МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1995

УДК 532.59

© 1995 г. В. В. БУЛАТОВ, Ю. В. ВЛАДИМИРОВ

О РАСЧЕТЕ ПОЛЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ИСТОЧНИКА

Рассматривается задача о поле линейных внутренних гравитационных волн, возбуждаемых при произвольном нестационарном движении точечного источника в слое стратифицированной жидкости. Решение данной задачи позволяет исследовать поля линейных внутренних волн, генерируемых при различных режимах движения источника возмущений, например движение источника со скоростью, близкой к максимальной групповой скорости распространения внутренних волн, движение источника на переменной глубине и т. д. Исследование этих проблем в некоторых случаях (равномерное движение источника, модельные распределения плотности) можно проводить с помощью различных асимптотических методов, однако исходным в линейной постановке должно быть точное решение задачи о генерации внутренних волн произвольно движущимся источником.

В большинстве предыдущих работ, посвященных исследованию этой проблемы, исследовались внутренние волны, генерируемые произвольно движущимся источником в экспоненциально стратифицированной жидкости (см., например, [1] и содержащийся там обзор), а также поля внутренних волн от равномерно движущегося в слое произвольно стратифицированной жидкости источника [2, 3]. В настоящей работе как траектория движения источника, так и стратификация, т. е. распределение плотности по глубине, предполагаются произвольными.

Возвышение η поля линейных внутренних волн, возбуждаемых точечным источником массы единичной интенсивности, который начинает двигаться в момент времени $t=0$, определяется из задачи [2]

$$L\eta = \theta(t)\,[\delta(x - x_0(t))\,\delta(y - y_0(t))\,\delta(z - z_0(t))]_{tz_0}'' \tag{1}$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + N^2(z)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

где $N(z)$ — частота Брента — Вяйсяля, $\theta(t) = 0$, при $t < 0$, $\theta(t) = 1$, при $t > 0$, $(x_0(t), y_0(t), z_0(t))$ — траектория движения источника. В качестве граничных условий используется приближение «твердой крышки»: $\eta = 0$, $z = 0$, $-H$, здесь H — толщина стратифицированного слоя.

Возвышение η можно найти, используя функцию Грина $G(x, y, z, z_0, t)$, которая удовлетворяет уравнению: $LG' = \delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0)$, а также начальным и граничным условиям: $G \equiv 0$, $t < 0$; $G = 0$, $z = 0$, $-H$.

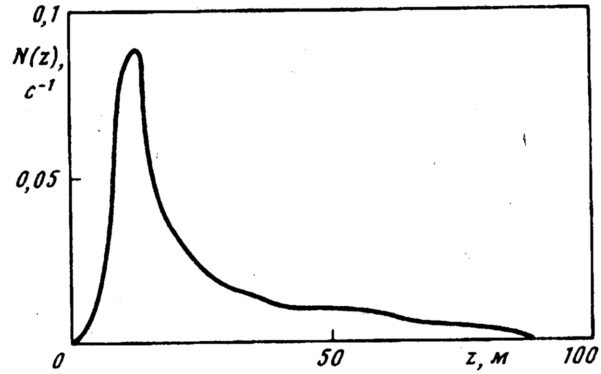
Функция G описывает поле внутренних волн от мгновенно вспыхнувшего в момент $t = 0$ на глубине $z = z_0$ источника. Тогда функция η, удовлетворяющая (1), будет выражаться через G следующим образом:

$$\eta(x, y, z, t) = -\left[\int_0^t G(x - x_0(\tau), y - y_0(\tau), z, z_0(\tau), t - \tau)\,d\tau\right]_{tz_0}''$$

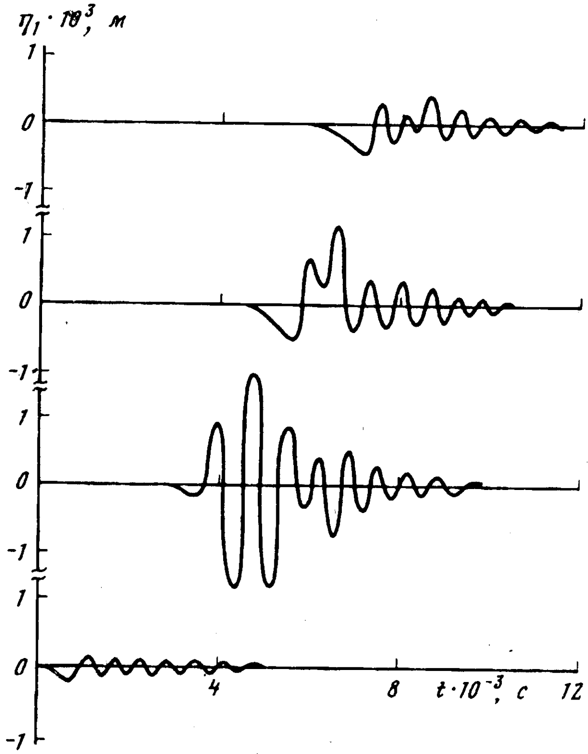
Функция Грина $G(x, y, z, z_0, t)$ построена в [4] и имеет вид суммы мод

$$G = \Sigma G_n$$

$$G_n = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \sin(\omega_n(k)\,t)\,J_0(kr)\,\frac{\omega_n(k)}{k}\,\varphi_n(z, k)\,\varphi_n(z_0, k)\,dk$$



Фиг. 1



Фиг. 2

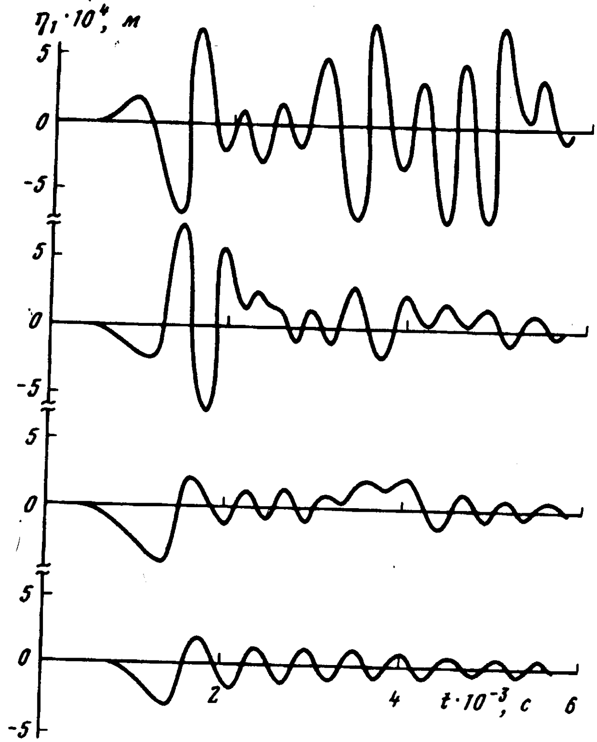
здесь $r^2 = x^2 + y^2$, y_0 — функция Бесселя нулевого порядка, $\omega_n(k)$, $\varphi_n(z, k)$ — собственные числа и собственные функции основной вертикальной спектральной задачи

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} + k^2 \left(N^2(z)\, \omega_n^{-2}(k) - 1\right) \varphi_n = 0$$

$$\varphi_n = 0, \; z = 0, \; -H$$

Отсюда можно получить выражение для η в виде

$$\eta = \sum \eta_n$$



Фиг. 3

$$\eta_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\omega_n^2(k)}{k} \varphi_n(z, k) \{\cos(\omega_n(k) t) I_n + \sin(\omega_n(k) t) R_n\} dk$$

$$I_n + iP_n = \int_0^t \exp(i\omega_n(k)\tau) J_0(k\,|r - r_0(\tau)|) \frac{\partial\varphi_n(z_0(\tau), k)}{\partial z_0} d\tau$$

$$|r - r_0(\tau)| = \sqrt{(x - x_0(\tau))^2 + (y - y_0(\tau))^2}$$

Полученное таким образом точное решение задачи о поле линейных внутренних волн, генерируемых произвольно движущимся источником, представляет собой сумму двухкратных квадратур. Следует, однако, подчеркнуть, что подынтегральные выражения, определяющие функции I_n, R_n, не зависят явно от времени и поэтому для каждого момента времени в отличие от [2] можно не рассчитывать численно двухкратный интеграл, а использовать значение вычисленных на предыдущем временно́м шаге функций I_n, R_n для получения значений этих функций на следующем временном шаге.

Для численных расчетов было использовано типичное, отличное от постоянного, распределение частоты Брента — Вяйсяля $N(z)$, приведенное на фиг. 1. На фиг. 2 представлены результаты расчетов первой моды возвышения η_1 как функции времени для случая равноускоренного движения источника. Параметры расчетов были следующие: $x = 0$ м, $y = 300$ м, $z = -30$ м, $x_0 = x_* + 0{,}0001t^2$, $y_0 = 0$ м, $z_0 = -40$ м. Значения начальной координаты движения x_* для кривых *1*, *2*, *3*, *4* равны −500, −1500, −2500, −3500 м соответственно. Равноускоренно движущийся источник в зависимости от значения начальной координаты проходит через точку траверза $x = 0$ в различные моменты времени, тем самым имеется возможность исследовать такой важный режим движения источника, как движение со скоростью, близкой к критической. Здесь под критической понимается максимальная групповая скорость распространения первой моды, равная 0,62 м/с.

Как можно предположить, движению источника со скоростью, близкой к критической, могут соответствовать большие по сравнению с остальными режимами движения амплитуды возбуждаемых волн. Действительно, как показывают проведенные численные расчеты, амплитуды возбуждаемых внутренних волн в случае, когда источник проходит через точку траверза $x = 0$ с околокритической скоростью (фиг. 2, кривая *2*), могут быть существенно больше, чем в остальных случаях (фиг. 2, кривые *1*, *3*, *4*). Таким образом, достаточно заметное увеличение амплитуды генерируемых волн может свидетельствовать о том, что скорость источника при его произвольном нестационарном движении стала близка к критической.

Другим интересным примером движения источника может служить, например, равномерное движение источника по горизонтали с одновременным колебанием по вертикали. Численные расчеты, иллюстрирующие этот пример, представлены на фиг. 3. Параметры расчетов были следующие: $x = 0$ м, $y = 300$ м, $z = -30$ м, $x_0 = -1500$ м $+ 2t$, $y_0 = 0$ м, $z_0 = -40$ м $+ 20 \sin (\Omega t)$. Частота вертикальных колебаний Ω для кривых *1*, *2*, *3*, *4* равна 0; 0,01; 0,02; 0,03 $с^{-1}$ соответственно. Из представленных результатов видно, что при увеличении частоты колебаний могут увеличиваться амплитуды отдельных мод возбуждаемых волн, этот факт был также отмечен и в [2]. Полную картину можно получить, только суммируя все возбуждаемые волновые моды.

Таким образом, проведенные численные расчеты показывают, что полученное решение задачи о нестационарном движении источника в слое произвольно стратифицированной жидкости позволяет исследовать любые режимы генерации внутренних волн точечными источниками, при этом численно приходится рассчитывать фактически однократные квадратуры.

В заключение авторы выражают благодарность А. В. Марченко за ряд ценных замечаний.

Результаты публикуемого исследования частично были выполнены благодаря гранту № M3L000 Международного научного фонда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Voisin B.* Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Part 2. Moving point sources//J. Fluid Mech. 1994. V. 261. P. 333—374.
2. *Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн//Новосибирск: Наука, 1985. 318 с.
3. *Санников В. Ф.* Точные решения линейной задачи об установившихся волнах, создаваемых диполем в потоке стратифицированной жидкости//ПММ. 1990. Т. 54. № 6. С. 972—977.
4. *Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М. Я.* Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1984. Т. 20. № 6. С. 526—532.

Москва

Поступила в редакцию
15.XII.1993