

УДК 533.6.011.8

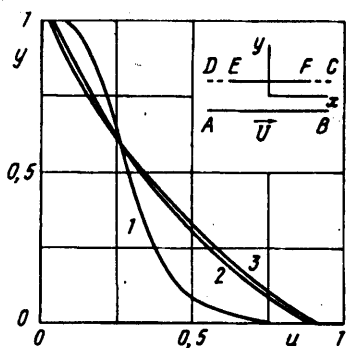
© 1995 г. Е. М. ШАХОВ

СДВИГОВОЕ ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА МЕЖДУ ДВУМЯ ПОДВИЖНЫМИ УЧАСТКАМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

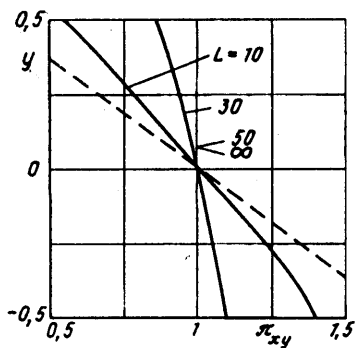
Изучается двумерное стационарное течение разреженного газа между параллельными плоскими поверхностями конечной и различной длины при условии, что одна из поверхностей неподвижна, а другая движется параллельно своей плоскости с постоянной скоростью, оставаясь в пределах заданного отрезка с неподвижными концами (движение подобно ленте транспортера). Течение можно рассматривать как двумерный аналог классического одномерного течения Куэтта. Соответствующая задача формулируется в прямоугольной области для нелинейного кинетического уравнения с модельным оператором столкновений и решается методом конечных разностей при различных граничных условиях. Для простоты рассматривались условия, при которых течение близко к изотермическому. Давление газа по разные стороны зазора, образуемого пластинами, может быть одинаковым или различным. В случае равенства давлений по обе стороны зазора между пластинами реализуется течение, близкое к безградиентному. При этом в середине зазора течение тем ближе к одномерному течению Куэтта, чем больше длина пластин. Изучены концевые эффекты и условия, при которых течение в средней части области практически можно считать одномерным. В безградиентном режиме система в целом работает как насос, перемещающий газ с одной стороны зазора на другую. При наличии небольшого противодействия способность к перекачиванию газа также сохраняется.

В динамике разреженных газов хрестоматийной является задача о сдвиговом течении газа, возникающем при относительном движении двух плоскостей при нулевом градиенте давления (течение Куэтта) [1, 2]. Задача одномерна по физическому пространству и хорошо изучена как в линейной, так и в нелинейной постановке [3]. Сдвиговое течение между параллельными плоскостями бесконечной протяженности обычно рассматривают как предельный образ течения в малом зазоре между соосными цилиндрами при достаточно большом диаметре вращающегося цилиндра. Но одномерное течение Куэтта может возникать и между относительно движущимися поверхностями конечной длины при наличии входного и выходного участков. Примерами может служить течение в молекулярном насосе (при установке вращающегося цилиндра без эксцентриситета) и в микрозазоре между вращающимся магнитным диском и съемной головкой в дисковом компьютере при достаточно низком давлении. Предлагаемая работа посвящена простейшей модели соответствующего двумерного течения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двумерное стационарное течение разреженного газа в прямоугольной области $ABCD$ длиной L и высотой h . Начало прямоугольной декартовой системы координат поместим в центре прямоугольника $ABCD$ (фиг. 1). Нижняя граница AB , параллельная оси абсцисс, представляет собой подвижную поверхность, перемещающуюся параллельно самой себе с постоянной скоростью $U > 0$. Участок EF верхней границы представляет собой твердую неподвижную стенку; считаем ее расположенной симметрично относительно оси ординат. Участки DE и FC равной длины ΔL верхней границы



Фиг. 1



Фиг. 2

проницаемы для газа, вместе со входным боковым сечением AD и выходным BC они отделяют газ рассматриваемой области от газа в левом и правом резервуарах, не показанных на фиг. 1. В резервуарах газ покоится при условиях, которые поддерживаются постоянными. Равновесные параметры газа, соответствующие левому и правому резервуарам, помечаются ниже индексами 1 и 2 соответственно.

При движении твердой нижней поверхности газу передается импульс, газ над поверхностью вовлекается в движение и таким образом перебрасывается из левого резервуара в правый. Цель работы — проследить выход на одномерный режим течения Куэтта в средней части потока в зависимости от основных параметров задачи. Детали течения входа в зазор или выхода из зазора при этом отходят на второй план. Поэтому принимается наиболее простая и удобная для исследования схема течения, в которой, однако, существенное значение имеет не только продольный, но и поперечный поток газа.

Задача формулируется для кинетического уравнения относительно функции распределения молекул по скоростям $f(x, y, \xi_x, \xi_y, \xi_z)$, которое записывается в виде S -модели [3, 4]

$$\xi_x \frac{\partial f}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial f}{\partial y} = v(f^+ - f), \quad v = \frac{\rho}{\mu} \quad (1.1)$$

$$f^+ = f^{\circ} \left[1 + \frac{4}{5} (1 - \text{Pr}) S_{\alpha} c_{\alpha} \left(c^2 - \frac{5}{2} \right) \right], \quad f^{\circ} = \frac{n}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp - c^2$$

$$c_i = \frac{\xi_i - u_i}{\sqrt{2RT}}, \quad c^2 = c_{\alpha} c_{\alpha}, \quad n S_i = \int c_i c^2 f d\xi, \quad d\xi = d\xi_x d\xi_y d\xi_z$$

Здесь f° — локально-максвелловская функция распределения, Pr — число Прандтля; $\text{Pr} = 1$ соответствует БГК-модели. Предполагается суммирование по греческим индексам, причем индексы 1, 2, 3 соответствуют направлениям x, y, z . Коэффициент вязкости μ связан со средней длиной свободного пробега λ соотношением (m — масса молекулы)

$$\mu = \frac{5}{16} mn (2RT)^{1/2} \lambda \quad (1.2)$$

Необходимые макропараметры выражаются через функцию распределения в виде интегралов. Для числовой и массовой плотности n, ρ вектора средней скорости $u = (u_x, u_y) = (u_1, u_2)$, составляющих тензора напряжений P_{ij} , давления p , температуры T и потока энергии E_i имеем

$$n = \int f d\xi, \quad nu_i = \int \xi_i f d\xi, \quad M_{ij} = m \int \xi_i \xi_j f d\xi \quad (1.3)$$

$$P_{ij} = M_{ij} - \rho u_i u_j, \quad p = \frac{1}{3} P_{\alpha\alpha}, \quad \rho = mn, \quad RT = \frac{p}{\rho}$$

$$p_{ij} = P_{ij} - \rho \delta_{ij}, \quad 2E_i = m \int \xi_i \xi^2 f d\xi$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронеккера.

Сформулируем граничные условия задачи. Во входном сечении $x = -L/2$ и на входном участке DE для молекул, входящих в рассматриваемую область, принимается максвелловская функция распределения, соответствующая покоящемуся газу с параметрами n_1, T_1

$$f = f_1^0 = n_1 (2\pi RT_0)^{-3/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2RT_1}\right) \quad (1.4)$$

$$x = -L/2; \quad \xi_x > 0, \quad y = h/2, \quad -L/2 < x < -L/2 + \Delta L, \quad \xi_y < 0$$

На выходном контуре границы, состоящем из отрезков BC и CA , принимаются аналогичные условия с заменой индекса 1 на 2 и знаков у ξ_x и ξ_y на противоположные.

На нижней (подвижной) стенке зазора $y = -h/2$ ставится условие диффузного отражения с полной тепловой accommodation, причем температуру поверхности T_w считаем заданной постоянной, а плотность отраженных частиц $n_w(x)$ определяется условием непротекания

$$f = \frac{n_w}{\sqrt{(2\pi RT_w)^3}} \exp -c_w^2, \quad c_w^2 = \frac{(\xi_x - U)^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}{2RT_w} \quad (1.5)$$

$$n_w = \sqrt{\frac{2\pi}{RT_w}} \int_{\xi_y < 0} \xi_y f d\xi, \quad y = -\frac{h}{2}, \quad \xi_y > 0$$

Аналогичное условие имеет место и на верхней твердой поверхности зазора (участок EF), но при $U = 0$.

Газ, покоящийся слева, вовлекается в движение, подсасывается через участки AD и DE и, пройдя между пластинами, выталкивается справа через участок границы $BC + CF$. Это течение можно назвать двумерным аналогом течения Куэтта. Если пластины достаточно длинные, то в средней части области следует ожидать течение, близкое к одномерному течению Куэтта. В то же время можно проследить влияние концевых граничных условий и изучить выход на режим одномерного течения.

2. Редукция задачи и метод численного решения. Одно из положительных свойств подхода, основанного на применении приближенных кинетических уравнений типа БГК- или S -модели, состоит в том, что он допускает предварительное аналитическое упрощение задачи. Поскольку основной интерес представляют макропараметры, интегралы от функции распределения, то сформулированную задачу можно упростить, избавившись от «немой» переменной ξ_z [4]. Взамен полной функции распределения $f(x, y, \xi_x, \xi_y, \xi_z)$ введем две редуцированные функции распределения F и G

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} f d\xi_z, \quad G = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_z^2 f d\xi_z \quad (2.1)$$

Все основные макропараметры выражаются через функции F и G

$$n = \int F d\xi, \quad nu_i = \int \xi_i F d\xi, \quad M_{22} = m \int G d\xi, \quad d\xi = d\xi_x d\xi_y \quad (2.2)$$

Уравнение для искомой функции F получают из (1.1) интегрированием по ξ_z в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, а уравнение для G — путем умножения (1.1) на ξ_z^2 и последующего интегрирования по ξ_z в тех же пределах.

В дальнейшем используются безразмерные переменные. В качестве масштабов плотности, температуры и вязкости выбраны $n_1, T_1, \mu_1 = \mu(T_1)$, молекулярная и

массовая скорость отнесены к $\sqrt{2RT_1}$, функция распределения — к $n_1(2RT_1)^{-3/2}$. Масштабы длины выбираются различными по разным направлениям: продольная координата x относится к длине области, в то время как поперечная y — к ее ширине. Безразмерная длина зазора, выраженная в долях ширины h , обозначена через L . В результате область интегрирования становится квадратом, но в уравнении появляется масштабный коэффициент $1/L$. Ниже все безразмерные величины обозначаются теми же буквами, что и соответствующие им размерные.

Уравнения для безразмерных функций F и G имеют вид

$$\xi_x \frac{1}{L} \frac{\partial F}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{\tau} (F^+ - F) \quad (2.3)$$

$$\xi_x \frac{1}{L} \frac{\partial G}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{\tau} (G^+ - G)$$

$$F^+ = F^\circ [1 + 4/5 (1 - \text{Pr}) S_\alpha c_\alpha (c_\beta c_\beta - 2)]$$

$$G^+ = G^\circ [1 + 4/5 (1 - \text{Pr}) S_\alpha c_\alpha (c_\beta c_\beta - 1)]$$

$$F^\circ = \frac{n}{2\pi T} \exp(-c_\alpha c_\alpha), \quad G^\circ = 0,5TF^\circ \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{8}{5\sqrt{\pi}} \frac{1}{\text{Kn}} \frac{nT}{\mu}, \quad \text{Kn} = \frac{\lambda_1}{h}$$

Здесь Kn — число Кнудсена, а значение средней длины пробега λ_1 определяется, согласно (1.2), при $T = T_1$.

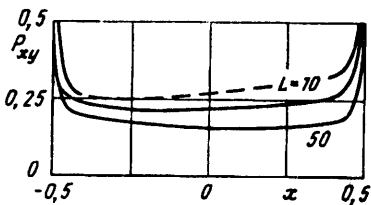
Поставленная нелинейная задача решалась численным методом, включающим в себя три элемента: 1) квадратурные формулы для вычисления макропараметров; 2) способ линеаризации уравнения и граничных условий; 3) метод решения линеаризованного кинетического уравнения.

Для вычисления макропараметров использовалось правило Симпсона по каждой из переменных ξ_x, ξ_y . Линеаризация задачи достигается путем использования обычного метода итераций, в котором при расчете $(n+1)$ -й итерации все макропараметры, входящие в правые части уравнений и в граничные условия, считаются заданными, известными из предыдущей итерации. Таким образом, в каждом приближении имеем пару линейных уравнений переноса, которые решаются методом конечных разностей.

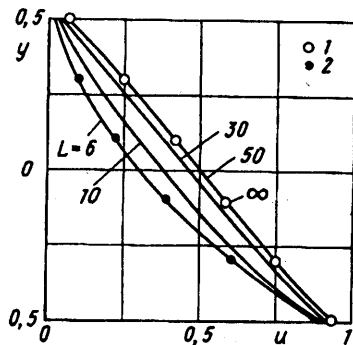
Сформулированная задача является типичной двумерной задачей для кинетического уравнения и сравнительно легко решается численно для умеренных значений параметров, в частности если линейные размеры области L и h соизмеримы. Вычислительные трудности возрастают как с уменьшением числа Кнудсена, так и с увеличением длины зазора. Из уравнений (2.3) видно, что при $L \rightarrow \infty$ уравнения и задача в целом становятся одномерными. Однако при больших, но конечных L скорость сходимости итерационного процесса очень мала, что затрудняет расчет и получение численного решения.

3. Течение в безградиентном поле давления. Рассмотрим сначала течения, в которых равновесные значения макропараметров газа в резервуарах слева и справа одинаковы: $n_2 = n_1, T_2 = T_1$, так что $p_2 = p_1$. Скорость нижней поверхности примем равной $U = 0,1$. Длина проницаемых участков DE и FC принята равной ширине зазора: $\Delta L = 1$. Варьируемыми параметрами являются длина зазора L и число Кнудсена Kn . Течения, которые реализуются при принятых условиях, обладают той отличительной особенностью, что плотность и температура в них практически не изменяются, а градиент давления близок к нулю. Свойства двуглового течения проявляются в них особенно отчетливо.

Фигура 1 дает представление об общей картине течения. Профили продольной скорости потока u , отнесенной к скорости пластины U , в граничном сечении AD , входном $x = -L/2 + \Delta L$ и среднем $x = 0$ сечениях, помеченные на фиг. 1 соответственно как кривые 1, 2, 3, рассчитаны для числа $\text{Kn} = 0,1$ и для отно-



Фиг. 3



Фиг. 4

сительной длины $L = 6$. Удивительным кажется то, что профили скорости во входном и в среднем сечениях очень близки. Однако это не означает, что течение в этом случае близко к одномерному, хотя бы потому, что на входе и выходе заметные значения имеет поперечная составляющая скорости.

Необходимое условие выхода решения на решение Куэтта состоит в том, что напряжение сдвига не изменяется по сечению потока. На фиг. 2 изображены профили относительного сдвигового напряжения π_{xy} в среднем сечении потока для числа $Kn = 0,1$ в зависимости от длины зазора L . Здесь $\pi_{xy} = P_{xy}(Kn, L)/P_{xy}(0, 1; \infty)$, где $P_{xy}(0, 1; \infty)$ соответствует одномерному течению Куэтта при том же числе Кнудсена. При $L = 50$ значения π_{xy} не зависят от y и близки к единице, т. е. напряжение трения соответствует одномерному течению Куэтта. Для $L = 30$ и тем более для $L = 10$ величина π_{xy} еще заметно отличается от постоянной.

На фиг. 3 представлены распределения относительного напряжения трения π_{xy} (отнесено к свободномолекулярному значению $0,5U\pi^{-0,5}$ для течения Куэтта) по x на нижней пластине при числе $Kn = 0,1$ для длин $L = 10$ и 50 . В средней части пластины напряжение π_{xy} близко к постоянному. Можно заметить, что напряжение трения более тонко по сравнению с профилем скорости отражает влияние концов.

Профили продольной скорости в среднем сечении зазора $x = 0$ при $Kn = 0,1$ в зависимости от длины L представлены на фиг. 4. Точки 1 соответствуют значениям скорости в случае одномерного решения при $Kn = 0,1$. Профиль скорости при $L = 50$ на графике невозможно отличить от одномерного. Стоит обратить внимание на асимметрию профилей, особенно для $L = 10$ и 6 . Более того, эти профили не имеют перегибов, поведение кривой у нижней подвижной и верхней неподвижной поверхности различны. Возможно, это связано с тем, что верхняя пластина короче нижней, что проявляется более отчетливо с уменьшением L .

Расход газа через сечение зазора между пластинами не должен изменяться по x , а должен оставаться постоянным, что использовалось для контроля точности вычислений. Величина расхода газа в рассматриваемой задаче (при одинаковых давлениях в резервуарах слева и справа) зависит от длины пластины L и почти не зависит от числа Кнудсена. С ростом длины L энергия, переходящая от пластины к газу, возрастает и соответственно увеличивается расход. Однако увеличение расхода ограничено пределом, соответствующим одномерному сдвиговому течению Куэтта.

Ниже иллюстрируется зависимость расхода NU от параметра L :

L	6	10	20	30	50
NU	0,351	0,388	0,432	0,458	0,493
NU	—	0,349 *	—	—	—

При $L = 30$ величина расхода лишь на 5, а при $L = 10$ на 20% меньше предельного значения.

По мере уплотнения газа, т. е. с уменьшением числа Кнудсена, движение газа становится все более направленным вдоль нижней пластины, а расход через открытый горизонтальный участок границы CF убывает.

4. Течение с противодавлением. Возникает вопрос, как изменится способность системы к перекачиванию газа, если в правом резервуаре давление будет выше, чем в левом. Для ответа на этот вопрос были выполнены некоторые расчеты для $n_2 = 1,1$ при прочих условиях, совпадающих с условиями предыдущей серии вычислений, т. е. $T_2 = 1$; $U = 0,1$.

Наличие противодействия меняет ситуацию качественно. Хотя при выбранных параметрах граничных условий допустима линеаризация, задача решалась в полной нелинейной постановке. При линеаризации задача распалась бы на две: двумерная задача о сдвиговом течении при нулевой разности давлений, т. е. двумерный аналог течения Куэтта, рассмотренный выше, и двумерная задача о течении в канале с неподвижными стенками под действием перепада давлений, т. е. двумерный аналог течения Пуазейля. Нелинейная нерасщепленная задача сохраняет черты и свойства той и другой линейной задачи.

Для иллюстрации влияния противодействия был выбран относительно простой вариант для счета, а именно $L = 10$. Для достижения сходимости с погрешностью не более 1% по расходу при $Kn = 0,1$ потребовалось 300 итераций.

Результаты расчетов для течения с противодавлением для удобства сравнения с соответствующими величинами в безградиентном поле давления нанесены на фиг. 4 точками 2, а на фиг. 2, 3 — штриховыми линиями. Удивительным образом профиль продольной скорости для течения с противодавлением слился с соответствующим профилем для безградиентного течения в более короткой системе ($L = 6$). Противодействие проявляет себя таким образом, что удаляет поток от одномерного течения Куэтта, все распределения отклоняются от соответствующих одномерных, хотя совпадение результатов с теми, что отвечают варианту $L = 6$, конечно, случайно.

Напряжение трения в среднем сечении распределено по y почти линейно (см. фиг. 2) и опять-таки почти совпадает с соответствующим распределением для $L = 6$. Линейность P_{xy} по y характерна для течения Пуазейля. Распределение напряжения по длине нижней поверхности располагается выше того же распределения при нулевом перепаде давления и почти совпадает с P_{xy} по x для $L = 6$.

Расчеты показывают, что при 10%-ном превышении давления в правом резервуаре система еще сохраняет способность к перекачиванию газа слева направо. При этом расход уменьшился также на 10%. Соответствующее числовое значение для течения с противодавлением в таблице отмечено звездочкой.

Расчеты проводились на рабочей станции SPARC-10.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17928).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
3. Шахов Е. М. Задача Куэтта для обобщенного уравнения Крука. Эффект максимума напряжения//Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 5. С. 16—24.
4. Шахов Е. М. Поперечное обтекание пластины разреженным потоком//Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 6. С. 103—113.