

УДК 532.527:517.958

© 1995 г. Ю. Д. ШМЫГЛЕВСКИЙ  
О «РАЗРУШЕНИИ ВИХРЯ»

Известные исследования разрушения вихря дополнены базирующимся на полных уравнениях Навье — Стокса точным аналитическим представлением этого явления при потенциальной закрутке исходного потока вокруг оси симметрии.

Разрушением вихря в стационарном течении называют ([1—7]) либо внезапное возникновение на центральной части закрученного течения утолщения с возвратными токами, либо резкий переход вихревого шнура в спираль. Здесь речь будет идти о первом виде разрушения.

Это явление впервые было описано в [1] и послужило предметом многочисленных исследований. Обзоры работ по изучению разрушения вихря можно найти в [2—7]. Там же и в [8] представлены фотографии явления при обтекании под углом атаки треугольной пластинки с острой передней кромкой, а также в трубах с закрученным вокруг оси потоком. На фотографиях течений в [4, 6] видна структура вихревых образований. Вихревая система утолщения («пузыря») включает либо один сомкнувшийся на оси кольцевой вихрь [6], либо два, один из которых вложен в другой [4, 6]. В работах [2—6] проведена аналогия между вихревым образованием и отрывом потока вязкой жидкости от обтекаемой поверхности. Исследована потеря устойчивости закрученного потока, в результате которой это явление возникает. В значительной степени эти статьи посвящены изучению причин разрушения вихря. Там же представлены результаты некоторых численных исследований. На основе упрощенных уравнений Навье — Стокса (в квазицилиндрическом приближении) получены режимы с одиночным вихревым образованием [2, 6], а на основе полных уравнений Навье — Стокса — режимы со двоянными вихревыми структурами [4, 7]. Исследование решений параболизированных уравнений квазицилиндрического приближения проведено в [9]. Асимптотическая теория развита в [10].

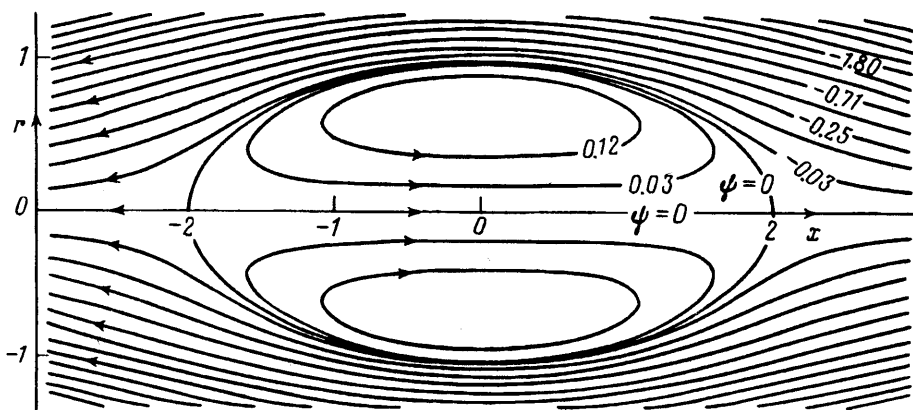
В дополнение к этим исследованиям здесь приводится точное аналитическое решение уравнений Навье — Стокса, воспроизводящее одиночное вихревое образование с потенциальной закруткой исходного потока.

Уравнения стационарных осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах имеют вид

$$\begin{aligned}u_x + v_r + \frac{v}{r} &= 0, \quad u_r - v_x = \omega \\ u\omega_x + v\omega_r - \frac{v\omega}{r} + \frac{(w^2)_x}{r} &= \varepsilon \left( \omega_{xx} + \omega_{rr} + \frac{\omega_r}{r} - \frac{\omega}{r^2} \right) \\ u w_x + v w_r + \frac{v w}{r} &= \varepsilon \left( w_{xx} + w_{rr} + \frac{w_r}{r} - \frac{w}{r^2} \right)\end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $x, r, \vartheta$  — осевая, радиальная и угловая координаты соответственно,  $u, v, w$  — составляющие вектора скорости по этим направлениям соответственно,  $\omega$  — вихревая функция,  $\varepsilon$  — единица, деленная на число Рейнольдса. Функция тока  $\psi$  в меридиональной плоскости течения вводится формулой

$$d\psi = r u dr - r v dx$$



В [11] получены некоторые классы точных решений уравнений (1). Среди них содержится

$$\psi = Ar^2 \left( 1 - \frac{x^2}{B^2} - \frac{r^2}{C^2} \right) \quad (2)$$

$$w = \frac{\Gamma}{r}, \quad \omega = -A \left( \frac{2}{B^2} + \frac{8}{C^2} \right) r$$

где  $A, B, C, \Gamma$  — произвольные постоянные. Кинематические характеристики течения не зависят от числа Рейнольдса. Это решение при  $A=1, B=2, C=1, \Gamma=0$  (без азимутальной скорости) проиллюстрировано в [12]. Если  $\Gamma \neq 0$ , то картина линий  $\psi = \text{const}$  не меняется (фигура). Давление  $p$ , деленное на постоянную плотность, находится из уравнений Навье — Стокса

$$uu_x + vu_r + p_x = \varepsilon (u_{xx} + u_{rr} + u_r/r)$$

$$uv_x + vv_r - w^2/r + p_r = \varepsilon (v_{xx} + v_{rr} + v_r/r - v/r^2)$$

В случае решения (2) с принятым значением постоянных величина  $p$  определяется формулой

$$p = x^2 - \frac{x^4}{8} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{2} - \frac{\Gamma^2}{2r^2} - 17\varepsilon x \quad (3)$$

Давление зависит от числа Рейнольдса. На оси  $r=0$  оно вместе с  $w$  имеет особенность потенциального вихря.

Решение (2) при  $B=C, \Gamma=0$  воспроизводит в вязкой жидкости шаровой вихрь Хилла [13], полученный для идеальной жидкости.

Вихревое образование (2) состоит из одного сомкнувшегося на оси кольцевого вихря и отвечает структуре, полученной в [6] экспериментально и численно на основе уравнений Навье — Стокса. Ротор вектора скорости имеет составляющие  $\gamma, 0, 17Ar/2$  (где  $\gamma=0$  при  $r>0, \gamma=\infty$  при  $r=0$ ) по направлениям  $x, r, \psi$  соответственно и, таким образом, постоянен при  $r=\text{const}$ . В этом смысле термин «разрушение вихря» не имеет под собой оснований. Поведение ротора вектора скорости вынуждает говорить про сохранение вихря, а чисто зрительное впечатление от замкнутых линий  $\psi = \text{const}$  (фигура) — про возникновение вихря на пути закрученного потока.

Решение (2) обращает в нуль порознь левые и правые части последних двух уравнений из (1). Следовательно, оно пригодно и для идеальной жидкости. В этом случае в выражении для давления следует положить  $\varepsilon=0$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Werlé H.* Visualisation en tunnel hydrodynamique//Rech. Aéronaut. 1953. № 33. P. 3—7.
2. *Gartshore I. S.* Recent work in swirling incompressible flow. Nat. Res. Coun. Canada. Aeronaut. Rep. 1962. LR-343. 58 p.
3. *Hall M. G.* Vortex breakdown//Ann. Rev. Fluid Mech. 1972. V. 4. P. 195—218.
4. *Leibovich S.* The structure of vortex breakdown//Ann. Rev. Fluid Mech. 1978. V. 10. P. 221—246.
5. *Leibovich S.* Vortex stability and breakdown: survey and extension//AIAA Journal. 1984. V. 22. № 9. P. 1192—1206.
6. *Escuder M.* Vortex breakdown: observations and explanations//Progr. Aerospace Sci. 1988. V. 25. № 2. P. 189—229.
7. *Spall R. E., Gatski T. B., Ash R. L.* The structure and dynamics of bubble-type vortex breakdown//Proc. Roy. Soc. 1990. A. V. 429. № 1877. P. 613—637.
8. *Van Dyke M.* An album of fluid motion. Stanford: Parabolic Press, 1982. 176 p.
9. *Тригуб В. Н.* К вопросу о разрушении вихревой нити//ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 220—226.
10. *Сычев Вук. В.* Асимптотическая теория разрушения вихря//Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 3. С. 78—90.
11. *Шмыглевский Ю. Д.* О закрученных течениях идеальной и вязкой жидкостей//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33. № 12. С. 1905—1911.
12. *Шмыглевский Ю. Д.* О вихревых образованиях в вязкой жидкости//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 6. С. 955—959.
13. *Hill M. J. M.* On a spherical vortex//Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1894. V. 185. P. 213—245.

Москва

Поступила в редакцию  
22.IV.1994