

УДК 532.51:531.552

© 1995 г. В. А. ЕРОШИН, В. А. САМСОНОВ, М. В. ШАМОЛИН

## МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О ТОРМОЖЕНИИ ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ ПРИ СТРУЙНОМ ОБТЕКАНИИ

Построена математическая модель торможения твердого тела при движении в среде в условиях струйного обтекания. Показано, что режим поступательного торможения, как правило, неустойчив. Это позволило разработать достаточно простую методику экспериментального определения параметров модели. Приводится пример использования этой методики для тела цилиндрической формы.

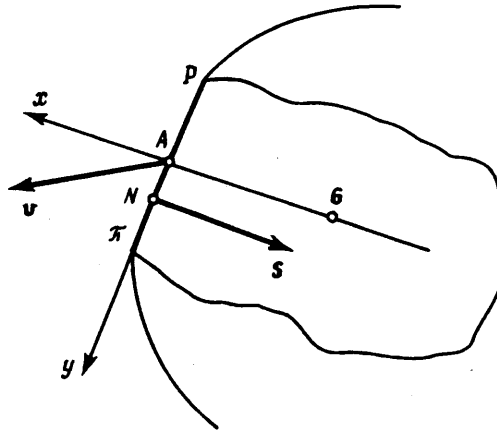
В работах [1—2] исследована задача об устойчивости некоторых режимов равномерного движения тела в среде в рамках квазистатического описания [3] действия среды при струйном обтекании. Показано, что неустойчивость такого движения иногда связана с раскачкой угловых колебаний тела. Однако экспериментально обеспечить равномерное движение тела затруднительно. Поэтому задача о торможении тела представилась более удобной для экспериментальной проверки эффекта раскачки. Предварительные исследования [4] позволили его обнаружить и показали, что для лучшего количественного совпадения расчетных и экспериментальных траекторий необходимо дополнить квазистатическую модель еще одним параметром — вращательной производной момента по угловой скорости тела. Этот параметр обычно вносит в модель диссипацию, однако здесь она оказалась недостаточной, чтобы подавить эффект раскачки. Данное исследование позволило разработать достаточно простую и эффективную методику определения неизвестных параметров модели.

1. Постановка задачи. Предположим, что твердое тело массы  $m$  совершает плоскопараллельное движение в среде с квадратичным законом сопротивления. Будем считать, что некоторая часть внешней поверхности тела представляет собой плоскую пластинку  $\Pi$ , находящуюся в условиях струйного обтекания средой. Это означает, что воздействие среды на пластинку сводится к силе  $S$ , линия действия которой ортогональна к плоскости  $\Pi$ . Предположим также, что остальная часть поверхности тела размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края пластинки, и не испытывает действия среды. Похожие условия могут возникнуть, например, после входа тела в жидкость [4].

Пусть среди движений тела существует режим прямолинейного поступательного торможения. Это возможно, если: 1) скорость движения тела ортогональна пластинке  $\Pi$  и 2) перпендикулярен  $AG$ , опущенный из центра  $G$  тяжести тела на плоскость  $\Pi$ , параллелен линии действия силы  $S$  (фиг. 1).

Свяжем с телом правую систему координат  $Axuz$ , ось  $u$  которой движется параллельно самой себе, и будем считать для простоты плоскость  $Azx$  плоскостью симметрии тела. Это, очевидно, обеспечит выполнение условия 2) при движении, удовлетворяющем условию 1).

Исследуем вопрос об устойчивости поступательного прямолинейного торможения тела. Для построения динамической модели движения введем фазовые координаты:  $v$  — величина скорости точки  $A$ ,  $\alpha$  — угол между вектором  $v$  и осью  $x$ ,  $\omega$  — абсолютная угловая скорость тела.



Фиг. 1

Уравнения движения тела запишем как уравнения движения его центра масс, спроектированные на оси  $x$ ,  $y$ , и уравнение изменения кинетического момента относительно оси Кенига

$$\dot{v} \cos \alpha - (\dot{\alpha} + \omega) v \sin \alpha + l\omega^2 = -S/m \quad (1.1)$$

$$\dot{v} \sin \alpha + (\dot{\alpha} + \omega) v \cos \alpha - l\dot{\omega} = 0$$

$$J\dot{\omega} = y_N S \quad (1.2)$$

Здесь  $l = |AG|$ ,  $J$  — центральный момент инерции тела,  $N$  — точка пересечения пластинки  $\Pi$  линией действия силы  $S$ .

Для завершения описания модели воспользуемся гипотезой квазистационарности [3], т. е. примем, что  $|S| = sv^2$ , и зададим зависимость величин  $s$ ,  $y_N$  от фазовых координат  $\alpha$ ,  $\omega$ . Система уравнений (1.1)—(1.2) должна допускать частное решение

$$\alpha(t) \equiv \omega(t) \equiv 0 \quad (1.3)$$

Поэтому для функции  $y_N(\alpha, \omega)$  имеем  $y_N(0, 0) = 0$ .

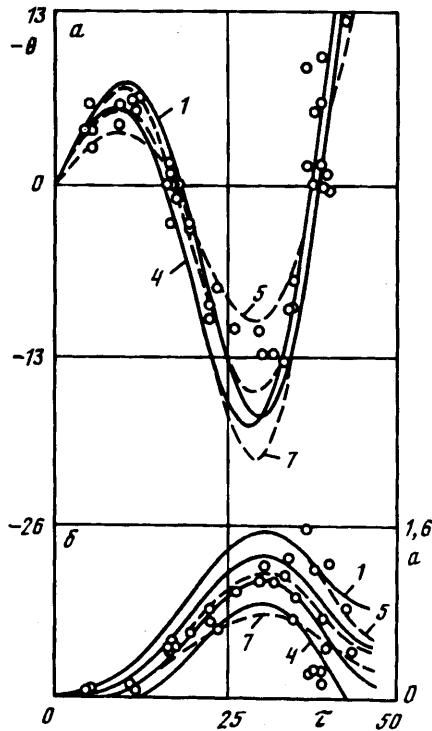
Исследуем вопрос об устойчивости решения (1.3) на основе уравнений первого приближения по переменным  $\alpha$ ,  $\omega$ . Тогда для  $y_N$  следует принять

$$y_N = D(k\alpha - hD\omega/v)$$

где  $D$  — характерный поперечный размер пластинки, а зависимость  $s$  от  $\alpha$ ,  $\omega$  можно пренебречь.

Линеаризованная модель силового воздействия среды содержит три параметра  $s$ ,  $k$ ,  $h$ , которые определяются формой пластинки в плане; размерный коэффициент сопротивления  $s$  обычно представляют в виде  $s = 1/2\rho P c_x$ , где  $\rho$  — плотность среды,  $P$  — площадь пластинки, а  $c_x$  — уже безразмерный коэффициент формы пластинки. Параметры  $k$ ,  $h$  являются безразмерными. Величины  $k$ ,  $h$  могут быть экспериментально определены путем весовых измерений в установках типа гидродинамических или аэродинамических труб. Возможно и теоретическое определение этих величин для отдельных форм пластинок [5, 6], при этом  $k > 0$ . Необходимость введения параметра  $h$  в модель априори не очевидна.

Параметры  $k$ ,  $h$  связаны с так называемыми «вращательными производными момента», вопрос о которых освещен в литературе весьма скупо. Это послужило стимулом для проведения исследования, один из предварительных результатов которого был сообщен в [4].



Фиг. 2

Уравнения (1.1)—(1.2) с точностью до линейных по  $\alpha$ ,  $\omega$  членов примут вид

$$\dot{v} = -sv^2/m, \quad v\dot{\alpha} - sv^2\alpha/m + v\omega - l\dot{\omega} = 0$$

$$J\dot{\omega} = sDv^2(k\alpha - hD\omega/v)$$

Считая  $v \neq 0$ , с помощью обычного для таких систем введения натурального параметра  $\tau$ :  $vdt = Dd\tau$ , замены переменной  $\Omega = D\omega/v$  и очевидной формулы дифференцирования приходим к системе

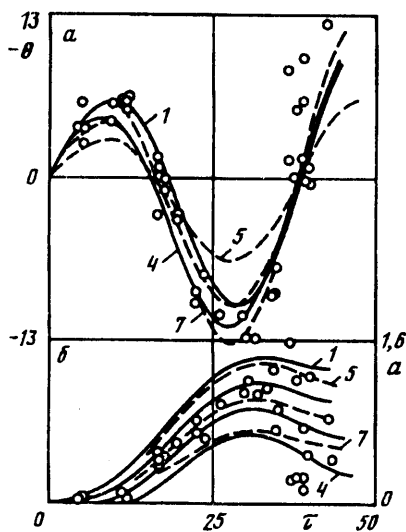
$$\dot{v} = -\frac{sv}{m}$$

$$J\dot{\Omega} = \Omega(J - mD^2h)\frac{Ds}{m} + sD^3k\alpha \quad (1.4)$$

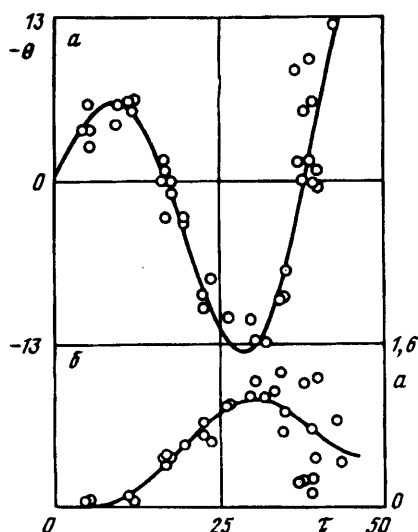
$$\dot{\alpha} = -\Omega\left(1 + \frac{sID^2h}{J}\right) + sD\left(\frac{1}{m} + \frac{kID}{J}\right)\alpha \quad (1.5)$$

в которой точкой обозначена производная по  $\tau$ . Уравнения (1.4)—(1.5) не содержат величины  $v$  и могут быть исследованы независимо от первого уравнения.

2. Приведенный осциллятор. Введем угол  $\theta$ , определяющий ориентацию тела в абсолютном пространстве. Очевидно, что  $\theta$  является циклической координатой и поэтому не входит явно в уравнения (1.1)—(1.2) движения тела. Учитывая, что  $\Omega = \dot{\theta}$ , преобразуем систему уравнений (1.4)—(1.5). Исключив из них величину



Фиг. 3



Фиг. 4

$\alpha$ , получаем линейный интеграл (2.1), с учетом которого уравнение (1.4) примет вид

$$\alpha - \Omega \left( \frac{J}{kmD^2} + \frac{l}{D} \right) + \theta \left( 1 + \frac{ls}{m} + \frac{Js}{km^2D} - \frac{hsD}{km} \right) = \beta = \text{const} \quad (2.1)$$

$$J\ddot{\theta} + \dot{\theta}sD^2A_1 + \theta sD^3B = ksD^3\beta \quad (2.2)$$

$$A_1 = D^2h - D\dot{l}k - \frac{2J}{m}, \quad B = k + \frac{kls}{m} + \frac{Js}{m^2D} - \frac{hsD}{m}$$

Уравнение (2.2) имеет вид уравнения осциллятора, совершающего колебания около некоторого положения  $\theta_* = k\beta/B$ , определяемого значением  $\beta$  интеграла (2.1).

При  $h = 0$  коэффициент  $A_1 < 0$  (как и в [1, 2]). При любом значении параметра  $h$  можно указать такое  $l$ , что при  $l > l_0$  осциллятор (2.2) обладает свойством раскачки. Это означает, что амплитуда его колебаний возрастает с увеличением натурального параметра  $\tau$  вдоль траектории движения. Следовательно, режим прямолинейного поступательного движения тела неустойчив по отношению к возмущению переменных  $\alpha$ ,  $\Omega$  (или  $\omega$ ),  $\theta$ .

Возникающее неустойчивое движение можно использовать для определения неизвестных параметров, в частности параметров  $k$ ,  $h$ .

В Институте механики МГУ проведены эксперименты по регистрации движения в воде однородного кругового цилиндра с параметрами  $m = 178$  г,  $2l = 35$  мм,  $D = 30$  мм,  $c_x = 0,82$  при скоростях  $v \sim 150 + 250$  м/с. Регистрация осуществлялась путем фотографирования цилиндра в некоторых точках траектории на интервале  $0 < \tau < 45$ . С фотографии снимались продольное смещение  $\tau$ , точки  $A$  цилиндра вдоль линии  $L$  невозмущенного движения, поперечное смещение  $a$ , точки  $A$  и угол  $\theta$ , ориентации оси цилиндра относительно линии  $L$ . Экспериментальные результаты изображены точками на фиг. 2—4.

Начальные условия:  $\theta_0 = 0$ ,  $\Omega = \Omega_0$ ,  $\alpha = \Omega_0 l/D$ . Нетрудно показать, что при таких начальных условиях постоянная  $\beta$  интеграла (2.1) отрицательна, следовательно, и  $\theta_* < 0$ . Экспериментальную зависимость  $\theta_1(\tau)$  можно интерпретировать как колебания около некоторого отрицательного значения с возрастающей амплитудой, что может служить проявлением описанной выше неустойчивости

поступательного движения. Кроме того, разброс экспериментальных точек, особенно по боковому смещению, позволяет предположить не только погрешность измерений, но и ошибки в реализации начальных условий. Поэтому для обработки использовался прием «накрывающих пучков».

Для параметра  $k$  принята оценка  $k=0,1$ . Построено два пучка траекторий при различных начальных условиях для  $h=0$  и  $0,2$ . Боковое смещение  $a(\tau)$  определялось по формуле

$$a(\tau) = \int_0^{\tau} (\alpha + \dot{\theta}) d\tau$$

На фиг. 2 и 3 изображены пучки траекторий при  $h=0$  и  $0,2$  соответственно. Начальные условия при этом следующие:  $\theta_0 = 0$ ; сплошной линией даны траектории при  $\Omega_0 = -0,017$ ,  $\alpha_0 = -1$ ;  $-0,5$ ;  $0$ ;  $0,5^\circ$  (кривые 1—4); штриховой линией показаны траектории при  $\alpha_0 = 0^\circ$ ,  $\Omega_0 = -0,1$ ;  $-0,015$ ;  $-0,02$  (кривые 5—7).

Изображения на фиг. 2, б, 3, б показывают, что оба пучка удовлетворительно «накрывают» экспериментальные точки  $a_i(\tau_i)$ . В то же время степень соответствия для  $\theta_i(\tau_i)$  (фиг. 2, а, 3, а) различна для различных значений  $h$ , что позволяет принять в качестве предварительной оценки значение  $h=0,1$ . Для дополнительной иллюстрации приведем (фиг. 4) расчетную траекторию для  $k=0,1$ ,  $h=0,1$  с начальными условиями  $\theta_0 = -0,3^\circ$ ,  $\Omega_0 = -0,017$ ,  $\alpha_0 = -0,012^\circ$ .

Указанные здесь значения для параметров  $k$ ,  $h$  несколько отличаются от тех, которые определялись по относительно малому количеству точек  $\theta_i(\tau_i)$  без учета возможного разброса начальных возмущений [4].

Таким образом, построенная выше математическая модель торможения движения тела в среде при струйном обтекании не только отражает основные качественные особенности поведения тела, но и может быть использована для экспериментального определения некоторых параметров воздействия среды. Методика исследования сравнительно проста и достаточно эффективна.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93—013—17637).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ерошин В. А., Привалов В. А., Самсонов В. А. Две модельные задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Сб. науч.-метод. статей по теор. механике. М.: Высш. шк., 1987. Вып. 18. С. 75—78.
2. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1989. Вып. 3. С. 51—54.
3. Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986. 86 с.
4. Ерошин В. А. Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 5. С. 20—30.
5. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
6. Prandtl L., Betz A. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, b. 4 Lieferung. München — Berlin; R. Oldenbourg, 1932. 148 с.

Москва

Поступила в редакцию  
9.11.1994