beta^2}, \quad \beta_1 = \frac{\beta}{(k + \alpha)^2 + \beta^2}, \quad \beta_2 = \frac{\beta}{(k - \alpha)^2 + \beta^2}$$

получающиеся из уравнений неразрывности и выражения для вертикальной компоненты завихренности.

Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (1.5), (1.6), (1.7) образуют замкнутую задачу для функций $W_0, W_1, W_2, H_0, H_1, H_2$. В дальнейшем будем рассматривать эту задачу также для комплексных значений k . При однородных граничных условиях на стенках канала (1.5), (1.6), (1.7) образует задачу на собственные значения. Решениям этой задачи k , соответствуют моды вторичной неустойчивости вида

$$V_p = \{[V_0(z) + (V_1(z) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \text{к. с.})] e^{ikx} \cos \beta y + \text{к. с.}\}$$

которые удовлетворяют системе (1.3), (1.4) с однородными граничными условиями. В точках $k = k_j$ решения неоднородной системы (1.5), (1.6), (1.7) имеют полюсы. При достаточно малой амплитуде основной волны нарастающие моды вторичной неустойчивости отсутствуют и порождаемые неровностью возмущения должны

затухать при $x \rightarrow +\infty$ [1, 2]. В этом случае, решив (1.5), (1.6), (1.7) для всех значений k и β и вычислив обратное преобразование Фурье, найдем выражения для вторичных возмущений

$$w_0(x, y, z) = \int_0^{\infty} w'_0(\beta, x) \cos \beta y d\beta, \quad w'_0(\beta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_0(k, \beta) e^{ikx} dk \quad (1.9)$$

$$v_0(x, y, z) = \int_0^{\infty} v'_0(\beta, x) \sin \beta y d\beta, \quad v'_0(\beta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F[v_0](k, \beta) e^{ikx} dk$$

Выражения для u_0, u_1 аналогичны формулам для w_0 , а для v_1 аналогичны v_0 . Исследуем полученные решения для возмущений скорости при $|x| \rightarrow \infty$, причем ограничимся рассмотрением $w_0(x, y, z)$, так как поведение остальных составляющих возмущений аналогично. Для этого изучим сначала функцию $w'_0(\beta, x)$, которую, используя теорему Коши, запишем в виде

$$w'_0(\beta, x) = -\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{c_r} W_0(k, \beta) e^{ikx} dk + 2\pi i \sum_{k=k_j} \text{res } W_0(k, \beta) e^{ikx}$$

Здесь c_r — полуокружность радиуса r , расположенная в верхней полуплоскости, сумма во втором слагаемом берется по полюсам, расположенным между c_r и действительной осью. При достаточно малой амплитуде основной волны все полюсы функции $W_0(k, \beta)$ расположены выше действительной оси и оба слагаемых быстро затухают при $x \rightarrow \pm\infty$. По мере увеличения амплитуды основной волны один из полюсов, расположенный в точке k_0 , начинает приближаться к действительной оси. Решение при $x \rightarrow +\infty$ начинает определяться вкладом этого полюса и медленно затухает как $\exp(-\text{Im}(k_0) \cdot x)$. Быстрое затухание w'_0 при $x \rightarrow -\infty$ сохраняется. При дальнейшем увеличении амплитуды основной волны полюс пересекает действительную ось и слагаемое, определяемое им, исчезает. В этот момент решение меняется скачкообразно и становится быстро затухающим при $x \rightarrow +\infty$ и медленно затухающим как $\exp(-\text{Im}(k_0)x)$ при $x \rightarrow -\infty$. Такое поведение возмущений не соответствует рассматриваемой постановке задачи. Для получения решения, удовлетворяющего физическому смыслу, в соответствии с принципом, предложенным в [3], к выражению для $w'_0(\beta, x)$ (1.9) при $\text{Im}(k_0) < 0$ необходимо добавить слагаемое, определяемое вычетом в точке k_0

$$w'_0(k, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_0(k, \beta) e^{ikx} dk + W_{0r}(\beta) e^{ik_0x}, \quad W_{0r}(\beta) = 2\pi i \text{res}_{k=k_0} W_0(k, \beta)$$

Дополненное таким образом решение приобретает свойство непрерывности при пересечении полюсом действительной оси. Для задачи о генерации волны неустойчивости, рассмотренной в [3], применение этого принципа обосновано в [4] путем решения начально-краевой задачи о выходе колебаний на установившийся режим. Для рассматриваемой задачи такое доказательство пока отсутствует и данный принцип рассматривается как гипотеза. В результате численных исследований оказалось, что система (1.5), (1.6), (1.7) имеет обычно два полюса в нижней полуплоскости, расположенных на мнимой оси. Полюс с наибольшим инкрементом нарастания $\sigma = -\text{Im}(k_0)$ соответствует моде с четной функцией $W_0(z)$, а оставшийся полюс — моде с нечетной $W_0(z)$. Поэтому в общем случае к интегралу для w'_0 должны быть добавлены два слагаемых, соответствующих вкладу обоих полюсов. Такой вид решения является следствием того, что рассматриваемая задача может быть сведена к двум независимым задачам: с симметричной неровностью ($f_+(x, y) = -f_-(x, y)$) и с антисимметричной неровностью ($f_+(x, y) = f_-(x, y)$). Для каждой из этих задач в нижней полуплоскости имеется

единственный полюс. В дальнейшем будем рассматривать только антисимметричную задачу, так как она описывает наиболее быстро растущие возмущения.

При $x \rightarrow +\infty$ интеграл в выражении для w'_0 остается конечным, а добавка, связанная с вычетом в k_0 , экспоненциально растет и решение определяется в основном этой добавкой. Учитывая это обстоятельство, получим из (1.9) следующее выражение для $w_0(x, y, z)$ при $x \rightarrow +\infty$:

$$w_0 = \int_0^{\infty} W_{0r}(\beta) e^{\sigma(\beta)x} \cos \beta y d\beta$$

Выражения для остальных составляющих возмущений при $x \rightarrow +\infty$ получаются аналогично и вместе могут быть представлены в виде

$$\{u_0, u_1, w_0, w_1\} = \int_0^{\infty} \{U_{0r}, U_{1r}, W_{0r}, W_{1r}\} e^{\sigma(\beta)x} \cos \beta y d\beta$$

$$\{v_0, v_1\} = \int_0^{\infty} \{V_{0r}, V_{1r}\} e^{\sigma(\beta)x} \sin \beta y d\beta \quad (1.10)$$

$$U_{0r} = -\beta_0 H_{0r}, \quad U_{1r} = ik_1 W'_{1r} - \beta_1 H_{1r}$$

$$V_{0r} = -\beta_0 W'_{0r}, \quad V_{1r} = ik_1 H_{1r} - \beta_1 W'_{1r}$$

$$\beta_0 = \frac{\beta}{k_0^2 + \beta^2}, \quad k_1 = \frac{k_0 + \alpha}{(k_0 + \alpha)^2 + \beta^2}, \quad \beta_1 = \frac{\beta}{(k_0 + \alpha)^2 + \beta^2}$$

$$\{W_{0r}, W_{1r}, H_{0r}, H_{1r}\} = 2\pi i \operatorname{res}_{k=k_0} \{W_0, W_1, H_0, H_1\}$$

Из приведенных выше результатов расчетов следует, что функция $\sigma(\beta)$ имеет максимум при некотором значении $\beta = \beta_*$. Это обстоятельство позволяет получить асимптотические выражения для интегралов в (1.10). В (1.10) встречаются два различных типа интегралов I_1 и I_2 , которые в общем виде можно записать следующим образом:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \varphi(\beta) e^{\sigma(\beta)x} \cos \beta y d\beta = \frac{1}{2} [I_+ + I_-]$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \varphi(\beta) e^{\sigma(\beta)x} \sin \beta y d\beta = \frac{1}{2i} [I_+ - I_-]$$

$$I_+ = \int_0^{\infty} \varphi(\beta) e^{\psi_+(\beta)x} d\beta, \quad I_- = \int_0^{\infty} \varphi(\beta) e^{\psi_-(\beta)x} d\beta$$

$$\psi_+(\beta) = \sigma(\beta) + i\beta \frac{y}{x}, \quad \psi_-(\beta) = \sigma(\beta) - i\beta \frac{y}{x}$$

Рассмотрев интегралы I_+ и I_- на лучах $y/x = \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{const}$ как функции x , будем искать их асимптотику при $x \rightarrow +\infty$. Продолжив аналитически $\varphi(\beta)$ и $\psi_+(\beta), \psi_-(\beta)$ в область комплексных β и используя метод перевала, получим

$$I_+ \approx \sqrt{\frac{2\pi}{|\psi_+''(\beta_0)|x}} \varphi(\beta_0) e^{\psi_+(\beta_0)x + \theta}$$

Здесь β_0 — точка перевала функции $\psi_+(\beta)$, которая находится из условия $\psi_+'(\beta_0) = 0$, θ — угол между линией $\operatorname{Im}(\psi_+) = \operatorname{const}$, проходящей через β_0 , и действительной осью. При нахождении асимптотики I_- используем соотношение

$\psi_*(\beta) = \psi_+(\beta^*)$, следующее из действительности $\sigma(\beta)$ на действительной оси. В результате имеем

$$I_- \approx \sqrt{\frac{2\pi}{|\psi_+''(\beta_0)|x}} \varphi(\beta_0^*) e^{\psi_+(\beta_0)x-\theta}$$

Используя полученные оценки для I_+ и I_- , найдем асимптотические выражения для возмущений

$$\begin{aligned} \{u_0, u_1, w_0, w_1\} &= \sqrt{\frac{\pi}{2|\psi_+''(\beta_0)|x}} [\{U_{0r}, U_{1r}, W_{0r}, W_{1r}\}(\beta_0) e^{\psi_+(\beta_0)x+\theta} + \\ &+ \{U_{0r}, U_{1r}, W_{0r}, W_{1r}\}(\beta_0^*) e^{\psi_+(\beta_0)x-\theta}] \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\{v_0, v_1\} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\pi}{2|\psi_+''(\beta_0)|x}} [\{V_{0r}, V_{1r}\}(\beta_0) e^{\psi_+(\beta_0)x+\theta} - \{V_{0r}, V_{1r}\}(\beta_0^*) e^{\psi_+(\beta_0)x-\theta}]$$

Для малых углов γ точка перевала β_0 лежит в окрестности точки максимума $\sigma(\beta)$ на действительной оси β_* . Предположим, что в этой окрестности функция $\sigma(\beta)$ может быть представлена в виде

$$\sigma(\beta) = b_0 - b_1(\beta - \beta_*)^2, \quad b_0 = \sigma(\beta_*), \quad b_1 = -\frac{1}{2} \frac{d^2\sigma}{d\beta^2}(\beta_*)$$

Тогда, найдя точку перевала $\beta_0 = \beta_* + i \operatorname{tg} \gamma / 2b_1$ и разлагая предэкспоненциальные множители в (1.11) в ряд Тейлора в окрестности β_* , получим простые аналитические формулы для возмущений скорости

$$\begin{aligned} \{u_0, u_1, w_0, w_1\} &= A(x, y) \left[\{U_{0r}, U_{1r}, W_{0r}, W_{1r}\}(\beta_*) \cos \beta_* y - \right. \\ &\left. - \frac{y}{b_1 x} \frac{d}{d\beta} \{U_{0r}, U_{1r}, W_{0r}, W_{1r}\}(\beta_*) \sin \beta_* y + O\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \{v_0, v_1\} &= A(x, y) \left[\{V_{0r}, V_{1r}\}(\beta_*) \sin \beta_* y + \right. \\ &\left. + \frac{y}{\beta_1 x} \frac{d}{d\beta} \{V_{0r}, V_{1r}\}(\beta_*) \cos \beta_* y + O\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \right] \end{aligned}$$

$$A(x, y) = \sqrt{\frac{\pi}{b_1 x}} \exp \left\{ \left(b_0 - \frac{1}{4b_1} \left(\frac{y}{x}\right)^2 \right) x \right\}$$

Эти выражения представляют собой произведения почти периодических по y функций, дающих картину течения, характерную для клевановского перехода, и медленно меняющейся функции $A(x, y)$, задающей амплитуду возмущений. Анализ (1.12) показывает, что вторичные возмущения усиливаются внутри клина

$$|y/x| \leq \operatorname{tg} \gamma_* = 2 \sqrt{b_0 b_1} \quad (1.13)$$

и затухают вне его. Как упоминалось выше, турбулизация течения происходит вблизи линии, где вторичные возмущения достигают величины, сравнимой с амплитудой основной волны. Поэтому турбулентное течение должно возникать только внутри клина с углом полураствора γ_* и этот клин можно интерпретировать как асимптотическую форму области турбулентного потока. В экспериментах [6, 7] при обтекании пластины с изолированной неровностью наблюдалась турбулентная область в виде узкого клина с вершиной в месте расположения неровности, что согласуется с полученным здесь результатом.

Формулы (1.12) справедливы только для малых углов γ , удовлетворяющих условию $\text{tg}(\gamma/2b_1) \ll 1$. Поэтому выражение для угла полураствора турбулентного клина (1.13) верно только при $b_0/b_1 \ll 1$. Это условие выполняется для амплитуды основной волны, незначительно превышающей пороговое значение. Для больших амплитуд первичной волны формулы (1.12) справедливы только вблизи оси клина.

Течение во всей возмущенной области точно описывается формулами (1.11), дающими качественно аналогичную картину течения. Точное значение угла полураствора клина γ_* находится численно из $\text{Re}(\psi_+(\beta_0)) = 0$. Пространственное распределение возмущений при $x \rightarrow +\infty$ не зависит от формы неровности, а целиком определяется зависимостью $\sigma(\beta)$.

2. Все расчеты проводились для основного течения, полученного в результате прямого численного моделирования развития двумерной волны Толлмина — Шлихтинга при $R = 5000$, $\alpha = 1,12$ при различных начальных амплитудах.

Для удобства численного решения задача (1.5), (1.6), (1.7) сводилась к системе дифференциальных уравнений с правыми частями и однородными граничными условиями. Для дискретизации последней применялся метод коллокаций, аналогичный описанному в [5]. В качестве узлов коллокации использовались нули полинома Якоби $P_Q^{(1,1)}(z)$. Число узлов Q выбиралось равным 31. После дискретизации задача сводилась к системе $6Q$ линейных уравнений для значений искомым функций в узлах коллокации. Ввиду линейности системы уравнений (1.5), (1.6), (1.7) вычеты всех входящих в нее функций пропорциональны фурье-образу неровности в точке $k_0 : F_-(k_0, \beta)$. Поэтому вычеты искались при $F_-(k_0, \beta) \equiv 1$. Для этого вычислялась функция $g(k) = [W_1(k)]^{-1}$ и методом Ньютона находилась точка k_0 , в которой эта функция обращается в ноль. Одновременно вычислялась производная $g'(k)$, которая использовалась для нахождения вычета

$$\text{res}_{k=k_0} W_1(k) = \frac{1}{g'(k_0)}$$

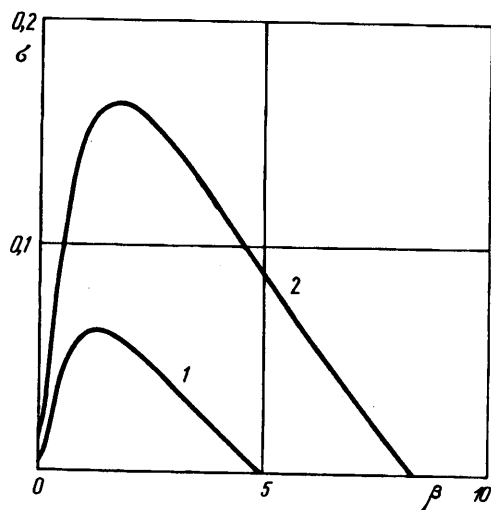
Вычеты остальных функций в точке k_0 вычислялись аналогично. Точка расположения полюса и вычеты в нем искались для различных значений β при амплитудах основной волны $a_0 = 2 \max_x |u_b| = 0,0182$ и $0,0343$. Полученные при этом зависимости σ от волнового числа β показаны на фиг. 1 кривыми 1 и 2 соответственно. Поведение этих кривых качественно соответствует аналогичным зависимостям для пограничного слоя при развитии возмущений по времени [2].

Картина пространственного распределения возмущений рассчитывалась для неровности, имеющей малые продольный и поперечный размеры l_x и l_y . Именно такие неровности наиболее часто встречаются на практике. Для фурье-образов подобных неровностей при $|k| \ll l_x^{-1}$, $|\beta| \ll l_y^{-1}$ справедливо соотношение

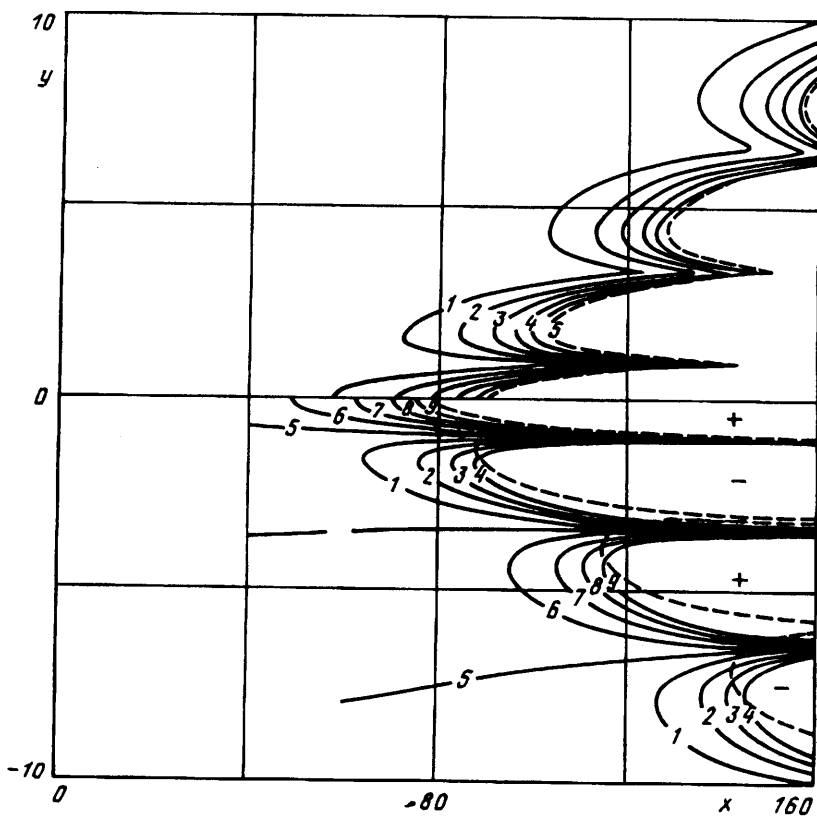
$$F_-(k, \beta) \approx \frac{V}{2\pi^2}, \quad V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_-(x, y) dx dy$$

где V — величина, имеющая смысл объема неровности.

Следовательно, при $l_x \ll [\max_{\beta} \sigma(\beta)]^{-1}$ и $l_y \ll \beta_{\max}^{-1}$ (β_{\max} — максимальное значение β , при котором имеются растущие моды) в существенной для построения решения области значений k, β фурье-образ неровности есть константа, пропорциональная ее объему. Возмущения скорости от всех таких неровностей с точностью до множителя описываются универсальной функцией, которая определялась в расчетах по точным формулам (1.10) и асимптотическим формулам (1.11). При использовании асимптотических формул точка перевала β_0 искалась методом Ньютона как ноль функции $\psi_+'(\beta)$.

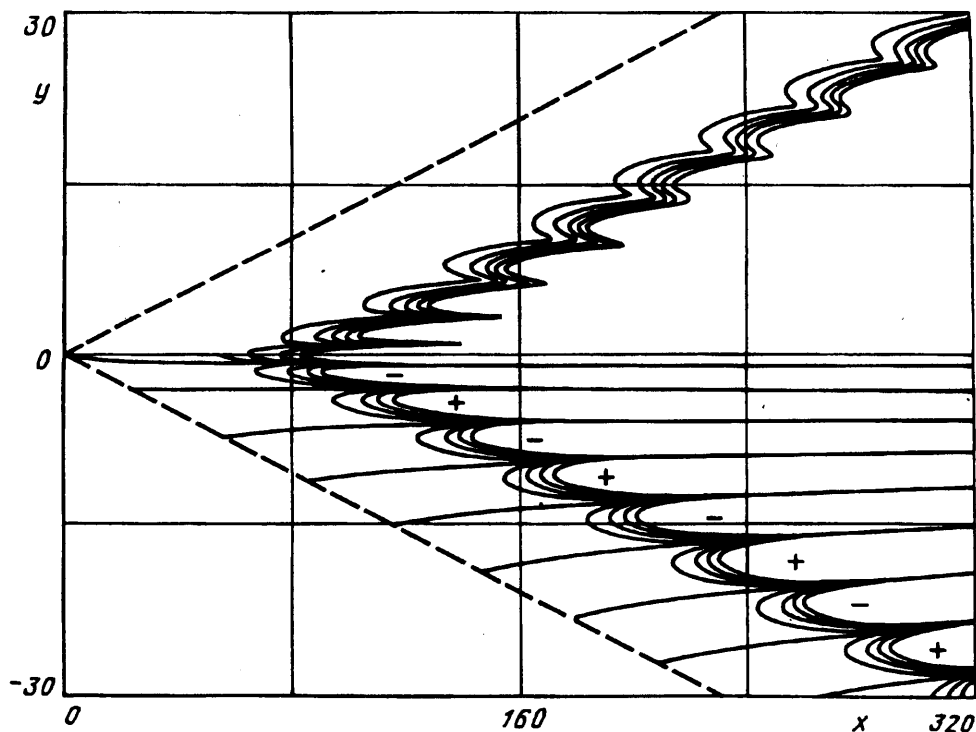


Фиг. 1

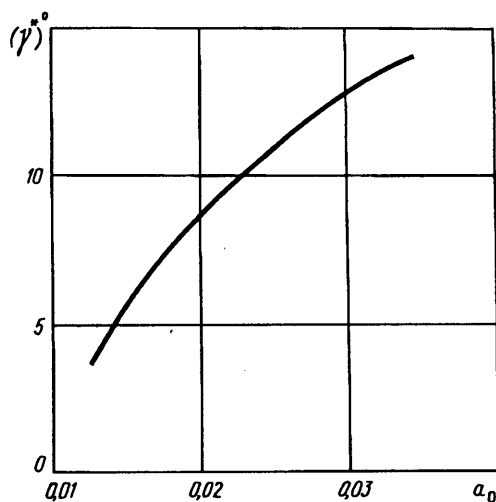


Фиг. 2

Рассчитанные при амплитуде основной волны $a_0 = 0,0182$ распределения вторичных возмущений на плоскости x, y показаны на фиг. 2 и 3 (возмущения нормированы для объема неровности $V = 0,00197$). На верхних половинах этих фигур представлены изолинии пульсации продольной составляющей скорости $2|u_1(x, y)|$, на нижних — изолинии стационарных возмущений скорости $u_0(x, y)$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Показанные результаты соответствуют значению $z = -0,823$, при котором пульсации близки к максимальным по z . На фиг. 2 сплошными кривыми показаны изолинии, рассчитанные по точным формулам (1.10) на относительно небольших расстояниях от неровности. Цифрами 1—5 в верхней части фигуры обозначены линии $2|u_1| = 0,004, 0,008, 0,012, 0,016, 0,02$, в нижней части фигуры цифры 1—9 соответствуют линиям $u_0 = -0,01; -0,0075; -0,005; -0,0025; 0; 0,0025; 0,005; 0,0075; 0,01$. Штриховой линией нанесены изолинии $2|u_1| = 0,02, u_0 = -0,01$ и $u_0 = 0,01$, полученные по асимптотической формуле (1.11). Близость штриховой

и сплошной изолинии свидетельствует о том, что при $x \geq 80$ асимптотическая и точная формулы дают близкие результаты. На фиг. 2 заметна структура течения в виде полос с повышенной и пониженной средней скоростью и соответствующих этим полосам пучностей пульсаций. Визуализация течения в турбулентном клине за неровностью в эксперименте [7] выявила аналогичную полосатую структуру.

На фиг. 3 показаны изолинии, аналогичные изображенным на фиг. 2, в дальней области, найденные по асимптотической формуле (1.11). Штриховой линией показана граница клина с углом полураствора, найденным из $\text{Re}(\psi_+(\beta_0)) = 0$. Внутренность последней изолинии на фиг. 2 и 3 можно интерпретировать как область турбулентного течения.

На фиг. 4 показана зависимость угла полураствора клина от амплитуды основной волны. Факт наличия такой зависимости может быть легко проверен экспериментально.

Автор благодарит С. В. Мануйловича за ценные замечания, высказанные при обсуждении работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17613).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Herbert T.* Secondary instability of plane channel flow to subharmonic three-dimensional disturbances// *Phys. Fluids.* 1983. V. 26. № 4. P. 871—874.
2. *Herbert T.* Three-dimensional phenomena in the transitional flat-plate boundary layer// *AIAA Pap.* 1985. № 85-0489.
3. *Герентьев Е. Д.* Линейная задача о вибраторе, совершающем гармонические колебания на закритических частотах в дозвуковом пограничном слое// *ПММ.* 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 264—272.
4. *Богданова Е. В., Рыжов О. С.* О возмущениях, генерируемых осцилляторами в потоке вязкой жидкости на закритических частотах// *ПМТФ.* 1982. № 4. С. 65—72.
5. *Рождественский Б. Л., Стойнов М. И.* Алгоритмы интегрирования уравнений Навье — Стокса, имеющие аналоги законам сохранения массы, импульса и энергии: Препринт № 119. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 1987. 28 с.
6. *Klebanoff P. S., Schubauer G. B., Tidstrom K. D.* Measurements of the effect of two-dimensional and three-dimensional roughness element on boundary-layer transition// *J. Aeronaut. Sci.* 1955. V. 22. № 11. P. 803—804.
7. *Tani I.* Effect of two-dimensional and isolated roughness on laminar flow// *Boundary layer and flow control.* V. 2. Oxford a. o.: Pergamon Press. 1961. P. 657—681.

Москва

Поступила в редакцию
28.IV.1993