

УДК 533.72

© 1995 г. В. В. ГАЛКИН

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ДВУХМАСШТАБНОГО ГОМОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО АФФИННОГО ТЕЧЕНИЯ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА

Исследуется точное решение системы уравнений для кинетических моментов второго порядка (напряжений) в характеризуемом двумя макромасштабами течении, когда на одномерное нестационарное течение газа наложено нестационарное сдвиговое течение.

Бесконечная система уравнений кинетических моментов выводится из кинетического уравнения Больцмана путем его интегрирования по собственным скоростям молекул с весами, пропорциональными различным произведениям компонентов вектора c . Эта система распадается на последовательность рекуррентных систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами для моментов второго и т. д. порядков в случае гомоэнергетических аффинных течений одноатомного газа из максвелловских молекул (класс точных решений Галкина — Трусделла). В этих течениях независимыми переменными функции распределения являются c и время t , поэтому плотность, напряжения, тепловые потоки и другие кинетические (центральные) моменты зависят только от t . Однако скорость газа, не являющаяся центральным моментом функции распределения, линейно зависит еще и от пространственных координат с коэффициентами — известными функциями t (рассмотрен однокомпонентный газ в отсутствие внешних сил).

Аналізу решений этих рекуррентных систем уравнений посвящено значительное число работ. При этом точные аналитические решения уравнений для моментов второго и третьего порядков были получены лишь для течений, когда в задачу входит только один макроскопический временной масштаб. Многие из результатов анализа суммированы и дополнены в книге [1]. Теоремы существования и единственности решения соответствующей начальной задачи для уравнения Больцмана доказаны в [2].

В настоящей работе заменой независимой переменной уравнения для кинетических моментов второго порядка преобразуются в линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Особое внимание уделено изучению влияния начальных значений напряжений и сопоставлению точного решения кинетического уравнения Больцмана с приближенными решениями при малых числах Кнудсена. Решение в приближении Барнетта значительно лучше согласуется, вообще говоря, с точным решением, чем в приближении Навье — Стокса. При некоторых начальных значениях напряжения сдвига с ростом времени t давление становится отрицательным, т. е. решение — «нефизичным». Сделан краткий обзор, дополняющий [1, 2].

1. Рассматривается класс течений газа, когда компоненты его скорости линейно зависят от пространственных декартовых координат x_j

$$u_i = \psi_{ij}(t) x_j \quad (1.1)$$

Выражения для коэффициентов формулы (1.1) удобно записать в виде [3, 4]

$$\psi_{ij} = [|a_{kr}| t^2 \delta_{ij} + (a_{kk} a_{ij} - a_{ik} a_{kj}) t + a_{ij}] \Delta^{-1}, \quad a_{ij} = \psi_{ij}(0) \quad (1.2)$$

$$\Delta \equiv | \delta_{kr} + a_{kr} t | = | a_{kr} | t^3 + 1/2 (a_{kk} a_{rr} - a_{kr} a_{rk}) t^2 + a_{kk} t + 1$$

В (1.2) $|a_{kr}|$ — определитель из элементов a_{kr} , δ_{ij} — символ Кронекера, применяется суммирование по повторяющимся индексам i, j, k, r , по другим повторяющимся индексам суммирование не проводится.

Функция распределения $f = f(c, t)$, где $c = \xi - u$, ξ — абсолютная скорость молекулы, удовлетворяет уравнению Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \psi_{ij} c_j \frac{\partial f}{\partial c_i} = J(f, f), \quad f(c, 0) = F(c) > 0 \quad (1.3)$$

Здесь J — интеграл столкновений, F — заданная функция. По определению, кинетический момент n -го порядка

$$M^{(n)} = \langle c^n \rangle, \quad \langle A \rangle = m \int A f dc, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$M^{(0)} = \rho, \quad M^{(1)} = 0, \quad M_{ij}^{(2)} = p \delta_{ij} + p_{ij}, \quad p = k\rho T/m$$

где k — постоянная Больцмана, m — масса молекулы, T — температура. В данном случае $M^{(n)} = M^{(n)}(t)$. Из уравнения неразрывности с учетом (1.1), (1.2) следует

$$\rho = \rho(0) \Delta^{-1} \quad (1.4)$$

уравнение импульса удовлетворяется тождественно, уравнение энергии запишем в виде

$$\frac{dp}{dt} + \frac{5}{3} \psi_{rr} p + \frac{2}{3} \psi_{ij} p_{ij} = 0 \quad (1.5)$$

Обобщение представленных соотношений на случай наличия внешних сил приведено в [1]. Постановка задачи и анализ частных решений для смеси газов с внешними силами даны в [3, 4].

Задача (1.3) решается, вообще говоря, численно. Для простейшего течения данного класса, когда $u_i = x_i/(t+c)$, $c = \text{const}$, путем преобразования независимых переменных задачу удастся свести к более простой задаче релаксации безградиентного газа [5]. Важно подчеркнуть, что для этого течения уравнение (1.5) сводится к соответствующему уравнению в приближении Эйлера. В явном виде решение задачи (1.3) найдено для свободномолекулярного предела, когда интегралом столкновений пренебрегается. Наиболее общим здесь является решение для свободномолекулярной смеси газов с учетом зависящих только от t внешних сил [4]. Подчеркнем, что в [4, 6] использовалась терминология [5, 7], где рассматриваемые здесь течения были названы однородными (ибо $f = f(t, c)$ не зависит явно от x).

Можно, однако, вычислить кинетические моменты, не зная f . Зацепление уравнений кинетических моментов обусловлено двумя причинами: в уравнение для $M^{(n)}$, $n \geq 2$, входят производные по x_j проекций момента $M^{(n+1)}$; момент n -го порядка от интеграла столкновений $m^{(n)}$ зависит, вообще говоря, от кинетических моментов любого порядка. В данном случае указанные производные равны нулю. Для максвелловских молекул (когда межмолекулярная сила обратно пропорциональна пятой степени расстояния между молекулами и коэффициент вязкости $\mu = \mu_0 T$, $\mu_0 = \text{const}$) $m^{(n)}$ дается конечным выражением из $M^{(m)}$, $m \leq n$. Следовательно, в данном случае система уравнений кинетических моментов распадается на рекуррентную последовательность систем уравнений.

Наиболее интересны здесь уравнения для p_{ij} , вместе с (1.5) замыкающие задачу определения газодинамических переменных, т. е. задачу определения давления p при известных ρ , u . С учетом (1.1), (1.4) имеем

$$\frac{dp_{ij}}{dt} + p_{ij}\psi_{rr} + 2[p_{ij}\psi_{jr}] + 2p[\psi_{ij}] + \frac{1}{\Delta\tau} p_{ij} = 0 \quad (1.6)$$

$$[A_{ij}] = 1/2 (A_{ij} + A_{ji}) - 1/3 A_{rr} \delta_{ij}, \quad \tau = \frac{m\mu_0}{k\rho(O)}$$

Аналізу решений системы уравнений (1.5), (1.6) в [1] уделено много места, в основном для сдвигового течения

$$u_1 = a_{12}x_2, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad \rho = \text{const}, \quad a_{12} > 0 \quad (1.7)$$

и одномерного нестационарного течения (homoenergetic extension [1])

$$u_1 = \frac{a_{11}x_1}{1+t^*}, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad \rho = \frac{\rho(0)}{1+t^*}, \quad t^* = a_{11}t \quad (1.8)$$

Для (1.7) уравнения (1.5), (1.6) являются уравнениями с постоянными коэффициентами. Уравнения такого же типа получаются для (1.8) после введения новой независимой переменной

$$\eta = 1/3 \ln(1+t^*) \quad (1.9)$$

Заметим, что в [1] не упоминаются работы [6, 8, 9]. В [6] на примере (1.8) проведено сравнение результатов методов Гильберта и Чепмена — Энскога — проиллюстрирована задача начального кнудсеновского слоя. В [8] исследовано асимптотическое ($t \rightarrow \infty$) поведение некоторых решений уравнений кинетических моментов второго и третьего порядков. Показано, что имеют место принципиальные различия асимптотик точных решений и решений в приближении Навье — Стокса. В изученных в [9] случаях барнеттовское приближение исправляет навье-стоксовское и обеспечивает качественно правильный вывод об асимптотической устойчивости рассмотренных решений. Кроме того, в [9] дан анализ решений уравнений (1.5), (1.6) для течения

$$u_1 = \frac{a_{11}}{1+t^*} (x_1 + x_2), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad \rho = \frac{\rho(0)}{1+t^*} \quad (1.10)$$

при $a_{11} > 0$. Качественные выводы аналогичны [10, 6].

Решение уравнений для моментов третьего порядка получено для (1.7), наиболее полные выкладки представлены в [1]. Здесь релаксационная (БГК) модель кинетического уравнения Больцмана дает качественно неверные результаты [11]: согласно точному решению, при числе Кнудсена $\text{Kn} \equiv a_{12}\tau > 3\sqrt{2}$ и $t/\tau \rightarrow \infty$ тепловой поток $q_3 \rightarrow \infty$, а при $\text{Kn} < 3/\sqrt{2}$ $q_3 \rightarrow 0$; согласно решению в рамках модели, $q_3 \rightarrow 0$ при $t/\tau \rightarrow \infty$ независимо от Kn .

2. Течения (1.7), (1.8), (1.10) характеризуются одним макроскопическим масштабом времени ($1/a_{12}$ или $1/a_{11}$). То же относится и к остальным исследованным течениям данного класса [1, 3]. Рассмотрим более общее двухмасштабное течение, для которого, однако, «работает» преобразование (1.9)

$$u_{11} = \frac{a_{11}x_1}{1+t^*}, \quad u_2 = \frac{a_{21}x_1}{1+t^*}, \quad u_3 = 0, \quad t^* = a_{11}t \quad (2.1)$$

$$t \in [0, t_0), \quad t_0 = \infty \quad (a_{11} > 0), \quad t_0 = \frac{1}{|a_{11}|} \quad (a_{11} < 0) \quad (2.2)$$

$$\rho = \rho(0)(1+t^*)^{-1} \quad (2.3)$$

В (2.1) коэффициенты a_{11} , a_{21} произвольны по величине и знаку. Из (1.5), (1.6) с учетом (1.9), (2.1)—(2.3) следует, что задачу определения газодинамических переменных замыкает система уравнений:

$$p' + 5p + 2p_{11} + 2\alpha p_{12} = 0, \quad p' = \frac{dp}{d\eta} \quad (2.4)$$

$$p_{11}' + 4p + (7 + 3\beta^{-1}) p_{11} - 2\alpha p_{12} = 0$$

$$p_{12}' + 3\alpha p + 3\alpha p_{11} + (6 + 3\beta^{-1}) p_{12} = 0$$

$$\eta = 0: \quad p = p(0), \quad p_{11} = p_{11}(0), \quad p_{12} = p_{12}(0) \quad (2.5)$$

В систему (2.4) входят произвольные по величине и знаку безразмерные параметры

$$\beta = a_{11}\tau, \quad \alpha = \frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad |\beta| = \text{Kn}, \quad \text{sign } \beta = \text{sign } a_{11} \quad (2.6)$$

Полагая

$$r = \frac{y-2}{\beta} - 6 \quad (2.7)$$

запишем характеристическое уравнение системы (2.4) для $r = r(\beta, \alpha^2)$ в виде

$$y^3 - 3p_0 y - 2q_0 = 0 \quad (2.8)$$

$$p_0 = 1 + \beta + 3\beta^2 > 0, \quad q_0 = 1 + 3\frac{1}{2}\beta + 9\alpha^2\beta^2 + 9\frac{1}{2}\beta^2 > 0$$

Используя формулы Кардана для (2.8), получаем следующие выражения для корней характеристического уравнения:

$$r_1 = \frac{u+v-2}{\beta} - 6, \quad r_{2,3} = R \pm i\omega \quad (2.9)$$

$$u, v = (q_0 \pm \sqrt{9\beta^2 G})^{1/3}, \quad R = -\frac{r_1}{2} - 9 - \frac{3}{\beta}, \quad \omega = \frac{\sqrt{3}}{2\beta} (u - v)$$

$$G = 2\alpha^2 - \sqrt{12} + (3\alpha^2 - 11\sqrt{18})\beta + 9(\alpha^4 + \alpha^2 - 7/36)\beta^2 - 3\beta^3 - 3\beta^4$$

Разложения (2.9) по малым β имеют вид

$$u, v = 1 + (\sqrt{2} \pm \delta F)\beta + \left[\alpha^2 + 4/3 \mp \frac{\delta}{2F}(\alpha^2 + 4/9) \right] \beta^2 - \\ - \left[\alpha^2 + 8/9 \mp \frac{\delta}{8F^3}(72\alpha^6 + 36\alpha^4 - 67/9\alpha^2 + \sqrt{162}) \pm \delta F(8/3\alpha^2 + 17/9) \right] \beta^3 + O(\beta^4) \\ r_1 = -5 + 2(\alpha^2 + 4/3)\beta - 2(\alpha^2 + 8/9)\beta^2 + O(\beta^3) \quad (2.10)$$

$$R = -\frac{3}{\beta} - 13/2 - (\alpha^2 + 4/3)\beta + O(\beta^2), \quad \omega = \delta\sqrt{3}F \left[1 - \frac{\beta}{2F^2}(\alpha^2 + 4/9) + O(\beta^2) \right]$$

$$\delta = \text{sign } \beta, \quad F = \sqrt{2\alpha^2 - \sqrt{12}} \quad (2.11)$$

Здесь и ниже при разложении формул в ряды по малому или большому параметру остальные параметры (и при необходимости t') предполагаются фиксированными. При $t \rightarrow t_0$ фиксируются все параметры течения.

Для $\alpha^2 \rightarrow \infty$ из (2.9) имеем

$$r_1 = \gamma - 6 - \frac{2}{\beta} + \varepsilon, \quad \gamma = \left(18 \frac{\alpha^2}{\beta}\right)^{1/3}, \quad \varepsilon = O(\alpha^{-4/3}) \quad (2.12)$$

$$R = -\frac{\gamma}{2} - 6 - \frac{2}{\beta} + \varepsilon, \quad \omega = \sqrt{3} \frac{\gamma}{2} + \varepsilon$$

Величина G в (2.9) обращается в нуль, когда

$$\alpha^2 \equiv \alpha_0^2 = E\{[1 + (1 + 22/3\beta + 21\beta^2 + 36\beta^3 + 36\beta^4) \delta_1^{-1}]^{1/2} - 1\}$$

$$E = (9\beta^2 + 3\beta + 2) \delta_2^{-1} > 0, \quad \delta_1 = 108E^2\beta^2, \quad \delta_2 = 18\beta^2$$

При $\alpha^2 > \alpha_0^2$ имеем $G > 0$, корень r_1 действительный, два других корня комплексно-сопряженные.

Решение задачи (2.4), (2.5) запишем в виде

$$\Pi_m = A_m \exp(r_1 \eta) + Z_m, \quad (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) \equiv (p, p_{11}, p_{12}) p^{-1}(0) \quad (2.13)$$

Здесь $m = 1, 2, 3$. При $G > 0$

$$Z_m = [(B_m - A_m) \cos \omega \eta + D_m \sin \omega \eta] \exp(R \eta) \quad (2.14)$$

$$B_1 = 1, \quad B_2 \equiv \pi_{11} = \frac{p_{11}(0)}{p(0)}, \quad B_3 \equiv \pi_{12} = \frac{p_{12}(0)}{p(0)}$$

Коэффициенты A_m даются формулами

$$A_1 = (e_1 - 2\pi_{11}e_2 - 2\alpha\pi_{12}e_3)(e_1 - 2f_2e_2 - 2\alpha f_3e_3)^{-1}, \quad A_{2,3} = A f_{2,3} \quad (2.15)$$

$$e_1 = \omega^2 + (R + 5)^2 + 8 + 6\alpha^2, \quad e_2 = r_1 + 6 - 3\alpha^2 + \xi, \quad e_3 = r_1 + 9 + \xi, \quad \xi = \frac{3}{\beta}$$

$$f_2 = -(r_1 + 9)(r_1 + 9 + \xi)^{-1} \quad (2.16)$$

$$f_3 = -3\alpha(1 + f_2)(r_1 + 6 + \xi)^{-1} \quad (2.17)$$

Для экономии места выражения для D_m не приводим. Для дальнейшего достаточно знать, что при любых t^* имеем $A_1 = 1, D_m = 0$ в особом случае

$$\pi_{11} = f_2, \quad \pi_{12} = f_3 \quad (2.18)$$

когда

$$p = p(0)(1 + t^*)^{1/3}, \quad p_{11} = p f_2, \quad p_{12} = p f_3 \quad (2.19)$$

Здесь использованы формулы (1.9), (2.13), (2.15)–(2.17).

При малых β с учетом (2.10) из (2.15) имеем

$$A_1 = 1 - 2/3\pi_{11}\beta - 2/3\alpha\pi_{12}\beta + O(\beta^2) \quad (2.20)$$

Используя же (2.12) и оставляя асимптотически главные члены, найдем

$$A_1 \rightarrow 2 \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 \left[1 + \pi_{11} - \pi_{12} \frac{\gamma}{3\alpha}\right], \quad \alpha^2 \rightarrow \infty \quad (2.21)$$

При $G < 0$ уравнение (2.8) имеет три действительных корня

$$y_1 = 2\sqrt{p_0} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad y_{2,3} = -2\sqrt{p_0} \cos \left(60^\circ \mp \frac{\varphi}{3}\right), \quad \varphi = \arccos(q_0 p_0^{-3/2}) \quad (2.22)$$

Учитывая определения (2.7) для $r(y)$ и (2.11) для δ , с помощью (2.22) при $|\beta| \gg 1$ получаем

$$r_{1,2} = -6 \pm 3\delta + \frac{\alpha^2 - 3/2 \pm 1/2\delta}{\beta} + O(\beta^{-2}), \quad r_3 = -6 - \frac{2\alpha^2 + 3}{\beta} + O(\beta^{-2}) \quad (2.23)$$

В решении (2.13), (2.14) Z_m теперь представляет собой линейное выражение из $\exp(r_{2,3}\eta)$. При этом

$$A_l = \frac{\psi}{\varphi}, \quad \psi = f_2^{(2)}f_3^{(3)} - f_2^{(3)}f_3^{(2)} - \pi_{11}(f_3^{(3)} - f_3^{(2)}) + \pi_{12}(f_2^{(3)} - f_2^{(2)}) \quad (2.24)$$

Здесь φ получается из ψ заменой π_{11}, π_{12} соответственно на коэффициенты f_2, f_3 , даваемые формулами (2.16), (2.17). Выражения $f_2^{(n)} = f_2(r_n), f_3^{(n)} = f_3(r_n), n = 2, 3$, следуют из этих формул путем замены r_1 на r_n . Для (2.18) снова получаем (2.19).

Разложение формулы (2.24) по малым β совпадает с (2.20). Используя (2.23), при $|\beta| \gg 1$ найдем

$$A_l (\beta > 0) = 1/3 [2 + \alpha^2 + (\alpha^2 - 1)\pi_{11} - 2\alpha\pi_{12}] + O(\beta^{-1}) \quad (2.25)$$

$$A_l (\beta < 0) = 1/3 (1 + \alpha^2)[1 + \pi_{11} - \alpha\pi_{12}(3\beta)^{-1}] + O(\beta^{-1})$$

Можно показать, что

$$\text{sign}(\text{Re } r_{2,3} - r_1) = -\text{sign } \beta = -\text{sign } \alpha_{11} \quad (2.26)$$

Здесь $\text{Re } r_{2,3}$ — действительные составляющие корней r_2, r_3 . При $G \geq 0$ проще всего для доказательства (2.26) использовать известное свойство корней кубического уравнения (2.8) $y_1 y_2 y_3 = 2q_0$, откуда $u + v > 0$, а при $G < 0$ — непосредственно применить (2.22).

Для остальных вязких напряжений получим

$$p_{13} = p_{13}(0)(1 + t^*)^{-2-1/\beta}, \quad p_{23} = p_{23}(0)(1 + t^*)^{-1-\alpha-1/\beta} \quad (2.27)$$

$$p_{22} = 1/2 (h - p_{11}), \quad p_{33} = -1/2 (h + p_{11}) \quad (2.28)$$

В (2.28) применено свойство $p_{ii} = 0, i = 1, 2, 3$. Функция h удовлетворяет соотношениям

$$h' + 3(1 + \beta^{-1})h = -6\alpha p_{12}, \quad h(0) = p_{22}(0) - p_{33}(0) \quad (2.29)$$

Из (2.27) с учетом последней формулы (2.6) следует, что поведение функций $p_{13}(t), p_{23}(t)$ кардинально зависит от знаков и величин параметров α, β . При $t \rightarrow t_0$, где t_0 определена в (2.2), имеем $p_{23} \rightarrow 0$, за исключением случаев $\beta < -(1 + \alpha)^{-1}, \alpha > -1; \beta > 0, \alpha < -1 - 1/\beta$, когда $p_{23} \rightarrow \infty$.

В пределе малых чисел Кнудсена $\text{Kn} \equiv |\beta| \rightarrow 0$ напряжения $p_{13} \rightarrow 0, p_{23} \rightarrow 0$, что согласуется с приближением Навье — Стокса, когда $p_{13} = 0, p_{23} = 0$.

3. Перейдем к анализу решения задачи. В силу свойства (2.26) отношение слагаемых в (2.13)

$$Z_m [A_m \exp(r_l \eta)]^{-1} \sim (1 + t^*)^l \rightarrow 0, \quad l = 1/3 (\text{Re } r_{2,3} - r_1)$$

при $t \rightarrow t_0$ тем быстрее, чем меньше $|\beta|$. Пренебрегая при $t \rightarrow t_0$ слагаемыми Z_m , найдем

$$\frac{p}{p(0)} \approx \frac{p_D}{p(0)} \equiv A_l (1 + t^*)^{l/3}, \quad \frac{p_{11}}{p} \approx \left(\frac{p_{11}}{p}\right)_D \equiv f_2, \quad \frac{p_{12}}{p} \approx \left(\frac{p_{12}}{p}\right)_D \equiv f_3 \quad (3.1)$$

Здесь f_2, f_3 даются формулами (2.16), (2.17). Аналогичные (3.1) части решения для течения (1.7) Трусделл назвал доминантными (см. ссылки в [1]). Из (3.1)

следует, в частности, что в конечном ($t \rightarrow t_0$) временном слое функция распределения не максвеллизуется: здесь $p_{11}/p \neq 0$, $p_{12}/p \neq 0$. В особом случае (2.18) выражения (3.1) превращаются в точные решения (2.19).

Из (2.29) и (3.1) найдем доминантную часть h

$$\left(\frac{h}{p}\right)_D = -2\alpha f_3 \left(1 + \frac{1}{\beta} + \frac{r_1}{3}\right)^{-1}$$

По определению, $p > 0$, однако p_{12} и, следовательно, отношение $\pi_{12} = p_{12}(0)/p(0)$ произвольны по величине и знаку. Согласно формулам (2.15) — (2.17) и (2.24), для любых конечных α, β, π_{11} найдется такое π_{12} , что $A_1 < 0$. Следовательно, при некотором t^* давление становится отрицательным и решение перестает иметь физический смысл.

При помощи формул (2.15), (2.24) рассчитаны «граничные значения» $\pi_{12}^* = \pi_{12}(\pi_{11} = 0)$ из уравнения $A_1 = 0$ для различных α, β . Характерные значения $\alpha\pi_{12}^*$ таковы: при $\beta = -10, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 10$ для $|\alpha| = 0,5$ соответственно имеем $\alpha\pi_{12}^* = -32, -17, -11, -5, 7, 2, 1, 1, 4, 1, 3, 1, 2$, для $|\alpha| = 5$ имеем $\alpha\pi_{12}^* = -55, -37, -28, -18, 10, 10, 5, 11, 11, 6$.

Вопрос о влиянии $\pi_{11} = p_{11}(0)/p(0)$ более тонкий. В силу положительности функции распределения молекул газа по скоростям четные кинетические моменты также положительны, т. е. $p + p_{mm} > 0$, $m = 1, 2, 3$. Так как $p(0) > 0$, то $1 + \pi_{mm} > 0$. Учитывая $\sum_m \pi_{mm} = 0$, найдем, в частности, неравенство

$$-1 < \pi_{11} < 2 \quad (3.2)$$

Соотношение (3.2) не учтено в полной мере в [1] при анализе коэффициента

$$A_1 = \left(7 + r_1 - 2\pi_{11} + \frac{3}{\beta}\right) \left(12 + 2r_1 + \frac{3}{\beta}\right)^{-1} \quad (3.3)$$

для течения (1.8). Значения корня r_1 приведены в [1, 10]; при $\beta \rightarrow \infty$ $r_1 \rightarrow -3$, $\beta \rightarrow -\infty$ $r_1 \rightarrow -9$. Вопреки [1] при выполнении условия (3.2) и любом β из (3.3) следует, что в этом случае $A_1 > 0$.

Для дальнейшего важно подчеркнуть, что в силу (2.20) при $\beta \rightarrow 0$ и конечных $\pi_{11}, \pi_{12}, \alpha$ величина $A_1 > 0$.

Сопоставим полученные результаты с результатами метода Чепмена — Энскога. Обозначим

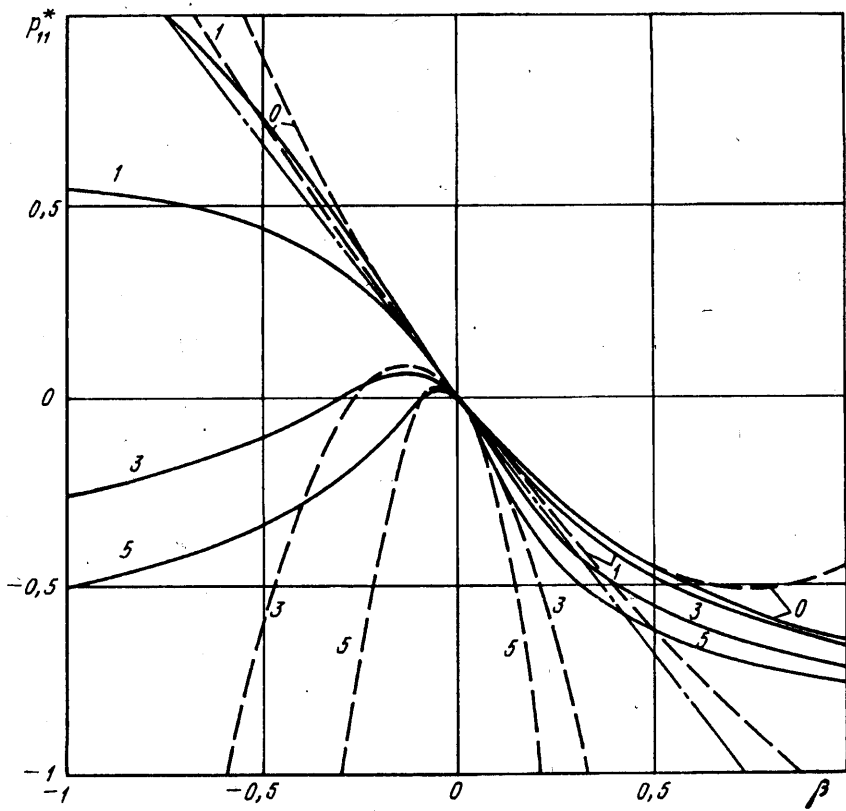
$$p_{11}^* = \left(\frac{p_{11}}{p}\right)_D = f_2, \quad p_{12}^* = \left(\frac{p_{12}}{\alpha p}\right)_D = \frac{f_3}{\alpha} \quad (3.4)$$

Подставляя в правые части выражений (3.4) разложение r_1 по β из (2.10), получим абсолютно сходящиеся при достаточно малом числе Кнудсена $Kn = |\beta|$ степенные ряды¹

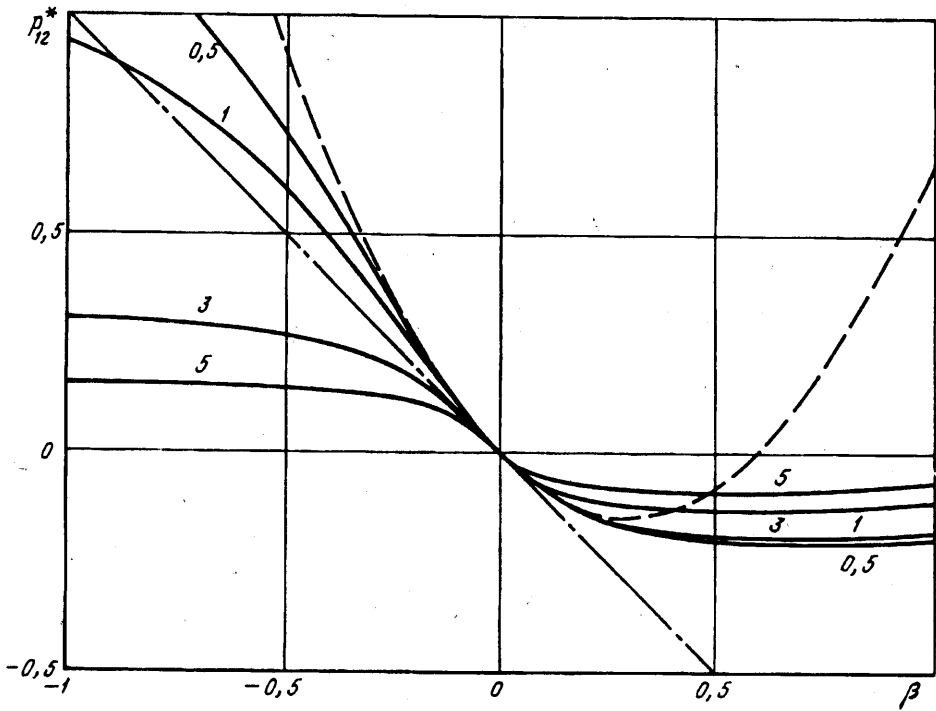
$$p_{11}^* = -4/3\beta + 8/9(1 - 3/4\alpha^2)\beta^2 + \dots, \quad p_{12}^* = -\beta + 5/3\beta^2 + \dots \quad (3.5)$$

Аналогично [1, 6, 10] доказывается, что ряды (3.5) совпадают с рядами, даваемыми методом Чепмена — Энскога. Первые члены ($\sim \beta$) соответствуют приближению Навье — Стокса, вторые ($\sim \beta^2$) — Барнетта. При малых Kn доминантные части (3.1) отношений $p_{11}/p, p_{12}/p$ являются суммами внешних (вне начального кнудсеновского слоя) разложений решения. В особом случае (2.18), (2.19) этот слой исчезает, доминантные части являются решением задачи. Оче-

¹ При $\alpha = 0$ радиус сходимости разложения r_1 по β равен $1/2$. В [10] указано меньшее значение этого радиуса.



Фиг. 1



Фиг. 2

видно, что в общем случае отдельные приближения метода могут давать требуемую точность лишь для некоторых t внутри интервала $[0, t_0]$ [3, 6, 9, 10], т. е. между начальным ($t \sim \tau$) и конечным ($t \rightarrow t_0$) временными слоями.

Зависимости отношений p_{11}^* , p_{12}^* , даваемых формулами (3.4), (3.5), от β , $|\alpha|$ представлены на фиг. 1, 2. Сплошными кривыми приведены точные зависимости, штрихпунктирными — результаты приближения Навье — Стокса, пунктирными — Барнетта. Цифрами указаны соответствующие значения $|\alpha|$.

В целом результаты приближения Барнетта согласуются с точными решениями лучше, чем приближения Навье — Стокса, особенно для p_{11}^* при $\beta < 0$, когда p_{11}^* сильно зависит от $|\alpha|$, что не учитывается в приближении Навье — Стокса в отличие от приближения Барнетта. Однако для p_{12}^* эта зависимость учитывается более высокими приближениями метода Чепмена — Энскога. Примером исключительно высокой точности приближения Барнетта является точность вычисления p_{11}^* при $\beta > 0$ и $|\alpha| = 0,5$: вплоть до $\beta = 1$ оно дает ошибку $\delta \leq 6\%$.

При $\alpha^2 \geq 10$ характерное число Кнудсена следует вычислять по $|a_{12}|$, а не $|a_{11}|$; тогда $Kn = |\beta\alpha|$. Пересчет границ применимости приближения Барнетта (или Навье — Стокса) от $\alpha^2 = 1$ на $\alpha^2 \gg 1$ в предположении о независимости граничного значения $Kn_0 = |\beta_0\alpha|$ от $|\alpha|$ дает не только правильные качественные, но и зачастую количественные результаты. При этом

$$|\beta_0(\alpha^2 = 1)| |\beta_0(\alpha^2 \gg 1)|^{-1} = |\alpha|$$

В самом деле, пусть $Kn = Kn_0$, когда даваемое приближением Барнетта значение p_{11}^* на 10% отличается от точного. При $\beta > 0$, согласно расчетным данным, $\beta_0(\alpha = 1) \approx 0,25$, $\beta_0(\alpha = 5) \approx 0,047$, их отношение равно примерно 5, т. е. α .

Приближенные решения (3.1) для p_{11} , p_{12} , пропорциональные p , являются нормальными, удовлетворяющими известной теореме причинности Гильберта, ибо они не зависят явно от времени и начальных значений негидродинамических моментов. Однако доминантная часть решения в целом зависит от последних через величину A_1 , которой пропорционально p_D . В асимптотической теории задачи Коши для уравнения Больцмана A_1 находится в виде ряда по Kn путем сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений (проблема начального кнудсеновского слоя) [6]. В дальнейшем ограничиваемся особым случаем (2.18), (2.19).

Согласно методу Чепмена — Энскога, давление дается первой формулой из (2.19), где r_1 представляется рядом по β из (2.10). При $\beta = 0$ имеем решение уравнений Эйлера, линейный по β член «обеспечивается» уравнениями Навье — Стокса и т. д. Проводя дальнейшее разложение по β , получаем решение задачи методом Гильберта. Сравнение значений p , даваемых этими методами, с точными значениями для течения (1.8) при $\beta > 0$ проведено в [6].

Здесь рассмотрим другой частный случай — сдвиговое течение (1.7), когда

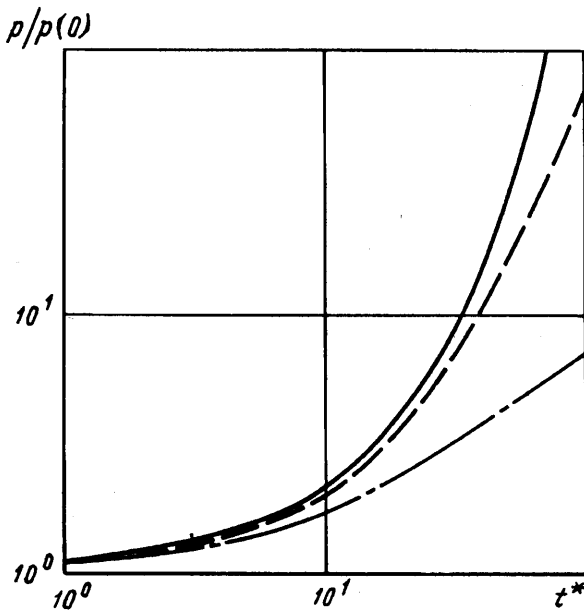
$$p = p(0) \exp(rt^*), \quad t^* = a_{12}t, \quad Kn = a_{12}\tau$$

$$r = \frac{1}{3Kn} [(N+w)^{1/3} - (N-w)^{1/3}]^2, \quad N = \sqrt{1+w^2}, \quad w = \frac{3}{\sqrt{2}} Kn$$

Подставляя сходящееся при $w \ll 1$ разложение r по Kn , найдем решение в третьем приближении метода Чепмена — Энскога

$$\frac{p}{p(0)} \approx \exp \left[\left(\frac{2}{3} Kn - \frac{8}{9} Kn^3 \right) t^* \right] \quad (3.6)$$

Первый член в подэкспоненциальном выражении дается приближением



Фиг. 3

Навье — Стокса, второй — супербарнеттовым приближением. Разлагая (3.6) по Kn , получаем решение в третьем приближении метода Гильберта

$$\frac{p}{p(0)} \approx 1 + \frac{2}{3} Kn t^* + \frac{2}{9} Kn^2 t^{*2} + \frac{4}{9} Kn^3 t^* \left(\frac{1}{9} t^{*2} - 2 \right) \quad (3.7)$$

Здесь решение в приближении Эйлера тривиально: $p = p(0)$. Первые два члена, т. е. $1 + \frac{2}{3} Kn t^*$, соответствуют первому приближению метода Гильберта, аналогичному приближению Навье — Стокса.

На фиг. 3 сплошной кривой показаны точные значения $p/p(0)$ при $Kn = 0,1$, с ними в масштабе графика практически совпадают результаты расчетов при помощи уравнений Навье — Стокса и формулы (3.6). Пунктирная кривая — расчеты по формуле (3.7), штрихпунктирная — расчет в первом приближении метода Гильберта.

Решения в первом и третьем приближениях Чепмена — Энскога гораздо лучше согласуются с точным, чем решения в соответствующих приближениях метода Гильберта.

Это является иллюстрацией общих результатов [12] по вопросам применимости метода Гильберта.

Некоторыми авторами [2] предлагалось модифицировать метод Гильберта таким образом, чтобы в нулевом приближении получать уравнения Навье — Стокса (а не Эйлера), а далее — последовательность неоднородных линейризованных уравнений Навье — Стокса. Чтобы получить решение задачи таким методом, нужно разложить (3.6) по Kn не при фиксированном t^* , а при фиксированном $t_e = Kn t^*$. Вместо (3.7) получаем

$$\frac{p}{p(0)} \approx \exp(2/3 Kn t^*) (1 - 8/9 Kn^3 t^*) \quad (3.8)$$

Результаты расчетов при $Kn = 0,1$ по формуле (3.8) практически совпадают с точными (сплошная кривая на фиг. 3). При $Kn = 0,3$ они также значительно ближе к точным, чем (3.7). Однако, согласно (3.8), при $t^* > \frac{9}{8} Kn^{-3}$ имеем $p < 0$.

Этот дефект отсутствует в результатах метода Чепмена — Энского, однако при таких t' его конечные приближения дают большие ошибки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-16407).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Truesdell C., Muncaster R. G. Fundamentals of Maxwell's kinetic theory of a simple monatomic gas. N. Y.: Acad. Press, 1980. 593 p.
2. Cercignani C. The Boltzmann equation and its applications. N. Y.: Springer-Verlag, 1988. 455 p.
3. Галкин В. С. О точных решениях уравнений кинетических моментов смеси одноатомных газов// Изв. АН СССР, МЖГ. 1966. № 5. С. 41—50.
4. Борисов А. С., Галкин В. С. Некоторые свойства однородных течений разреженных газов//Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 3. С. 64—69.
5. Никольский А. А. Трехмерное однородное расширение — сжатие разреженного газа со степенными функциями взаимодействия//Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 522—524.
6. Галкин В. С. Об однородных течениях разреженного газа при малых числах Кнудсена//Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 2. С. 57—62.
7. Никольский А. А. Об общем классе однородных движений сплошных сред и разреженных газов// Инж. журн. 1965. Т. 5. Вып. 6. С. 1044—1050.
8. Борисов А. С. Асимптотическое поведение некоторых решений системы кинетических моментов Грэда//Инж. журн. 1965. Т. 5. Вып. 6. С. 1051—1057.
9. Рудяк В. Я. К вопросу об изучении точных решений системы уравнений кинетических моментов// ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 369—372.
10. Галкин В. С. Одномерное нестационарное решение уравнений кинетических моментов одноатомного газа//ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 186—188.
11. Галкин В. С. О пределах применимости релаксационной модели уравнения Больцмана//Инж. журн. 1961. Т. 1. Вып. 3. С. 153—156.
12. Струминский В. В. О методе Гильберта решения кинетического уравнения Больцмана//Докл. АН СССР. 1964. Т. 158. № 1. С. 70—73.

Москва

Поступила в редакцию
1.XII.1993